Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Antonio De Nicola

Formulazione geometrica dei principi variazionali in teoria classica del campo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 219–222.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_219_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 219-222

Formulazione geometrica dei principi variazionali in teoria classica del campo

ANTONIO DE NICOLA

1. – Introduzione.

La tesi contiene i primi stadi di un programma di ricerca finalizzato a pervenire ad una formulazione geometrica dei principi variazionali in teoria classica del campo.

Seguendo la linea di pensiero del relatore, espressa nelle pubblicazioni precedenti ([6, 3]) che contengono la struttura concettuale generale e la sua applicazione alla statica e alla dinamica dei sistemi meccanici (si veda anche [1]), si considera il principio dei lavori virtuali, ben noto in statica, come modello concettuale per tutti i principi variazionali della fisica classica. Tale principio stabilisce una condizione necessaria di equilibrio per un sistema statico. Il lavoro parte, dunque, con una dettagliata riformulazione della statica e della dinamica dei sistemi meccanici autonomi in una forma opportuna per la generalizzazione alle teorie di campo. Il ruolo giocato in statica dallo spazio delle configurazioni è assunto in dinamica dallo spazio dei moti. Tale spazio non è una varietà differenziale. Alcune costruzioni basilari di geometria differenziale sono tuttavia possibili. I vettori tangenti ed i covettori possono essere definiti se si seleziona una classe di funzioni ed una classe di curve che sono dichiarate differenziabili. Si formula un principio variazionale di azione virtuale che è l'analogo del principio dei lavori virtuali della statica. Tale principio variazionale è più completo del principio di Hamilton poiché contempla la possibile presenza di impulsi al bordo e forze esterne. Si utilizzano poi i risultati ottenuti in statica e in dinamica come modello concettuale per sviluppare una formulazione geometrica dell'elettrodinamica come importante esempio di teoria di campo.

Si perviene ad una formulazione variazionale intrinseca dell'elettrodinamica in una varietà Lorentziana non necessariamente orientata. L'uso delle forme differenziali di de Rham pari e dispari ([5, 2]) consente una formulazione rigorosa dell'elettrodinamica e la descrizione delle proprietà di trasformazione del campi elettromagnetici relative alle riflessioni (cfr. [4]). Basandosi su un principio variazionale più completo del principio di Hamilton, la formulazione utilizzata conduce ad equazioni di campo con sorgenti esterne. Si ottengono inoltre le relazioni costitutive che in letteratura sono postulate separatamente poiché le variazioni normalmente considerate non sono sufficientemente generali per derivarle dal principio variazionale.

Si interpreta un dominio nello spazio-tempo come una 4-corrente di de Rham dispari. Ciò consente di trattare diversi tipi di problemi al bordo in modo unificato. In particolare si ottiene un agevole passaggio alla versione infinitesima, detta Lagrangiana nella terminologia adottata, usando una corrente avente il supporto costituito da un solo punto. La trasformazione di Legendre e la risultante formulazione Hamiltoniana dell'elettrodinamica concludono il lavoro.

2. – Lo spazio dei campi.

Sia M una varietà differenziale di dimensione 4 munita di una metrica Lorentziana $g : TM \to T^*M$. La varietà M si dirà uno *spazio-tempo*. Lo spazio vettoriale delle q-forme pari e dispari su M saranno denotati rispettivamente da $\Phi^q_e(M)$ e $\Phi^q_o(M)$. Il simbolo $\Phi^q_p(M)$ denoterà uno qualsiasi dei due spazi quando la distinzione non è rilevante. Una *corrente di de Rham pari* o *dispari* di dimensione q on M è una funzione lineare

$$\boldsymbol{c}\colon \Phi^q_p(M) \to \mathbb{R}\colon A \mapsto \int_{\boldsymbol{c}} A.$$

Lo spazio delle 4-correnti di de Rham dispari a supporto compatto in M sarà denotato con $\mathsf{C}M$. Il bordo $\partial\boldsymbol{c}$ di una corrente $\boldsymbol{c}$ è definito assumendo che il Teorema di Stokes valga per tutte le correnti cos come esso vale per i domini.

Si considera l'insieme delle coppie $(A, \boldsymbol{c})$, dove $\boldsymbol{c}$ è una corrente dispari di dimensione 4 in M a supporto compatto ed A è una 1-forma pari $A\colon U \to \wedge^1_e T^*M$ definita in un aperto $U \subset M$ contente il supporto di $\boldsymbol{c}$. La 1-forma A rappresenta il *potenziale elettromagnetico*. Il suo differenziale $F = \mathrm{d}A$ è il *campo elettromagnetico*.

Si introduce poi una una relazione di equivalenza nell'insieme delle coppie menzionato sopra. Le classi di equivalenza sono dette *campi*. Lo spazio dei campi si denota con $\mathsf{Q}(\Phi^1_e(M); \mathsf{C}M)$ o semplicemente Q e la classe di equivalenza di $(A, \boldsymbol{c})$ con $\mathsf{q}(A, \boldsymbol{c})$. Il simbolo q denota un elemento generico di Q. Si prova che un vettore tangente (verticale) allo spazio dei campi è rappresentato da una *variazione* $\delta\mathsf{q}(A, \delta A, \boldsymbol{c})$ definita come la classe di equivalenza, rispetto ad una opportuna relazione di equivalenza, di $(A, \delta A, \boldsymbol{c})$, dove A e δA sono 1-forme (locali) pari definite in un aperto $U \subset M$ e $\boldsymbol{c} \in \mathsf{C}M$. Un covettore è rappresentato da una *fase* $\mathsf{p}(A, G, J, \boldsymbol{c})$ definita come la classe di equivalenza di $(A, G, J, \boldsymbol{c})$, dove A è una 1-forma pari, J è una 3-forma dispari e G è una 2-forma dispari, tutte definite in uno stesso aperto $U \subset M$. Il simbolo $\delta\boldsymbol{Q_c}$ denota lo spazio delle variazioni relative ad una fissata corrente $\boldsymbol{c}$. Lo spazio delle fasi corrispondente è denotato con $\boldsymbol{Ph_c}$. L'accoppiamento bilineare tra fasi e variazioni

$$\langle\ ,\ \rangle_{\boldsymbol{c}}\colon \boldsymbol{Ph_c} \times_Q \delta\boldsymbol{Q_c} \to \mathbb{R}\colon (\boldsymbol{ph}, \delta\boldsymbol{q}) \mapsto \langle \mathsf{p}, \delta\boldsymbol{q}\rangle_{\boldsymbol{c}}$$

definito da

$$\langle \boldsymbol{ph}, \delta\boldsymbol{q}\rangle_{\boldsymbol{c}} = \int_{\boldsymbol{c}} \left(\frac{1}{c^2}\, J \wedge \delta A - \frac{1}{4\pi c}\, \mathrm{d}(G \wedge \delta A) \right),$$

dove $\delta\boldsymbol{q} = \delta\mathsf{q}(A, \delta A, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{ph} = \mathsf{p}(A, G, J, \boldsymbol{c})$, è non degenere e consente di formulare un principio di azione virtuale.

3. – Un principio di azione virtuale per l'elettrodinamica.

L'*azione* è una funzione

$$W\colon Q \to \mathbb{R}\colon \mathsf{q}(A, \boldsymbol{c}) \mapsto \int_{\boldsymbol{c}} L \circ (A, \mathrm{d}A)$$

derivata da una densità Lagrangiana

$$L\colon \wedge_e^1 T^*M \times_M \wedge_e^2 T^*M \to \wedge_o^4 T^*M\colon (a, f) \mapsto -\frac{1}{8\pi c}\langle f, \wedge_e^2 g^{-1}(f)\rangle \sqrt{|g_x|},$$

dove x è il punto di applicazione di (a, f) e $\sqrt{|g_x|}$ è il 4-covettore in x costruito dalla metrica (si veda [4]), mentre il simbolo $\wedge_e^2 g^{-1}$ denota l'applicazione inversa di $\wedge_e^2 g\colon \wedge_e^2 TM \to \wedge_e^2 T^*M$ caratterizzata dall'uguaglianza $\wedge_e^2 g(v_1 \wedge v_2) = g(v_1) \wedge g(v_2)$ valida per i 2-covettori pari riducibili. Una fase $\boldsymbol{ph} = \mathsf{p}(A, G, J, \boldsymbol{c})$ soddisfa il *principio di azione virtuale* se si ha

$$\langle \mathrm{d}W(\boldsymbol{q}), \delta\boldsymbol{q}\rangle - \langle \boldsymbol{ph}, \delta\boldsymbol{q}\rangle_{\boldsymbol{c}} = 0 \tag{1}$$

per ogni *spostamento virtuale* $\delta\boldsymbol{q} = \delta\mathsf{q}(\delta A, \boldsymbol{c}) \in \delta\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{q}}$, dove $\boldsymbol{q} = \mathsf{q}(A, c)$. Per ogni corrente $\boldsymbol{c}$ la *dinamica* associata a $\boldsymbol{c}$ è l'insieme $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{c}} \subset \boldsymbol{Ph}_{\boldsymbol{c}}$ delle fasi $\boldsymbol{ph}$ relative a $\boldsymbol{c}$ che soddisfano il principio di azione virtuale. La *dinamica* è il sottoinsieme $\boldsymbol{D} = \bigcup_{\boldsymbol{c} \in \mathsf{C}\mathbb{R}} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{c}}$ dello *spazio delle fasi* $bPH = \bigcup_{\boldsymbol{c} \in \mathsf{C}\mathbb{R}} \boldsymbol{Ph}_{\boldsymbol{c}}$. La dinamica di un sistema si può presentare anche come l'insieme $\mathcal{D}$ delle *traiettorie nello spazio delle fasi* $(A, G, J)\colon U \to \wedge_e^1 T^*M \times \wedge_o^2 T^*M \times \wedge_o^3 T^*M$ tali che per ogni corrente $\boldsymbol{c}$ la fase $\mathsf{p}(A, G, J, \boldsymbol{c})$ associata a (A, G, J) e $\boldsymbol{c}$ appartiene a $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{c}}$. L'equazione (1) è troppo astratta per essere usata direttamente. Un'espressione più concreta sarà fornita dalla Proposizione 1.

Le *moltiplicazioni interne a sinistra* sono le operazioni

$$\lrcorner\colon \wedge_e^q TM \times \wedge_o^{q'} T^*M \to \wedge_o^{q'-q} T^*M,$$

definite per $q \le q'$ da $\langle w' \lrcorner a, w\rangle = \langle a, w' \wedge w\rangle$.

PROPOSIZIONE 1. – *Una fase* $\boldsymbol{ph} = (\mathsf{q}(A, c), \mathsf{p}(G, J, \boldsymbol{c}))$ *soddisfa il principio di azione virtuale se e solo se l'equazione*

$$\frac{1}{4\pi c}\int_{\boldsymbol{c}} \Big(\mathrm{d}\Big((\wedge_e^2 g^{-1} \circ \mathrm{d}A) \lrcorner \sqrt{|g|}\Big) \wedge \delta A - \mathrm{d}\Big(\Big((\wedge_e^2 g^{-1} \circ \mathrm{d}A) \lrcorner \sqrt{|g|}\Big) \wedge \delta A\Big)\Big)$$
$$= \int_{\boldsymbol{c}} \Big(\frac{1}{c^2} J \wedge \delta A - \frac{1}{4\pi c}\mathrm{d}(G \wedge \delta A)\Big),$$

è soddisfatta per ogni spostamento virtuale $\delta q = \mathsf{q}(\delta A, \boldsymbol{c})$.

Una traiettoria (A, G, J) appartiene alla dinamica $\mathcal{D}$ se e solo se essa soddisfa il principio di azione virtuale per ogni corrente $\boldsymbol{c}$ con supporto contenuto nel suo dominio di definizione. Vi è una caratterizzazione della dinamica delle traiettorie nello spazio delle fasi in termini di equazioni differenziali. Essa è presentata nelle seguenti proposizioni.

TEOREMA 1. – *Una traiettoria* (A, G, J) *appartiene alla dinamica* $\mathcal{D}$ *se e solo se essa soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange*

$$\mathrm{d}\Big((\wedge_e^2 g^{-1} \circ \mathrm{d}A) \lrcorner \sqrt{|g|}\Big) = \frac{4\pi}{c} J \tag{2}$$

e la relazione costitutiva

$$G = \left(\wedge_e^2 g^{-1} \circ \mathrm{d}A\right) \lrcorner \sqrt{|g|}. \tag{3}$$

PROPOSIZIONE 2. – *Una traiettoria nello spazio delle fasi* (A, G, J) *soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange e la relazione costitutiva se e solo se essa soddisfa le equazioni di Maxwell*

$$\mathrm{d}G = \frac{4\pi}{c} J \tag{4}$$

e la relazione costitutiva

$$G = \left(\wedge_e^2 g^{-1} \circ F\right) \lrcorner \sqrt{|g|}, \tag{5}$$

con $F = \mathrm{d}A$.

Come esempio di applicazione della teoria generale si accenna qui solo al caso in cui $\boldsymbol{c}$ rappresenta un dominio compatto $K \subset M$ con bordo liscio ∂K. In tal caso si ottengono i seguenti risultati. Un campo $\boldsymbol{q}(A, K)$ è rappresentato dalla restrizione $A|K$, una variazione $\delta\boldsymbol{q} = \delta\mathsf{q}(A, \delta A, K)$ è rappresentata dalla coppia $(A|K, (\delta A)|K)$ ed una fase $\boldsymbol{ph} = \mathsf{p}(A, G, J, K)$ è rappresentata dalla terna $(A|K, G|\partial K, J|\overset{\circ}{K})$. Dal principio di azione virtuale si deduce la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 3. – *Una fase* $\boldsymbol{ph} = \mathsf{p}(A, G, J, K)$ *appartiene alla dinamica se e solo se soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange*

$$\mathrm{d}\Big(\left(\wedge_e^2 g^{-1} \circ \mathrm{d}A\right) \lrcorner \sqrt{|g|}\Big)|\overset{\circ}{K} = \frac{4\pi}{c} J|\overset{\circ}{K}$$

e la relazione costitutiva

$$G|\partial K = \Big(\left(\wedge_e^2 g^{-1} \circ \mathrm{d}A\right) \lrcorner \sqrt{|g|}\Big)|\partial K.$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] A. DE NICOLA e W. M. TULCZYJEW, *A variational formulation of analytical mechanics in an affine space*, Rep. Math. Phys., **58** (2006), 335-350.
[2] G. DE RHAM, *Variétés Differentiables*, Hermann, Paris (1955).
[3] G. MARMO, W. M. TULCZYJEW e P. URBAŃSKI, *Dynamics of autonomous systems with external forces*, Acta Physica Polonica B, **33** (2002), 1181-1240.
[4] G. MARMO, E. PARASECOLI e W. M. TULCZYJEW, *Space-time orientations and Maxwell's equations*, Rep. Math. Phys., **56** (2005), 209-248.
[5] J. A. Schouten, *Tensor Analysis for Physicists*, Oxford Univ. Press, London (1951.
[6] W. M. Tulczyjew, *The origin of variational principles*, in the volume Classical and quantum integrability (Warsaw, 2001), 41-75, Banach Center Publ., **59**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2003.

Dipartimento di Matematica, Università di Bari
e-mail: antondenicola@gmail.com
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Bari) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Włodzimierz M. Tulczyjew