Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Chiara Pagani

Fibrati principali quantici ed istantoni non commutativi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 271–274.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_271_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 271-274

Fibrati principali quantici ed istantoni non commutativi

CHIARA PAGANI

1. – Introduzione al problema.

Le cosiddette *teorie di gauge non abeliane* introdotte da C. N. Yang and R. Mills nel 1954 sono oggetto di particolare interesse sia da un punto di vista fisico che matematico. Esse sono generalizzazioni delle equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo nelle quali il gruppo abeliano $U(1)$ delle simmetrie interne è sostituito da uno non abeliano. L'esempio di base è costituito da $SU(2)$.

Queste equazioni furono dapprima studiate dai fisici A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz e Y. Tyupkin e G. 't Hooft in termini di minimi di opportune lagrangiane. È negli anni settanta che diventa chiaro il rapporto fra la teoria di Yang-Mills e la teoria matematica dei fibrati e connessioni su di essi. Soluzioni auto-duali delle equazioni di Yang-Mills con gruppo di struttura $SU(2)$, comunemente chiamate *instantoni*, sono connessioni con curvatura auto-duale su un $SU(2)$-fibrato sulla sfera S^4. Soluzioni generali, non soltanto per $SU(2)$, furono costruite da M. Atiyah, V. G. Drinfeld, N. J. Hitchin e di Yu I. Manin [1] (*costruzione ADHM*). La classificazione di tali soluzioni fu possibile tramite l'utilizzo della teoria dei twistori introdotta da R. Penrose. Nella costruzione ADHM fu utilizzata l'identificazione $S^4 \simeq P^1H$ della sfera quadridimensionale con la linea proiettiva quaternionica.

Fu in particolare dimostrato che lo spazio dei moduli di $SU(2)$ istantoni è una varietà $M(k)$ di dimensione reale $8k - 3$. L'intero k è la *carica dell'istantone* e corrisponde alla seconda classe di Chern del fibrato. Un punto generico di $M(k)$ si ottiene come immagine del cosiddetto *istantone base* tramite l'azione di un opportuno gruppo. Nel caso $k = 1$ l'istantone base è un fibrato vettoriale di rango 1 su P^1H; la connessione è indotta da H^2 tramite proiezione ortogonale. Gli altri istantoni di carica 1 sono poi ottenuti da questo tramite l'azione del gruppo delle trasformazioni conformi di S^4 modulo il gruppo delle isometrie. Il risultato è lo spazio omogeneo $SL(2, H)/Sp(2)$ che parametrizza norme quaternioniche su H^2.

Negli ultimi anni molta attenzione è stata rivolta al problema di estendere la teoria dei fibrati e connessioni alla geometria non commutativa. L'oggetto della tesi è la generalizzazione al caso non commutativo della costruzione ADHM di $SU(2)$ istantoni e del loro spazio dei moduli.

2. – Il linguaggio della geometria non commutativa.

Alla base della geometria noncommutativa vi è l'estensione al caso di algebre non commutative della dualità tra varietà differenziali e algebre commutative stabilita dal teorema di Gel'fand Naimark (1943), [2].

In contesto noncommutativo, i fibrati vettoriali sono sostituiti da moduli proiettivi di tipo finito. Questo riflette la classica corrispondenza tra fibrati vettoriali su di una varietà e i corrispondenti moduli (sopra l'algebra delle funzioni continue sulla varietà stessa) delle sezioni.

I fibrati principali noncommutativi sono *estensioni di Hopf-Galois fedelmente piatte*. Ne ricordiamo la definizione:

DEFINIZIONE 1. – *Sia H un'algebra di Hopf e P un H-comodulo destro con coazione $\Delta_R : P \to P \otimes H$ omomorfismo d'algebra; denotiamo con $m : P \otimes P \to P$ la moltiplicazione in P. Sia $B \subseteq P$ la sottoalgebra dei coinvarianti: $B = \{p \in P \,|\, \Delta_R(p) = p \otimes 1\}$. L'estensione $B \subseteq P$ è detta H-estensione di Hopf-Galois se la mappa canonica*

$$\chi := (m \otimes id) \circ (id \otimes_B \Delta_R) : P \otimes_B P \longrightarrow P \otimes H$$

è biettiva. Inoltre è detta fedelmente piatta se P è fedelmente piatto come B modulo.

Sottolineiamo infine il ruolo chiave dei gruppi quantici: è tramite di essi che le simmetrie vengono implementate in ambito non commutativo.

3. – La costruzione del fibrato di Hopf a partire dai gruppi quantici e l'istantone base.

Nel lavoro di tesi abbiamo costruito una versione quantistica del fibrato di Hopf $S^7 \to S^4$. Questo fornisce uno dei primi concreti esempi di un'estensione di Hopf-Galois con gruppo di struttura un gruppo quantico non abeliano [3]. La fibrazione è ottenuta deformando la struttura simplettica e i gruppi che caratterizzano il fibrato classico

$$S^7 \simeq Sp(2)/Sp(1) \longrightarrow S^4 \simeq Sp(2)/(Sp(1) \times Sp(1)) .$$

Guidati dal caso classico, al fine di costruire lo spazio totale della fibrazione, abbiamo considerato deformazioni $A(Sp_q(n))$ dei gruppi simplettici (*costruzione FRT*). Queste sono algebre di Hopf generate dagli elementi di una matrice T di ordine $2n$; le regole di commutazione tra questi elementi sono date tramite le *equazioni RTT*, dove la matrice R è quella corrispondente ai gruppi C. Inoltre, $A(Sp_q(n))$ è dotato di un antipodo $S(T)$: $S(T)T = TS(T) = I$.

In $A(Sp_q(n))$ abbiamo individuato dei comoduli $A(S_q^{4n-1})$ che danno deformazioni delle algebre di polinomi sulle sfere S^{4n-1}. Questi comoduli sono ottenuti osservando che gli elementi della prima e ultima colonna di T generano una sottoalgebra di $A(Sp_q(n))$ e la condizione $S(T)T = 1$ fornisce l'equazione di sfera.

Il caso in cui siamo più interessati è $n = 2$. La risultante 7-sfera quantica simplettica $A(S_q^7)$ risulta essere l'analogo noncommutativo dello spazio omogeneo $Sp(2)/Sp(1)$:

PROPOSIZIONE 1. – *In $A(Sp_q(2))$ esiste un ideale di Hopf tale che il corrispondente quoziente è isomorfo ad $A(Sp_q(1)) \simeq A(SU_{q^2}(2))$. La restrizione del coprodotto di*

$A(Sp_q(2))$ al quoziente fornisce una coazione di $A(Sp_q(1))$. In particolare l'algebra dei coinvarianti rispetto a tale coazione è $A(S^7_q)$.

Inoltre l'inclusione $A(S^7_q) \hookrightarrow A(Sp_q(2))$ è un esempio di un fibrato principale su uno spazio omogeneo quantico con gruppo di struttura $A(Sp_q(1))$:

PROPOSIZIONE 2. – *$A(S^7_q) \subset A(Sp_q(2))$ è una $A(Sp_q(1))$-estensione di Hopf-Galois fedelmente piatta.*

Il passo successivo e fondamentale consiste nel mostrare che $A(S^7_q)$ è spazio totale di un $A(SU_q(2))$ fibrato principale sopra una 4-sfera quantica $A(S^4_q)$, anch'essa da determinarsi. Guidati dal caso classico, abbiamo inizialmente costruito l'algebra $A(S^4_q)$ come una sottoalgebra di $A(S^7_q)$ generata dagli elementi di matrice di un opportuno proiettore p:

PROPOSIZIONE 3. – *Esiste un'opportuna scelta di due vettori ortonormali $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in A(S^7_q) \otimes C^4$ tali che l'algebra generata dagli elementi del proiettore $p := vv^*$, con $v = (|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle)$ sia una deformazione dell'algebra dei polinomi su S^4, nel seguito denotata $A(S^4_q)$.*

La scelta di v è cruciale ed è unica [3]. Il tentativo ingenuo di generalizzare il caso classico - due colonne qualunque della matrice di $Sp_q(2)$ - produrrebbe una sottoalgebra dei coinvarianti con troppi generatori. Come detto, esiste però una possibile alternativa scelta di v tale che la corrispondente algebra data dagli elementi p_{ij} abbia il corretto numero di generatori e sia una deformazione dell'algebra dei polinomi su S^4. Inoltre abbiamo i seguenti importanti risultati:

PROPOSIZIONE 4. – *$A(S^7_q)$ è $A(SU_q(2))$-comodulo destro. La coazione è un omomorfismo d'algebre e la corrispondente sottoalgebra dei coinvarianti coincide con $A(S^4_q)$.*

PROPOSIZIONE 5. – *$A(S^4_q) \hookrightarrow A(S^7_q)$ è una $A(SU_q(2))$-estensione di Hopf-Galois fedelmente piatta non banale.*

Abbiamo inoltre provato che il modulo generato da p coincide con il modulo delle sezioni del fibrato associato tramite la corappresentazione fondamentale di $SU_q(2)$. Nel limite $q = 1$, il proiettore p è equivalente al classico [1]; la costruzione generalizza l'istantone di carica -1. La carica qui è calcolata tramite la dualità tra K-omologia e K-teoria. Seguendo argomenti generali di teoria dell'indice noncommutativa [2], si possono studiare le rappresentazioni dell'algebra $A(S^4_q)$ e la corrispondente K-omologia. L'analogo della classe fondamentale di S^4 è data da un modulo di Fredholm μ. La carica è calcolata tramite i caratteri di Chern $ch^*(\mu) \in HC^*[A(S^4_q)]$ e $ch_*(p) \in HC_*[A(S^4_q)]$ in coomologia e omologia ciclica rispettivamente [2]. Il risultato è un intero per costruzione, poiché è l'indice di un operatore di Fredholm, ed è -1.

4. – Generalizzazione a generico istantone.

Il passo successivo – affrontato nella seconda parte della tesi – consiste nell'estendere la costruzione a generici istantoni, inizialmente di carica unitaria e poi di carica maggiore [4]. Le algebre delle sfere simplettiche descritte in precedenza hanno una struttura complicata. Si è deciso quindi di affrontare il problema lavorando inizialmente con un'altra deformazione $A(S^4_\theta) \hookrightarrow A(S^7_\theta)$ del fibrato istantonico costruita in [5]. Gli spazi totali e di base della fibrazione sono deformazioni isospettrali delle algebre polinomiali sulla 4-7 sfera (*sfere di Connes-Landi*). In questo caso il gruppo di struttura è non deformato, ma dato da $SU(2)$. Anche in questo caso è stato costruito l'istantone base tramite un proiettore $p = vv^*$.

Al fine di costruire generici istantoni di carica 1, l'idea è di riprodurre l'azione dello spazio omogeneo $SL(2,H)/Sp(2)$. Infatti come detto, classicamente altri istantoni son costruiti da quello base cambiando la norma in H^2 [1].

Questo è possibile per il caso θ, con la costruzione di θ-deformazioni $A(SL_\theta(2,H))$ e $A(Sp_\theta(2))$ dei corrispondenti gruppi classici. Ne segue uno spazio dei moduli 5-dimensionale $\mathcal{M}_\theta$ e una famiglia ad un parametro di 4-sfere di raggio $\rho^2 = v^*v$. $\mathcal{M}_\theta$ è spazio omogeneo: è costruito come la sottoalgebra dei coinvarianti di $A(SL_\theta(2,H))$ rispetto alla coazione di $A(Sp_\theta(2))$. La 4-sfera $A(S^4_\theta)$ "siede alla frontiera" di $\mathcal{M}_\theta$ come nel caso classico. I corrispondenti proiettori sono costruiti e la carica è esplicitamente calcolata.

Più difficile è il caso di istantoni di carica più alta $k > 1$. Classicamente sono ottenuti tramite una mappa della forma $v = Cx + Dy$ da P^1H alla varietà di Stiefel $St(k, k+1)$; le matrici $C, D \in Mat((k+1) \times k), H)$ devono soddisfare alcune condizioni [1]. I parametri che entrano nella costruzione son poi ridotti a $8k - 3$ quozientando per l'azione di $Sp(k+1)$ e $Gl(k, R)$. A livello non commutativo, la mappa v_θ è stata costruita tramite opportune algebre C, D ma rimane il problema di come implementare le ulteriori simmetrie.

Infine, per quanto riguarda il caso simplettico, nella tesi sono stati fatti alcuni importanti passi nella costruzione per $k = 1$, ma la costruzione dello spazio dei moduli è un problema ancora aperto.

BIBLIOGRAFIA

[1] ATIYAH M., *The geometry of Yang-Mills fields, Lezioni Fermiane*. Accademia Nazionale dei Lincei e Scuola Normale Superiore, Pisa (1979).

[2] CONNES A., *Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).

[3] LANDI G., PAGANI C. e REINA C., *A Hopf bundle over a quantum four-sphere from the symplectic group*, Commun. Math. Phys., **263**, 1 (2006), 65-88.

[4] LANDI G., PAGANI C., REINA C. e VAN SUIJLEKON W., in preparazione.

[5] LANDI G. E VAN SUIJLEKOM W., *Principal fibrations from noncommutative spheres*, Commun. Math. Phys., **260** (2005), 206-225.

Department of Mathematics, University of Wales, Singleton Park,
Swansea SA2 8PP, UK
e-mail: pagani@sissa.it
Dottorato in Matematica, SISSA, Trieste - Ciclo XVII
Relatori: Giovanni Landi (Università di Trieste), Cesare Reina (SISSA)