Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Riccardo Pulcini

Grado dei gruppi quantici parabolici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 283–285.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_283_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 283-285

Grado dei gruppi quantici parabolici

RICCARDO PULCINI

1. – Il problema.

Questo lavoro affronta e risolve il problema di calcolare esplicitamente il grado di un gruppo quantico parabolico alle radici dell'unità, indicato con $U_\varepsilon(p)$, o brevemente U_ε. Tale problema rientra nella teoria delle rappresentazioni di U_ε, o studio degli U_ε-moduli, come caso particolare dello studio dei moduli su algebre con traccia di tipo speciale.

Un gruppo quantico, quale U_ε, è una certa algebra associativa unitaria dipendente da un parametro ε; essa è finitamente generata, ma di dimensione infinita. Quando ε è una radice dell'unità (non banale), tale algebra, pur non essendo commutativa, possiede un centro $Z_\varepsilon := Z(U_\varepsilon)$ piuttosto grosso, nel senso che U_ε è uno $Z_\varepsilon$modulo di tipo finito. Questo fatto ha un'importante conseguenza per lo studio degli U_ε-moduli, che viene a legarsi a questioni di geometria algebrica, che ora vado a precisare.

Sia $\operatorname{Spec} Z_\varepsilon$ lo spettro massimale di Z_ε, e sia $\operatorname{Rap}(U_\varepsilon)$ l'insieme delle classi di isomorfismo degli U_ε-moduli semplici. Allora $\operatorname{Spec} Z(U_\varepsilon)$ è una varietà affine, e, per il Lemma di Schur, restringendo a Z_ε il carattere di ciascuna rappresentazione semplice di U_ε si ottiene una applicazione, suriettiva e finita,

$$\Xi : \operatorname{Rap}(U_\varepsilon) \to \operatorname{Spec} Z_\varepsilon$$

Analoghe circostanze si verificano per una vasta classe di algebre, dette algebre con traccia, delle quali i gruppi quantici tipo U_ε formano un esempio. Più precisamente, U_ε appartiene ad una sottoclasse speciale di algebre con traccia, i cosiddetti ordini massimali, per i quali la teoria generale dà informazioni più dettagliate sull'applicazione χ. Precisamente, sia R un ordine massimale, e $Z := Z(R)$ il suo centro. Allora Z è algebra di tipo finito, R è Z-modulo di tipo finito, esiste una ben definita applicazione $\Xi : \operatorname{Rap}(R) \to \operatorname{Spec} Z(R)$ suriettiva e finita (per il Lemma di Schur), e inoltre esiste un $d \in \mathbb{N}$ tale che:

1. i punti della varietà $\operatorname{Spec} Z(R)$ parametrizzano le classi di isomorfismo degli R-moduli semisemplici di dimensione d.
2. dato $\chi \in \operatorname{Spec} Z(R)$, la fibra $\Xi^{-1}(\chi)$ consiste di quegli R-moduli semplici che figurano nell'R-modulo semisemplice corrispondente a χ secondo a). In particolare, ogni R-modulo semplice ha dimensione al più d.
3. il sottoinsieme Ω di $\operatorname{Spec}(Z)$ dei punti con fibra ridotta ad un solo punto è aperto e non vuoto.

L'intero d di cui sopra si dice grado di R (per maggiori dettagli si veda [3]). Ora, U_ε è appunto un ordine massimale, dunque ha un grado ben definito, che ci si propone di determinare. Inoltre, nel caso di $R = U_\varepsilon$ l'insieme Ω di cui sopra è anche denso, per cui possiamo dire che il grado d è la dimensione di quasi tutti gli U_ε-moduli semplici.

2. – Il contesto.

Esistono diversi tipi di gruppi quantici. Il più studiato è una deformazione (ad un parametro) dell'algebra inviluppante universale di un'algebra di Lie semisemplice, diciamo $\mathfrak{g}$, ed è indicato con $U_\varepsilon(\mathfrak{g})$. Analoga costruzione può esser fatta per varie sottoalgebre (di Lie) di $\mathfrak{g}$, in particolare le sue sottoalgebre di Borel che indichiamo con $\mathfrak{b}$ o le sue sottoalgebreparabolicheche indichiamo con $\mathfrak{p}$. Questeultime sono un caso più generale, nel senso che sia $\mathfrak{g}$ che ogni sottoalgebra di Borel sono anche sottoalgebre paraboliche: lo studio dei casi $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ oppure $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ quindi è un caso particolare del problema parabolico.

I casi $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ sono affrontati e risolti nei primi anni '90 in una serie di lavori di De Concini, Kac e Procesi ([1], [2], [4]). Il primo caso richiede, tra l'altro, una descrizione accurata del centro $Z(U_\varepsilon(\mathfrak{g}))$ del gruppo quantico in esame; nel caso di $\mathfrak{p}$ parabolico qualunque,un tale studio del centro appare troppo difficile, e dunque tale approccio è problematico. Il secondo caso invece sfrutta la particolare natura di $U_\varepsilon(\mathfrak{b})$, che è quasi un'algebra polinomiale: per algebre di questo tipo esiste una buona teoria generale che consente di calcolarne il grado da una semplice (in principio) analisi della matrice delle sue costanti di struttura. Ma nel caso di $\mathfrak{p}$ parabolica che non sia di Borel, l'algebra $U_\varepsilon(\mathfrak{p})$ non è quasi polinomiale, e quindi non si può seguire ancora questo metodo. Questo tesi affronta il caso generale (parabolico) in modo indipendente dai casi $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$. In particolare, fornisce nuove dimostrazioni dei risultati già noti per questi casi.

3. – La strategia, le idee.

L'idea principale di questo lavoro consiste nel semplificare il problema operando una degenerazione (tramite deformazione ad un parametro): si passa così dallo studio di $U_\varepsilon(\mathfrak{p})$ a quello di un'altra algebra più semplice, $S_\varepsilon := S_\varepsilon(\mathfrak{p})$. Ad S_ε si può applicare lo stesso metodo essenzialmente già usato per $U_\varepsilon(\mathfrak{b})$; in questo modo si calcola esplicitamente il grado di S_ε. Ma quest'ultimo è uguale al grado di U_ε perché il passaggio di degenerazione da U_ε ad S_ε non modifica il grado; questo fatto non è immediatamente ovvio dalla costruzione, ma segue dalla rigidità delle algebre (di dimensione finita) semisemplici. La degenerazioneè semplice. L'algebra U_ε è definita per generatori e relazioni. Inserendo opportunamente un parametro t nelle relazioni, si ottiene una famiglia ad un parametro di algebre. Per $t \neq 0$ esse sono tutte isomorfe ad U_ε ; per $t = 0$ invece si ottiene un'algebra S_ε che è più semplice, perché alcune relazioni divengono banali.

Nel confrontare i gradi, dalla costruzione per degenerazione si può concludere soltanto che il grado di U_ε è maggiore o uguale a quello di S_ε. Si considera allora una particolare sottoalgebra di Z_ε, detta Z_0: con essa si costruisce un'applicazione $F : \mathrm{Rap}\,(U_\varepsilon) \to \mathrm{Spec}\, Z$, analoga alla Ξ di cui sopra e con proprietà del tutto simili; il vantaggio è che Z_0 è nota in dettaglio, diversamente da Z_ε . Una simile costruzione vale anche per S_ε al posto di U_ε . Le proprietà relative alle fibre di queste applicazioni intervengono, usando un argomento di rigidità delle algebre associative semisemplici (di dimensione finita), per concludere che opportuni quozienti di dimensione finita di S_ε sono isomorfi agli analoghi, corrispondenti quozienti di U_ε . Ne segue che i gradi di tali quozienti coincidono; poiché per costruzione essi uguagliano rispettivamente i gradi di S_ε e di U_ε, si conclude che S_ε e U_ε hanno lo stesso grado.

Ora, l'algebra S_ε è una iterated twisted derivation algebra (i.t.d.a.) ([3]), cioè un'algebra ottenuta operando più volte una costruzione elementare che è quasi la costruzione di polinomi in una variabile. Ogni tale algebra possiede una filtrazione naturale essenzialmente, quella data dal grado dei polinomi e quindi le si associa un'algebra graduata $\overline{S}_\varepsilon$, che ha lo stesso grado. Questa $\overline{S}_\varepsilon$ è una i.t.d.a. più semplice: è una quasi polynomial algebra, per la quale esiste una tecnica generale che consente di calcolare il grado in termini della matrice delle costanti di struttura. Applicando tale tecnica, troviamo una formula esplicita per il grado di $\overline{S}_\varepsilon$, e dunque per il grado di S_ε, che è quello di U_ε.

Descriviamo infine la formula per il grado d. Sia $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ con $\mathfrak{l}$ semisemplice, la decomposizione di Levi di $\mathfrak{p}$. Sia w_0 e $w_0^{\mathfrak{l}}$ l'elemento più del gruppo di Weyl di $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{l}$ rispettivamente. Sia ε una radice n-esima dell'unità allora

TEOREMA 1. – *Sotto alcune restrizione tecniche su n, si ha*

$$d = n^{\frac{1}{2}\left(l(w_0)+l(w_0^{\mathfrak{l}})+\mathrm{rank}\left(w_0-w_0^{\mathfrak{l}}\right)\right)}$$

dove l è la funzione lunghezza del gruppo di Weyl.

BIBLIOGRAFIA

[1] DE CONCINI e KAC V., *Representations of quantum groups at roots of* 1, Progr. Math., **92** (1990), 471-506.

[2] DE CONCINI C., KAC V. e PROCESI C., *Quantum coadjoint action*, Journal of the American Mathematical Society, **5** (1992), 151-189.

[3] DE CONCINI C. e PROCESI C., *Quantum Groups*, Lecture Notes in Math., **1565** (1993), 31-140.

[4] DE CONCINI C. e KAC V., *Representations of quantum groups at roots of* 1: reduction to the exceptional case, Adv. Ser. Math. Phys., **16** (1992), 141-149.

Dipartimento di Matematica Università di Roma "Roma Tre"
e-mail: pulcini@mat.uniroma3.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: "Roma Tre") - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Corrado De Concini, Università di Roma "La Sapienza"