Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alessandro Ardizzoni

Proprietà coomologiche di algebre e coalgebre in categorie monoidali con applicazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 187–190.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_187_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 187-190

Proprietà coomologiche di algebre e coalgebre in categorie monoidali con applicazioni

ALESSANDRO ARDIZZONI

1. – Introduzione.

Una cateogoria monoidale è una categoria $\mathcal{M}$ dotata di un oggetto $\mathbf{1} \in \mathcal{M}$ (detto *unità*) e di un funtore $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ (detto *prodotto tensoriale*) che obbedisce ad assiomi che ne garantiscono l'associatività (a meno di un isomorfismo) e la "compatibilità" con $\mathbf{1}$. In questa tesi si prendono in considerazione principalmente due tipi di categorie monoidali: le categorie monoidali abeliane e quelle coabeliane. Una categoria monoidale abeliana (risp. coabelian) è una categoria monoidale $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$ in cui la categoria sottogiacente $\mathcal{M}$ è abeliana e i funtori tensoriali sono esatti a destra (risp. sinistra) e additivi. L'esempio più noto di categoria monoidale (co)abeliana (che chiameremo *caso classico*) è la categoria degli spazi vettoriali su di un campo K, dove l'unità è K e il prodotto tensoriale è l'usuale prodotto tensoriale su K. Altri esempi di categoria monoidale (co)abeliana sono le categorie dei moduli sinistri, quella dei moduli destri e quella dei moduli bilateri su di una K-algebra di Hopf, o la categoria dei moduli di Yetter-Drinfeld ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$ su una K-algebra di Hopf H con antipode biettivo (unità e prodotto tensoriale sono indotti da quelli del caso classico). Siamo altresì interessati allo studio di bialgebre dentro categorie monoidali. Nel caso classico, la definizione di bialgebra richiede una compatibilità tra moltiplicazione e comoltiplicazione che fa uso del flip canonico $V \otimes_K W \cong W \otimes_K V$. Un siffatto morfismo non esiste in una categoria monoidale arbitraria. Una categoria monoidale braided è una categoria monoidale tale che, per ogni $X, Y \in \mathcal{M}$, esista un isomorfismo naturale $X \otimes Y \cong Y \otimes X$, detto braiding, soddisfacente opportune relazioni che esprimono in linguaggio categorico il comportamento del flip canonico. La categoria ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$ è un esempio di categoria monoidale braided. Essa gioca un ruolo fondamentale nel problema di classificazione delle algebre di Hopf di dimensione finita. La nozione di categoria monoidale è stata introdotta da Bénabou (1963). Le categorie monoidali braided sono state introdotte da Joyal e Street (1986).

2. – Obiettivi.

Scopo di questa tesi è quello di presentare in modo unificato tutta una serie di risultati inerenti le proprietà coomologiche di (co)algebre nell'ambito di categorie monoidali (co)abeliane e di illustrare alcune applicazioni legate al problema di classificazione delle algebre di Hopf di dimensione finita. Più precisamente, mostriamo come introdurre la coomologia di Hochschild in una categoria monoidale (co)abeliana e come classificare le (co)algebre di dimensione coomologica al più 1. Queste tecniche sono poi applicate per dimostrare che certe K-algebre di Hopf possono essere descritte per mezzo di un processo di bosonizzazione. I risultati di tipo coomologico citati vengono altresì applicati per dimostrare che, come nel caso classico, l'algebra tensoriale $T_A(M)$, dove A è un'algebra formalmente liscia ed M è un A-bimodulo proiettivo in una categoria monoidale $\mathcal{M}$, è essa stessa un'algebra formalmente liscia in $\mathcal{M}$. Analoghi risultati vengono ottenuti per la coalgebra cotensoriale $T^c_C(M)$, dove C è una coalgebra in $\mathcal{M}$ ed M è un bicomodulo su C. L'introduzione della coalgebra cotensoriale e la dimostrazione di una sua proprietà universale in una categoria monoidale coabeliana $\mathcal{M}$ non sono immediate . Il motivo principale è l'assenza di una nozione di coradicale per coalgebre in $\mathcal{M}$. Pertanto l'approccio utilizzato in ambito monoidale è sostanzialmente diverso da quello classico. Sia l'algebra tensoriale $T_H(M)$ che la coalgebra cotensoriale $T^c_H(M)$ possono essere dotate di una struttura di braided bialgebra laddove H è una braided bialgebra in una categoria monoidale braided $\mathcal{M}$ soddisfacente opportune ipotesi e dove M è un oggetto in ${}^H_H\mathcal{M}^H_H$. Si dimostra una proprietà universale sia per $T_H(M)$ che per $T^c_H(M)$ la quale viene poi applicata alla costruzione di un morfismo di bialgebre

$$F : T_H(M) \to T^c_H(M).$$

L'immagine di questo morfismo è una braided bialgebra che costituisce l'analogo categorico della cosiddetta *bialgebra di tipo uno* introdotta, nel caso classico, da Nichols. La parte H-coinvariante di questa bialgebra prende il nome di *algebra di Nichols*. Le algebre di Nichols sono esempi di braided bialgebre di tipo uno costruite nella categoria monoidale braided ${}^H_H\mathcal{YD}$.

In questa tesi, presentiamo anche una dimostrazione del Teorema di Heyneman-Radford per categorie monoidali [1]. La versione classica di questo teorema (1974) asserisce che un morfismo di K-coalgebre $\sigma : C \to D$ è iniettivo se è iniettivo su $C_0 \wedge_C C_0$ dove C_0 denota il coradicale di C. Questo risultato è uno strumento di notevole rilevanza nella teoria delle algebre di Hopf. Vogliamo mettere in evidenza che la nostra dimostrazione differisce da quella classica e può quindi essere di qualche interesse anche nell'ambito degli spazi vettoriali.

3. – Cenni Storici.

Sia K un campo. La coomologia di Hochschild $\mathrm{H}^*(A, M)$ di una K-algebra A a valori in un A-bimodulo M è stata introdotta da Hochschild (1945) allo scopo di classificare, a meno di un'equivalenza, tutte le estensioni di A con kernel M. Molte altre applicazioni di detta coomologia sono state scoperte dalla sua introduzione. Menzioniamo alcune di queste. Una K-algebra A è detta *separabile* se A è un A-bimodulo proiettivo. Le algebre separabili sono state caratterizzate come quelle algebre A aventi dimensione coomologica zero, vale a dire per cui $\mathrm{H}^1(A,M)=0$, per ogni A-bimodulo M.

L'insieme delle classi di equivalenza delle estensioni di Hochschild di A con kernel M è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathrm{H}^2(A,M)$. In particolare, un'algebra A ha solo estensioni di Hochschild banali esattamente se $\mathrm{H}^2(A,M)=0$, per ogni A-bimodulo M ossia se la sua dimensione coomologica è al più 1. Queste algebre, dette *algebre formalmente lisce* sono state introdotte da Cuntz e Quillen (1995) sotto il nome di algebre quasi-libere e giocano il ruolo di "algebre di funzioni" di una "varietà affine non-commutativa" . Dualmente Jara, Llena, Merino and Stefan (2005) hanno introdotto il concetto di K-coalgebra formalmente liscia caratterizzando poi queste coalgebre tramite opportune proprietà di coestensione.

In [5], la coomologia di Hochschild è stata introdotta nell'ambito delle categorie monoidali (co)abeliane, con particolare attenzione alle proprietà coomologiche delle (co)algebre. Si è altresì dimostrato che tutte le proprietà delle (co)algebre separabili e formalmente lisce che sono state menzionate continuano a valere in questo ambito più generale.

Le applicazioni più significative di questo approccio sono incluse in [3] dove usando una versione categorica del Teorema di Wedderburn-Malcev, sono state caratterizzate le cosiddette bialgebre con la proprietà (dual) Chevalley (vale a dire quelle bialgebre il cui coradicale è una sottoalgebra di Hopf o il cui radicale di Jacobson è un coideale). In [2], sono stati ottenuti altri risultati in termini di (co)algebre formalmente lisce. Detti risultati sono stati applicati per dimostrare che ogni K-algebra di Hopf E connessa in caratteristica zero ha una proiezione debole $\pi : E \to K[x]$, per ogni elemento primitivo non nullo x di E.

Una dimostrazione classica del fatto che l'algebra tensoriale $T_A(M)$ è formalmente liscia se lo è A e se M è un A-bimodulo proiettivo è stata ottenuta da Cuntz e Quillen. L'analogo risultato per la coalgebra cotensoriale, così come introdotta da Nichols (1978), è dovuto a Jara, Llena, Merino and Stefan. In modo naturale ci si può chiedere se tali proprietà abbiano una controparte categorica. Questo ha portato in [5] allo studio delle proprietà coomologiche dell'algebra tensoriale. In [4] la nozione di coalgebra cotensoriale è stata introdotta per un dato bicomodulo su di una coalgebra in una categoria monoidale coabeliana $\mathcal{M}$. Più precisamente, se $\mathcal{M}$ è anche cocompleta, completa e AB5, allora la coalgebra cotensoriale esiste e soddisfa una significativa proprietà universale somigliante a quella classica (dove la nozione di coradicale giocava un ruolo fondamentale). Qui, all'assenza della filtrazione coradicale si è ovviato considerando il limite diretto di una filtrazione costituita di prodotti wedge. In [4], è stata anche studiata la liscezza formale della coalgebra cotensoriale.

Sia H un'agebra di Hopf su di un campo K e sia M un Hopf bimodulo. Allora la sottoalgebra $H[M]$ della coalgebra cotensoriale $T^c_H(M)$ generata da H ed M è una bialgebra. Essa è stata introdotta da Nichols sotto il nome di bialgebra di tipo uno. L'inclusione canonica $\sigma : H \hookrightarrow H[M]$ ha una retrazione $\pi : H[M] \to H$ che è un morfismo di bialgebre. Per mezzo di π e σ è possibile definire un isomorfismo di spazi vettoriali $H[M] \cong R \otimes_K H$ dove

$$R = H[M]^{co(H)} = \{x \in H[M] \quad | \quad \sum x_{(1)} \otimes_K \pi(x_{(2)}) = x \otimes_K 1\} \tag{1}$$

e $\sum x_{(1)} \otimes_K x_{(2)}$ è la notazione di Heynemann-Sweedler per la comoltiplicazione di $H[M]$. R risulta essere una braided bialgebra nella categoria monoidale ${}^H_H\mathcal{YD}$ e prende il nome di algebra di Nichols. Tramite l'isomorfismo in questione, $R \otimes_K H$ acquisisce una strutture di bialgebra dipendente solo da π e σ. Questo è un esempio di bosonizzazione ed è indicato col simbolo $R\#H$. Ora, data una Hopf algebra E il cui coradicale H sia una sottoalgebra di Hopf (ossia E ha la proprietà dual Chevalley), allora la coalgebra graduata associata $gr(E)$ è un'algebra di Hopf il cui coradicale è sempre H. Se $gr(E)$ è generata come algebra dalle sue componenti di grado 0 e 1, allora essa risulta essere una bialgebra di tipo uno. Questa è l'osservazione di partenza del celeberrimo *metodo di sollevamento* di Andruskiewitsch e Schneider: esso consta prima di tutto nell'analizzare $R = gr(E)^{co(H)}$, poi nel trasferire le informazioni ottenute a $gr(E)$ tramite la bosonizzazione e infine nel sollevarle da $gr(E)$ ad E tramite la filtrazione. Il metodo di sollevamento si è rivelato uno strumento efficace nel processo di classificazione delle algebre di Hopf puntate ossia aventi solamente sottocoalgebre semplici che sono unidimensionali.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] ARDIZZONI A., *The Heyneman-Radford Theorem for Monoidal Categories*, J. Algebra, **308** (2007) 63-72.

[2] ARDIZZONI A., *Separable Functors and Formal Smoothness*, submitted. (arXiv:math.QA/0407095)

[3] ARDIZZONI A., MENINI C. e ŞTEFAN D., *A Monoidal Approach to Splitting Morphisms of Bialgebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **359** (2007) 991-1044.

[4] ARDIZZONI A., MENINI C. e ŞTEFAN D., *Cotensor Coalgebras in Monoidal Categories*, Comm. Algebra, **35** (2007) 25-70.

[5] ARDIZZONI A., MENINI C. e ŞTEFAN D., *Hochschild Cohomology and "Smoothness" in Monoidal Categories*, J. Pure Appl. Algebra, **208** (2007) 297-330.

Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
e-mail: alessandro.ardizzoni@unife.it
Dottorato in: Scienze dell'Ingegneria - Curriculum Matematica
(sede amministrativa: Ferrara) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Claudia Menini, Università di Ferrara