Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Arsen Palestini

Riformulazioni e proprietà geometriche di alcuni indici di potere in giochi cooperativi ad n persone

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 275–278.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_275_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 275-278

Riformulazioni e proprietà geometriche di alcuni indici di potere in giochi cooperativi ad n persone

ARSEN PALESTINI

1. – Cenni preliminari sui giochi cooperativi.

Fissiamo preliminarmente le definizioni di base e la notazione standard relativa ai giochi cooperativi ad utilità trasferibile ad n persone, tratta da [5].

Chiamiamo $N = \{1, \ldots, n\}$, con $n < \infty$, l'insieme dei giocatori e qualsiasi sottoinsieme di N (compreso N stesso e tutti i singoletti in N) sarà detto una **coalizione**.

DEFINIZIONE 1. – *Un* ***gioco cooperativo ad utilità trasferibile ad*** n ***giocatori*** *è una funzione* $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$, *tale che* $v(\emptyset) = 0$.

Intuitivamente, la funzione caratteristica v assegna ad ogni coalizione $S \subseteq N$ il valore di tale coalizione nel gioco.

Introduciamo ora la notazione mutuata da [3], ossia chiamiamo:

$\mathbb{S}(s, 0)$ l'insieme delle $\binom{n}{s}$ coalizioni da s giocatori;

$\mathbb{S}(s, +i)$ l'insieme delle $\binom{n-1}{s-1}$ coalizioni da s giocatori che comprendono l'i-esimo elemento;

$\mathbb{S}(s, -i)$ l'insieme delle $\binom{n-1}{s}$ coalizioni da s giocatori che non comprendono l'i-esimo elemento.

Tutti questi insiemi sono ordinati secondo l'ordine lessicografico, e chiamando $S_j(s, k)$ il j-esimo elemento dell'insieme $\mathbb{S}(s, k)$, con $k = 0$ o $k = i$, $i \in N$, diamo le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 2. – *Per ogni coalizione* $S \subseteq N$, *l'****essenzialita*** e(S) *è il numero:*

$$e(S) := v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\}).$$

In particolare, $e_j(s, k) := e(S_j(s, k))$, per ogni $s \in N$, $k = -n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n$.

DEFINIZIONE 3. – *Per* $s = 1, \ldots, n$, *l'****essenzialità media delle coalizioni da*** s ***giocatori*** *è:*

$$a(s, 0) := \frac{1}{\binom{n}{s}} \sum_{j=1}^{\binom{n}{s}} e_j(s, 0).$$

DEFINIZIONE 4. – *Per $s = 1, \dots, n$ e $i \in N$, l'**essenzialità media delle coalizioni da** s **giocatori non comprendenti l'i-esimo** è:*

$$a(s,-i) := \frac{1}{\binom{n-1}{s}} \sum_{j=1}^{\binom{n-1}{s}} e_j(s,-i).$$

DEFINIZIONE 5. – *Per $s = 1, \dots, n$ e $i \in N$, l'**essenzialità media delle coalizioni da** s **giocatori comprendenti l'i-esimo** è:*

$$a(s,+i) := \frac{1}{\binom{n-1}{s-1}} \sum_{j=1}^{\binom{n-1}{s-1}} e_j(s,+i).$$

DEFINIZIONE 6. – *Dati gli interi non negativi $q, w_1, \dots, w_n$, con*

$$0 < q \le \sum_{j=1}^{n} w_j, \qquad \text{for } i = 1, \dots, n,$$

*denotiamo con $v \equiv [q; w_1, \dots, w_n]$ il **gioco a maggioranza pesata** su N definito da*

$$v(S) = \begin{cases} 1 \text{ se } w(S) \ge q \\ 0 \text{ se } w(S) < q \end{cases} \quad \forall\, S \subseteq N,$$

dove $w(S) = \sum\limits_{i \in S} w_i$.

In questa definizione w_i è la dotazione in voti dell'i-esimo giocatore (o partito), e q è la quota di maggioranza che una coalizione deve raggiungere per vincere. Per evitare che un gioco a maggioranza pesata risulti banale, è preferibile assumere che nessun giocatore abbia la maggioranza assoluta da solo, vale a dire supporre che $w_i < q$ per ogni $i \in N$.

2. – Indici di potere.

Gli indici di potere si possono considerare dei vettori di utilità in $\mathbb{R}^n$, dipendenti dalle immagini della funzione v, che quantificano il potere di ogni singolo giocatore di formare una coalizione vincente. I principali indici di potere sono l'indice di Shapley-Shubik, introdotto inizialmente da L. S. Shapley nel 1953 ([7]), e quello di Banzhaf-Coleman, definito dall'avvocato J. F. Banzhaf III nel 1965 ([1]). Altri importanti riferimenti bibliografici riguardanti le assiomatizzazioni, le proprietà e le applicazioni di questi indici di potere si possono trovare ad esempio in [2] e [4]. Ricordiamo le loro definizioni originali:

DEFINIZIONE 1. – *Il **valore di Shapley** di un gioco ad n persone $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ è il vettore $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \Phi_2(v), \dots, \Phi_n(v))$, dove:*

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S,\ S \subseteq N} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})),$$

e $|S| = s$, per ogni coalizione $S \subseteq N$.

DEFINIZIONE 2. – *Il **valore di Banzhaf** di un gioco ad n persone v è il vettore:*

$$\tilde{\beta}(v) = (\tilde{\beta}_1(v), \ldots, \tilde{\beta}_n(v)), \;\; dove \;\; \tilde{\beta}_i(v) = \frac{v(N) \cdot \theta_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \theta_j},$$

e dove

$$\theta_i := \sum_{i \in S} (v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

3. – Nuove rappresentazioni per gli indici di potere.

Basandosi sulle definizioni precedenti di essenzialità medie, si può ricavare una nuova rappresentazione per $\tilde{\beta}(v)$:

PROPOSIZIONE 1. – *Il valore di Banzhaf di un qualunque gioco cooperativo ad n persone v si può esprimere con la formula seguente:*

$$\tilde{\beta}_i(v) = \frac{v(N)\left(\sum\limits_{s=2}^{n}\left[\binom{n}{s}a(s,0) - 2\binom{n-1}{s}a(s,-i)\right] + 2^{n-1}v(\{i\})\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{s=2}^{n}\left[\binom{n}{s}a(s,0) - 2\binom{n-1}{s}a(s,-j)\right] + 2^{n-1}v(\{j\})\right)},$$

$\forall\ i \in N$.

DIMOSTRAZIONE. – Cfr. [6], pp. 491-492. ■

Una conseguenza di questa riformulazione è la possibilità di esprimere, in maniera piuttosto semplice, anche l'indice di Banzhaf nei giochi a maggioranza pesata tramite le cardinalità degli insiemi di coalizioni vincenti. Essendo i giochi a maggioranza pesata giochi in (0,1)-normalizzazione, in questo caso viene considerato l'indice di Banzhaf normalizzato.

TEOREMA 2. – *L'indice di Banzhaf normalizzato $\beta(v)$ di un gioco a maggioranza pesata $v \equiv [q; w_1, \ldots, w_n]$ si può esprimere come segue:*

$$\beta_i(v) = \frac{1 + \sum\limits_{s=2}^{n-1}(K(s,0) - 2K(s,-i))}{n + n\sum\limits_{s=2}^{n-1}K(s,0) - 2\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{s=2}^{n-1}K(s,-j)\right)},$$

$\forall\ i \in n$*, dove*

$$K(s,-i) := \#\{S \in \mathbb{S}(s,-i) : w(S) \geq q\},$$

$\forall\ s \in N,\ \forall\ i = 0, 1, \ldots, n.$

DIMOSTRAZIONE. – Cfr. [6], pp. 492-493.

REMARK 1. – *Questa nuova rappresentazione ha delle ricadute positive sul costo computazionale per un eventuale calcolo dell'indice di Banzhaf nel caso in cui il numero di giocatori coinvolti sia molto grande. In un processo algoritmico basato sulla formula originale di Banzhaf che richiedesse la memorizzazione di tutti i valori* $v(S)$ *delle coalizioni, ci sarebbe bisogno di memorizzare ben* $2^n - n - 2$ *valori. Invece, grazie alla formula sopra descritta bastano* $n^2 - n - 2$ *dati da memorizzare: ad esempio, solo nel caso* $n = 6$, *la formula originale richiede 56 valori, mentre la nuova soltanto* 28. *All'aumentare di n, aumenta evidentemente il risparmio computazionale.*

Un altro importante valore di potere è il valore di Myerson (cfr. [4]), che corrisponde al valore di Shapley per giochi ristretti a grafi, ossia in cui non tutti i giocatori possono formare coalizioni con chiunque, ma sono in qualche modo "legati" da alleanze precostituite. Riporto di seguito solo la nuova rappresentazione, rimandando a [6] per tutta la dimostrazione e per esempi di applicazioni.

PROPOSIZIONE 3. – *Dato il gioco a maggioranza pesata* $v = [q; w_1, \ldots, w_n]$, *e* $v^{\mathcal{F}}$ *il suo corrispondente gioco ristretto al grafo su un insieme stabile* $\mathcal{F}$ *associato ad un grafo* $G = (N, E)$, *se per ogni* $S \in \mathbb{S}(s, +i) \setminus \mathcal{F}$, *o* $C_{\mathcal{F}}(S) = \emptyset$ *oppure nessuna componente di* S *in* $\mathcal{F}$ *è una coalizione vincente, allora il valore di Myerson per l'i-esimo giocatore è dato dalla formula seguente:*

$$\mu_i(v) = \frac{1}{n} - \sum_{s=2}^{n-1} \frac{a_{\mathcal{F}}(s,0)}{n-s} + \sum_{s=2}^{n-1} \frac{\deg_{\,w,s}(i)}{s(s-1)\binom{n-1}{s}}.$$

DIMOSTRAZIONE. – Cfr. [6], pp. 503-504. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] J. F. BANZHAF III, *Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis*, Rutgers Law Review, **19** (Winter 1965), 317-343.
[2] G. GAMBARELLI, *Common behaviour of power indices*, International Journal of Game Theory, **12** (**1983**), 237-244.
[3] G. GAMBARELLI, *A new approach for evaluating the Shapley value*, Optimization, **21** (1990), 445-452.
[4] R. B. MYERSON, *Graphs and cooperation in games*, Mathematics of Operations Research, **2** (1977), 225-229.
[5] G. OWEN, *Game Theory. III ed.*, Academic Press, San Diego (1995).
[6] A. PALESTINI, *Reformulation of Some Power Indices in Weighted Voting Games*, Power Measures III, a Special Issue of Homo Oeconomicus, **22** (2005), 487-507.
[7] L. S. SHAPLEY, *A value for n person game*, Contributions to the Theory of Games II, Princeton University Press, **39** (1953), 307-317.

Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini" Università di Firenze
e-mail: palestini@math.unifi.it, algebraickid@yahoo.com
Dottorato di ricerca in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca Prof. G. Gambarelli (Università di Bergamo)
Tutor Prof. M. Furi (Università di Firenze)