Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Ida Del Prete

Metodi numerici efficienti per equazioni integrali di Volterra di tipo Hammerstein

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 215–218.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_215_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 215-218

Metodi numerici efficienti per equazioni integrali di Volterra di tipo Hammerstein

IDA DEL PRETE

Equazioni integrali di Volterra (VIEs) di tipo Hammerstein di convoluzione

$$y(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)g(y(\tau))d\tau \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

sono di notevole interesse nelle scienze applicate, ad esempio in epidemiologia [4], neurofisiologia, teoria del controllo, studio del comportamento di reattori nucleari, si veda [5] e la bibliografia ivi contenuta.

L' integrazione numerica di VIEs è molto onerosa dal punto di vista computazionale a causa della presenza del cosiddetto "lag–term" o "termine di coda". Tale termine contiene tutta la storia passata del fenomeno per cui il suo costo computazionale aumenta avanzando nel tempo, e, in quanto dipendente dal tempo stesso, deve essere ricalcolato per ogni istante temporale.

Lo scopo della tesi è stato quello di costruire metodi numerici efficienti per equazioni del tipo (1) che producano soluzioni accurate con un basso costo computazionale e che catturino le proprietà strutturali del problema. Inizialmente il lavoro di tesi ha riguardato la costruzione e l'analisi di metodi numerici veloci per la risoluzione di equazioni del tipo (1) con trasformata di Laplace del nucleo nota. L' ipotesi di conoscenza della trasformata di Laplace del nucleo non è di certo anomala o limitante. Infatti in numerosi casi casi dato il nucleo è possibile ricavare la sua trasformata di Laplace, ma esistono molti problemi in cui si conosce soltanto la trasformata di Laplace del nucleo. Ciò accade ad esempio nella cinetica di assorbimento chimico, nella determinazione delle non reflecting boundary conditions [6].

I metodi classici per l'integrazione numerica di un'equazione integrale di Volterra su N_t punti di rete richiedono $O({N_t}^2)$ operazioni e $O(N_t)$ impiego di memoria. In letteratura diversi autori si sono occupati di costruire metodi veloci per VIEs, ad esempio sono stati costruiti metodi di tipo Runge-Kutta di ordine $p = 4$ che richiedono $O(N_t(log(N_t))^2)$ operazioni. In questa tesi sono state costruite due classi di metodi veloci basate su formule di tipo collocazione e Runge-Kutta aventi un ordine di accuratezza p comunque elevato e che possono essere implementati con un costo computazionale di $O(N_t log(N_t))$ operazioni e con un impiego di memoria pari a $O(log(N_t))$. La caratteristica principale di tali metodi è quella di sfruttare la conoscenza della trasformata di Laplace del nucleo, il carattere convolutorio dello stesso e l'idea base della formula di quadratura per integrali di convoluzione proposta da Lubich [6] che utilizza il metodo di Talbot per il calcolo dell' antitrasformata di Laplace. L' approssimazione dell'anitrasformata di Laplace si ottiene applicando la formula di quadratura dei trapezi a opportuni contorni di Talbot che appaiono nella formula dell'antitrasformata di Laplace. L'errore di questa formula decresce esponenzialmente con il numero M di nodi di quadratura e dipende dalla distanza delle singolarità della trasformata di Laplace della funzione da invertire dal contorno di Talbot.

Inserendo opportunamente questa formula nella formulazione classica dei metodi di tipo collocazione e Runge-Kutta per VIEs, è stato possibile abbattere parte del costo relativo al calcolo del lag–term, che, come detto, risulta il termine più oneroso dal punto di vista computazionale nell'integrazione numerica di VIEs.

I metodi numerici veloci costruiti tendono ai corrispondenti metodi classici quando la formula di approssimazione dell'antitrasformata di Laplace è esatta, ossia quando M tende ad infinito.

Nella tesi è stata condotta l'analisi della convergenza dei metodi di collocazione e Runge-Kutta veloci pervenendo alla dimostrazione di due teoremi.

Per i metodi Volterra Runge-Kutta veloci il teorema di convergenza è il seguente

TEOREMA 1. – *Sia* $\bar{e}_n$ *l'errore di un metodo Volterra Runge-Kutta veloce. Se le funzioni* f *e* k *sono continue nell'intervallo* $[0, T]$ *e la funzione* g *risulta lipschitziana rispetto a* y*, allora si ha che*

$$\max_{1 \leq n \leq N_t} |\bar{e}_n| = O(h^p) + O(e^{-c\sqrt{M}}),$$

dove p *è l'ordine del corrispondente metodo Volterra Runge-Kutta classico.*

Un teorema analogo è stato dimostrato per i metodi di collocazione veloci. Da tali teoremi si evince che l' ordine di convergenza dei metodi veloci dipende da M, inoltre tale ordine coincide con l'ordine dei corrispondenti metodi classici effettuando una scelta opportuna del paramentro M.

È stata poi anche condotta l'analisi della stabilità dei metodi Volterra Runge-Kutta veloci rispetto all'equazione test di convoluzione

$$y(t) = f(t) + \int_0^t [\lambda + \mu(t - \tau)]y(\tau)d\tau \quad t \in [0, T], \lambda, \mu \in R^-. \tag{2}$$

È stato dimostrato che le regioni di stabilità dei metodi Runge-Kutta veloci dipendono dal numero di nodi di quadratura M fissati sul contorno di Talbot e inoltre che per M che tende ad infinito si ottengono le regioni di stabilità dei metodi classici.

Sono stati condotti numerosi esperimenti numerici su significativi problemi test appartenenti dalla raccolta di problemi "Test Set". I test hanno confermato i risultati teorici sull' accuratezza, efficienza e stabilità dei metodi di collocazione e Runge-Kutta veloci.

Questa parte della ricerca è stata ottenuta in collaborazione con la dott.ssa Dajana Conte dell'Università di Salerno.

I risultati ottenuti sono stati oggetto delle pubblicazioni [2] e [3].

Successivamente il lavoro di tesi ha riguardato la risoluzione numerica efficiente di problemi di diffusione di epidemie di tipo *SIS* a flusso periodico di individui immigranti infetti [4] modellizzati da VIEs del tipo

$$y(t) = f(t) + q(t) + \int_0^t ak(t-\tau)y(\tau)(1-y(\tau))d\tau \qquad t \in [0,T]. \tag{3}$$

La caratteristica di questi problemi, individuata in ambito biomedico, è la recidività della malattia ad intervalli di tempo regolari, che implica che l'equazione (3) ha una soluzione asintoticamente periodica. Un'integrazione numerica efficiente di questo tipo di problemi comporta l'utilizzo di metodi che devono avere la proprietà di riprodurre l'asintotica periodicità della soluzione analitica. A tal fine si è scelto di considerare l'equazione discreta di Volterra corrispondente alla (3)

$$y_n = f_n + \sum_{j=0}^{n} k_{n-j} G(y_j) \qquad n \geq 0 \quad f_n, k_n, y_n \in \boldsymbol{R} \tag{4}$$

e si è dimostrato un teorema sull'esistenza di una soluzione asintoticamente periodica della (4). Inoltre nel caso particolare in cui $G(y) = ay(1-y)$, (caso di notevole interesse nelle applicazioni) è stato dimostrato un teorema che assicura oltre all'esistenza anche l'unicità di una soluzione asintoticamente periodica come afferma il seguente teorema.

TEOREMA 2. – *Se $f(n)$ è una successione limitata e a termini positivi, e $f(n) = q(n) + g(n)$ con $g(n) \to 0$ per $n \to +\infty$ e $q(n)$ successione M-periodica e a termini positivi. Se $\sum_{j=0}^{+\infty} |k(j)| < +\infty$, $G(\cdot)$ è una funzione limitata e uniformemente continua, $k(n)$ è una successione decrescente a termini positivi tale che $k(0) = 1$ e $a > 0$. Se inoltre $\sum_{j=0}^{+\infty} ak(j) > 1$ e $|q| + \dfrac{\sum_{j=0}^{+\infty} ak(j)}{4} \leq \dfrac{1}{2}$ allora l'equazione discreta di Volterra*

$$y_n = f_n + \sum_{j=0}^{n} k_{n-j} y_j (1-y_j) \qquad n \geq 0 \tag{5}$$

possiede un'unica soluzione asintoticamente periodica.

Questi risultati teorici sono stati utilizzati per individuare tra i metodi numerici esistenti quelli che preservano l' asintotica peridicità della soluzione vera. Si è considerata la classe dei $\theta-$metodi e si è dimostrato che essi producono una soluzione numerica asintoticamente periodica quando sono applicati a problemi del tipo (3).

Questa parte della ricerca è oggetto della pubblicazione [1].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] H. Brunner, I. Del Prete e E. Russo, *Asymptotic periodicity of nonlinear Volterra difference equations and applications*, (sottoposto alla rivista J. Comput. Appl. Math.).

[2] D. Conte e I. Del Prete, *Fast collocation methods for Volterra integral equations of convolution type*, J. Comput. Appl. Math. **196/2** (2006), 652-663.

[3] G. Capobianco, D. Conte, I. Del Prete e E. Russo, *Fast Runge-Kutta Methods for nonlinear convolution systems of Volterra Integral Equations*, (in stampa sulla rivista BIT. Numerical Mathematics e pubblicato on-line all'url http://dx.doi.org/10.1007/s10543-007-0120-5).

[4] T. L. Cromer, *Asymptotically periodic solutions of Volterra integral equations in epidemic models*, J. Math. Anal. Appl., **110** (1985), 483-494.

[5] G. Gripenberg, S. O. Londen e O. Staffans, *Volterra integral and functional equations* (1990), Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[6] Ch. Lubich, A. Schädle, *Fast convolution for non-reflecting boundary conditions*, Siam. J. Sci. Comput., **24** (2002), 161-182.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
e-mail: ida.delprete@unina.it
Dottorato in Scienze Computazionali e Informatiche
(sede amministrativa: Università degli Studi di Napoli "Federico II") - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof.ssa Elvira Russo, Università di Napoli "Federico II")