# Bollettino Unione Matematica Italiana

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*


Carmela Sica

## Classi di coniugio di normalizzanti e centralizzanti

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 291–294.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_291_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 291-294

# Classi di coniugio di normalizzanti e centralizzanti

CARMELA SICA

## 1. – Introduzione.

I gruppi in cui ogni sottogruppo è normale sono detti *gruppi di Dedekind* e sono stati studiati e completamente descritti da R. Dedekind, E. Wendt e R. Baer. In seguito, M. D. Pérez-Ramos ha studiato i gruppi finiti con esattamente due normalizzanti e ne ha descritto la struttura. S. Camp-Mora ha poi generalizzato il risultato di Pérez-Ramos al caso di gruppi localmente finiti. Nel caso generale, i gruppi con un numero finito di normalizzanti sono stati caratterizzati da M. Tota come i gruppi centrale-per-finito. Inoltre, nello stesso lavoro, è stato esteso il risultato di Camp-Mora al caso di gruppi arbitrari con due normalizzanti, e sono state studiate le proprietà dei gruppi con tre e quattro normalizzanti.

D'altra parte J. Poland e A. Rhemtulla (cfr. [4]) hanno provato l'esistenza di un limite inferiore per il numero $\upsilon(G)$ delle classi di coniugio dei sottogruppi non-normali, in un gruppo nilpotente finito, in termini della classe di nilpotenza di $G$.

TEOREMA 1. – *(Poland e Rhemtulla) Siano $G$ un gruppo nilpotente finito, non di Dedekind, avente classe di nilpotenza $c$, e $\upsilon(G)$ il numero delle classi di coniugio dei sottogruppi non-normali di $G$. Allora $\upsilon(G) \geq c - 1$.*

Relativamente allo stesso problema, ristretto al caso dei $p$-gruppi finiti, L. Legarreta (cfr. [3]) ha provato il seguente risultato:

TEOREMA 2. – *(Legarreta) Siano $G$ un $p$-gruppo finito, non di Dedekind, e $k = log_p(|G'|)$. Allora $\upsilon(G) \geq k$ e, se $p \neq 2$, $\upsilon(G) \geq p(k-1)+1$.*

Partendo da questi risultati, si è pensato, in collaborazione con N. Gavioli, L. Legarreta e M. Tota, di studiare le classi di coniugio dei normalizzanti in un gruppo e, in particolare, di limitarne il numero.

## 2. – Normalizzanti e classi di coniugio.

In primo luogo (cfr. [1]) si sono cercate le condizioni necessarie per ottenere l'uguaglianza tra il numero dei normalizzanti, che sarà indicato con $s(G)$, ed il numero delle classi di coniugio dei normalizzanti, $\omega(G)$; in altre parole si sono cercate ipotesi sotto le quali ogni normalizzante è normale. Ovviamente l'uguaglianza in questione non vale in generale ma, per i gruppi che soddisfano la *condizione sui normalizzanti*, cioè per i gruppi in cui ogni sottogruppo proprio è propriamente contenuto nel suo normalizzante, sussiste il teorema seguente.

TEOREMA 3. – *Sia $G$ un gruppo che soddisfa la condizione sui normalizzanti.*

1. *Se $\omega(G) \leq 3$ allora $s(G) = \omega(G)$.*
2. *Se $\omega(G) = 4$ allora $s(G) \leq 5$ e, se $G$ non ha quozienti isomorfi a $C_2 \times C_2$, allora si ha $s(G) = \omega(G)$.*

Inoltre, per i $p$-gruppi finiti, il precedente risultato può essere migliorato:

TEOREMA 4. – *Sia $G$ un $p$-gruppo finito.*

1. *Se $\omega(G) \leq p + 1$ allora $s(G) = \omega(G)$.*
2. *Se $\omega(G) = p + 2$ allora $s(G) = \omega(G)$ oppure $s(G) = 2p + 1$.*

Gli esempi che seguono mostrano che tutte le situazioni descritte sono verificabili. Il primo caso si riferisce al Teorema 3 e al Teorema 4 per i 2-gruppi. Il secondo, invece, mostra che non è possibile trovare una limitazione migliore neanche per i $p$-gruppi con $p$ primo dispari.

ESEMPIO 1. – *Se $SD_{16} = \langle a, b \mid a^8 = 1 = b^2, a^b = a^3 \rangle$ allora $\omega(G) = 4$ e $s(G) = 5$.*

ESEMPIO 2. – *Se $G = \langle x, y \mid x^{p^3} = y^{p^2} = 1, x^y = x^{1+p} \rangle$ allora $\omega(G) = p + 2$ e $s(G) = 2p + 1$.*

## 3. – Classi di coniugio di normalizzanti.

Un altro obiettivo è stato la ricerca di un limite, nei $p$-gruppi finiti, per il numero delle classi di coniugio di normalizzanti (cfr. [2]). Chiaramente, ad ogni classe di coniugio $K$ di sottogruppi non normali di $G$ corrisponde la classe di coniugio $\rho(K)$ dei normalizzanti di tali sottogruppi. Tenendo conto del fatto che $G$ è sempre un normalizzante, le limitazioni che ci si aspetta saranno maggiorate di un'unità rispetto a quelle di $\upsilon(G)$.

In generale l'applicazione $\rho$ non è iniettiva ed un controesempio mostra che non è possibile trovare limitazioni analoghe a quelle del Teorema 2, se non sotto ulteriori ipotesi.

ESEMPIO 3. – *Se $G \simeq Q_{2^n}$ allora $\omega(G) = 2n - 5 = 2(n - 3) + 1$.*

TEOREMA 5. – *Sia $G$ un $p$-gruppo di classe massimale e ordine $p^n$, $G \not\simeq Q_{2^n}$. Allora $G$ ha almeno $p(n - 3) + 2$ classi di coniugio di normalizzanti.*

È comunque possibile limitare $\omega(G)$ in funzione della classe di nilpotenza di $G$ e trovare un analogo della minorazione che Poland e Rhemtulla (Teorema 1) avevano trovato per $\upsilon(G)$.

TEOREMA 6. – *Se $G$ è un $p$-gruppo finito ($p$ dispari) con classe di nilpotenza $c$, allora $\omega(G) \geq c$.*

## 4. – Classi di coniugio di centralizzanti.

Lo studio di classi di coniugio è proseguito considerando i gruppi con un numero finito di classi di coniugio di centralizzanti di elementi (cfr. [5]).

DEFINIZIONE 1. – *Si dirà che un gruppo $G$ ha $n$ classi di coniugio di centralizzanti ($G \in \Gamma_n$) se esistono $n$ elementi, $x_1 \in Z(G)$, $x_2, \ldots, x_n \in G \setminus Z(G)$, tali che $\{C_G(y) \mid y \in G\} = \{C_G(x_i)^g \mid g \in G,\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Si dirà che un gruppo $G$ ha un numero finito di classi di coniugio di centralizzanti ($G \in \Gamma$) se $G \in \Gamma_n$ per qualche numero naturale $n \geq 1$.*

Poiché ogni gruppo centrale-per-finito ($|G : Z(G)| < \infty$) è chiaramente in $\Gamma$, si è cercata una classe di gruppi per cui fosse possibile invertire tale risultato. Si ha:

TEOREMA 7. – *Sia $G$ un gruppo con un numero finito di classi di coniugio di centralizzanti, ($G \in \Gamma$). Se $G$ è nilpotente, allora $G$ è centrale-per-finito ($|G : Z(G)| < \infty$).*

Sono stati poi considerati i gruppi in $\Gamma_n$. Ovviamente, gruppi in $\Gamma_1$ sono tutti e soli gli abeliani. Per quanto riguarda i gruppi con al più due classi, un risultato interessante si è ottenuto limitandosi ai gruppi $G$ che non sono unione dei coniugati di un loro sottogruppo proprio ($G \in W$).

TEOREMA 8. – *Sia $G$ un gruppo con al più due classi di coniugio di centralizzanti ($G \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$). Se $G \in W$, allora $G$ è abeliano.*

Anche per i gruppi che sono sia in $\Gamma_3$ che in $W$ è stato ottenuto qualche risultato significativo, in particolare per i gruppi finiti con tre classi si sono ottenute informazioni sulla struttura. Inoltre, poiché da un teorema di Itô discende che tali gruppi sono risolubili, è stato altresì possibile limitare la loro lunghezza derivata:

TEOREMA 9. – *Sia $G$ un gruppo finito in $\Gamma_3$. Allora vale una delle seguenti proprietà:*

1. *$G$ è metabeliano*

2. $\dfrac{G}{Z(G)}$ *è un gruppo di Frobenius con nucleo $p$-gruppo abeliano elementare e complemento ciclico.*

*In ogni caso, $G$ ha lunghezza derivata al più tre.*

## BIBLIOGRAFIA


[1] Gavioli n., Legarreta L., Sica C. e Tota M., *On the number of normalizers and conjugacy classes of normalizers*, Inviato per pubblicazione.

[2] Gavioli N., Legarreta L., Sica C. e Tota M., *On the number of conjugacy classes of normalizers in a finite $p$-group*, In corso di stampa su Bull. Austr. Math. Soc.

[3] Legarreta L., *On the number of conjugacy classes of non-normal subgroups of a finite $p$-group*, Preprint,

[4] Poland J. e Rhemtulla A., *The number of conjugacy classes of non normal subgroups in nilpotent groups*, Comm. Algebra, **24** (1996), 3237-3245.

[5] Sica C. e Tota M., *Groups with finitely many conjugacy classes of centralizers*, In corso di stampa su J.P. Alg. Num. Theo. and Appl.



Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Salerno
e-mail: csica@unisa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Salerno) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof.ssa Patrizia Longobardi, Università di Salerno