BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

GIULIA DILEO

Simmetrie su varietà di contatto e varietà almost-S;

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 223–226.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_223_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 223-226

Simmetrie su varietà di contatto e varietà almost-$\mathcal{S}$

GIULIA DILEO

Oggetto di studio della tesi sono le varietà metriche di contatto e una loro generalizzazione costituita dalle varietà almost-$\mathcal{S}$. Sia le varietà metriche di contatto che le varietà almost-$\mathcal{S}$ rientrano nella classe delle f-varietà.

Una *f-struttura* su una varietà differenziabile M^{2n+s} è costituita da un campo tensoriale φ di tipo $(1,1)$ e rango $2n$ tale che $\varphi^3 + \varphi = 0$. L'esistenza di una tale struttura è equivalente alla riducibilità del gruppo di struttura del fibrato tangente al gruppo $U(n) \times O(s)$; diverse classi di queste varietà sono studiate da D. E. Blair in [1]. Per le *varietà almost-$\mathcal{S}$* il gruppo di struttura del fibrato tangente TM è riducibile al gruppo $U(n) \times \{I_s\}$; il sottofibrato $\mathrm{Ker}(\varphi)$ di TM è pertanto parallelizzabile, ed esiste un riferimento globale $\{\xi_1, \ldots, \xi_s\}$, detto caratteristico, per il quale, denotate con $\eta^1, \ldots, \eta^s$ le 1-forme duali dei campi, risulta

$$\varphi^2 = -I + \sum_{i=1}^{s} \eta^i \otimes \xi_i, \quad \eta^i(\xi_j)\delta^i_j, \quad \varphi(\xi_i) = 0, \quad \eta^i \circ \varphi = 0.$$

Data una struttura (φ, ξ_i, η^i) appena descritta, è noto che esistono metriche Riemanniane, dette compatibili, soddisfacenti

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)\eta^i(Y)$$

per tutti i campi vettoriali X e Y. Nel definire una varietà almost-$\mathcal{S}$, si richiede inoltre che il differenziale di ciascuna forma η^i coincida con la 2-forma fondamentale Φ definita da $\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ per tutti i campi vettoriali X e Y. Una varietà almost-$\mathcal{S}$ è normale, e prende il nome di *$\mathcal{S}$-varietà*, se è nullo il campo tensoriale

$$N = [\varphi, \varphi] + 2 \sum_{i=1}^{s} d\eta^i \otimes \xi_i.$$

Per $s = 1$, una varietà almost-$\mathcal{S}$ non è altro che una *varietà metrica di contatto*, mentre una $\mathcal{S}$-varietà è una *varietà di Sasaki* (cf. [2]).

1. – Varietà metriche di contatto localmente simmetriche.

In merito alle varietà metriche di contatto, l'attenzione è focalizzata sul comportamento della struttura rispetto alle simmetrie Riemanniane e, conseguentemente, sul problema della classificazione delle varietà metriche di contatto localmente simmetriche.

Richiamando brevemente i risultati che vanno nella direzione di una tale classificazione, ricordiamo che in dimensione 3 una varietà metrica di contatto localmente simmetrica è piatta, oppure ha curvatura costante 1 e in tal caso la struttura è di Sasaki. In dimensione $2n+1 \geq 5$, sono noti due esempi di varietà metriche di contatto localmente simmetriche: la sfera $S^{2n+1}(1)$ di curvatura 1, con la struttura di Sasaki standard, e il fibrato tangente sferico T_1M di una varietà Riemanniana piatta M di dimensione $n+1 \geq 3$; in questo secondo caso, la varietà Riemanniana T_1M è localmente isometrica al prodotto $E^{n+1} \times S^n(4)$, dove E^{n+1} è lo spazio Euclideo di dimensione $n+1$ e $S^n(4)$ è la sfera n-dimensionale di curvatura 4. Secondo quanto congetturato da D. E. Blair e poi, come vedremo, dimostrato da E. Boeckx e J. T. Cho, questi sono gli unici modelli locali per una varietà metrica di contatto localmente simmetrica di dimensione $2n+1 \geq 5$.

Il caso 5-dimensionale è studiato in [3] da D. E. Blair e J. M. Sierra, i quali provano che una varietà metrica di contatto localmente simmetrica di dimensione 5 è localmente isometrica alla sfera $S^5(1)$, oppure al prodotto $E^3 \times S^2(4)$, oppure ancora al prodotto $H^2(k_1) \times H^2(k_2) \times E^1$, dove $H^2(k_i)$, $i = 1, 2$, è il piano iperbolico di curvatura costante negativa k_i. Questa terza possibilità è esclusa da A. M. Pastore in [9]. Infine, A. Ghosh e R. Sharma provano la congettura di Blair per una varietà metrica di contatto CR-integrabile e localmente simmetrica di dimensione $2n+1 \neq 7$ ([6]).

La tesi contiene alcuni risultati generali sulla curvatura sezionale e sul tensore di Ricci di una varietà metrica di contatto localmente simmetrica di dimensione $2n+1 > 5$. In merito alla decomposizione di de Rham di tali varietà, si prova il seguente

TEOREMA 1. – *Sia M una varietà metrica di contatto localmente simmetrica di dimensione $2n+1 > 5$. Allora M è localmente isometrica alla sfera $S^{2n+1}(1)$, oppure al prodotto $E^{n+1} \times S^n(4)$, oppure a un prodotto Riemanniano $E \times N_1 \times \ldots \times N_k$, dove E è uno spazio Euclideo e $N_1, \ldots, N_k$ sono spazi Riemanniani simmetrici irriducibili di tipo compatto con caratteristica di Eulero-Poincaré nulla.*

Si forniscono, inoltre, restrizioni sulla dimensione del fattore Euclideo e sul numero dei fattori irriducibili. Questi risultati permettono di classificare le varietà metriche di contatto localmente simmetriche di dimensione 7.

TEOREMA 2. – *Sia M^7 una varietà metrica di contatto localmente simmetrica di dimensione 7. Allora M^7 è localmente isometrica a $S^7(1)$ o $E^4 \times S^3(4)$.*

Recentemente, E. Boeckx e J. T. Cho hanno dimostrato la congettura di Blair per una qualunque dimensione ([4]). Tuttavia, come sostenuto dagli stessi autori, il metodo di dimostrazione utilizzato, di carattere strettamente computazionale, non fornisce una spiegazione esauriente del motivo per cui le strutture geometriche in oggetto siano rigide rispetto alle simmetrie Riemanniane. Sarebbe auspicabile fornire una dimostrazione del risultato che coinvolga in maniera più significativa le proprietà geometriche delle varietà, quali la curvatura Riemanniana e la topologia. La dimostrazione del Teorema 1 segue questo tipo di approccio.

2. – Varietà almost-$\mathcal{S}$ e simmetrie *CR*.

Le varietà almost-$\mathcal{S}$ possono essere riguardate come *CR-spazi Hermitiani*. Una varietà almost-$\mathcal{S}$, con struttura $(\varphi, \xi_i, \eta^i, g)$, ammette struttura quasi *CR* data dal sottofibrato $DM = \mathrm{Im}(\varphi)$ del fibrato tangente e dall'endomorfismo $J = \varphi|_{DM}$. Il sottofibrato $\mathrm{Ker}(\varphi)$ di TM coincide con il complemento ortogonale di DM rispetto a g, e il rango s di tale fibrato prende il nome di codimensione *CR*, o semplicemente codimensione, della varietà.

Nella seconda parte della tesi vengono studiate le $\mathcal{S}$-varietà di codimensione maggiore di 1, con particolare attenzione alle loro proprietà di simmetria. I relativi risultati sono pubblicati in [5].

Si prova che una $\mathcal{S}$-varietà di codimensione $s \geq 2$ è localmente un prodotto $N \times \mathbb{R}^{s-1}$, dove N è una *CR*-sottovarietà Hermitiana di codimensione 1. Questo risultato permette di classificare le $\mathcal{S}$-varietà complete e semplicemente connesse: a meno di isometrie *CR*, queste sono i prodotti $M = N \times \mathbb{R}^{s-1}$, dove $(N, \varphi, \xi, \eta, g)$ è uno spazio di Sasaki completo. La varietà M risulta essere una varietà *CR* di codimensione s, munita della metrica prodotto $h = g_1 \oplus g_2$, dove g_2 è la metrica standard su $\mathbb{R}^{s-1}$ e g_1 è una opportuna metrica su N. Ne deriva il seguente

TEOREMA 3. – *Una $\mathcal{S}$-varietà semplicemente connessa di codimensione $s \geq 2$ non è compatta.*

È opportuno osservare che il caso delle varietà di Sasaki è differente, poiché tutte le sfere di dimensione dispari possiedono una struttura di Sasaki. In realtà, la geometria delle $\mathcal{S}$-varietà di codimensione maggiore di 1 può essere molto diversa da quella delle varietà di Sasaki. In questo senso, D. E. Blair ha ottenuto risultati interessanti in [1], provando, per esempio, che non esistono $\mathcal{S}$-varietà di curvatura costante $k > 0$ e codimensione $s \geq 2$.

Per quanto riguarda le proprietà di simmetria delle $\mathcal{S}$-varietà, nella tesi si fa riferimento alla nozione di *spazio CR-simmetrico* introdotta da W. Kaup e D. Zaitsev in [7]. Un *CR*-spazio Hermitiano (M, DM, J, g) è detto *CR*-simmetrico se ogni punto x di M ammette una *CR*-simmetria σ_x. Una tale simmetria è un *CR*-diffeomorfismo isometrico avente x come punto fisso e il cui differenziale $d\sigma_x$ coincide con $-Id$ sul sottospazio $D_xM \oplus (\mathcal{D}_\infty(x))^\perp$ dello spazio tangente T_xM, dove $\mathcal{D}_\infty$ è l'algebra di Lie dei campi vettoriali differenziabili generata dalle sezioni del sottofibrato analitico

DM di TM. Per le varietà di Sasaki, la definizione di Kaup e Zaitsev coincide con la nozione di *spazio φ-simmetrico* (cf. [2]). Con questa terminologia, la classificazione precedente dà luogo al seguente

TEOREMA 4. – *A meno di isometrie CR, le $\mathcal{S}$-varietà CR-simmetriche e semplicemente connesse di codimensione $s \geq 2$ sono tutti i prodotti CR del tipo $N \times \mathbb{R}^{s-1}$, dove (N, DN, J, g) è uno spazio di Sasaki φ-simmetrico semplicemente connesso, e $N \times \mathbb{R}^{s-1}$ è munito della metrica prodotto della metrica piatta standard su $\mathbb{R}^{s-1}$ e della metrica g_1 su N definita da*

$$\forall X, Y \in DN \quad g_1(X, Y) = g(X, Y), \quad g_1(X, \xi) = 0, \quad g_1(\xi, \xi) = s.$$

Introdotta la nozione di spazio *localmente CR*-simmetrico, generalizzando un risultato che caratterizza gli spazi di Sasaki localmente φ-simmetrici, si prova che una $\mathcal{S}$-varietà di codimensione qualunque è localmente CR-simmetrica se e solo se $\tilde{\nabla}\tilde{R} = 0$, dove $\tilde{\nabla}$ è una connessione lineare canonicamente associata a un riferimento caratteristico, detta *connessione di Tanaka-Webster* (cf. [8]).

Questo risultato non è valido per le varietà almost-$\mathcal{S}$ non normali. Si forniscono, infatti, esempi di varietà non normali per le quali la condizione $\tilde{\nabla}\tilde{R} = 0$ e la CR-simmetria locale sono indipendenti.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] D. E. BLAIR, *Geometry of manifolds with structural group $U(n) \times O(s)$*, J. Differential Geom., **4** (1970), 155-167.

[2] D. E. BLAIR, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics **203**, Birkhäuser, Boston (2002).

[3] D. E. BLAIR e J. M. SIERRA, *5-dimensional locally symmetric contact metric manifolds*, Boll. Unione Mat. Ital. (7), **7**-A (1993), 299-311.

[4] E. BOECKX e J. T. CHO, *Locally symmetric contact metric manifolds*, Monatsh. Math., **148**, no. 4 (2006), 269-281.

[5] G. DILEO e A. LOTTA, *On the structure and symmetry properties of almost $\mathcal{S}$-manifolds*, Geom. Dedicata, **110**, no. 1 (2005), 191-211.

[6] A. GHOSH e R. SHARMA, *On contact strongly pseudo-convex integrable CR manifolds*, J. Geom, **66** (1999), 116-122.

[7] W. KAUP e D. ZAITSEV, *On symmetric Cauchy-Riemann manifolds*, Adv. Math., **149**, no. 2 (2000), 145-181.

[8] A. LOTTA e A. M. PASTORE, *The Tanaka-Webster connection for almost $\mathcal{S}$-manifolds and Cartan geometry*, Arch. Math. (Brno), **40**, no. 1 (2004), 47-61.

[9] A. M. PASTORE, *Classification of locally symmetric contact metric manifolds*, Balkan J. Geom. Appl., **3**, no. 1 (1998), 89-96.

Dipartimento di Matematica, Università di Bari
e-mail: dileo@dm.uniba.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Bari) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof.ssa Anna Maria Pastore, Università di Bari