Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marco Donatelli

Deconvoluzione di immagini e metodi multigrid

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 227–230.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_227_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 227-230

Deconvoluzione di immagini e metodi multigrid

MARCO DONATELLI

1. – Introduzione.

La ricostruzione di immagini sfuocate ed affette da rumore è un ambito di vasto interesse sia militare sia civile con applicazioni in astronomia, medicina, biologia, etc. L'immagine sfuocata è generata dalla convoluzione tra il vero scenario e la funzione di sfuocamento di un singolo punto (PSF), che in molte applicazioni può essere considerata con buona approssimazione indipendente dalla posizione. Infine l'immagine osservata è solitamente affetta da errori di misurazione, trasmissione, etc., indicati con un generico termine di rumore.

Siano $\boldsymbol{g} = \mathrm{vec}(G)$ e $\boldsymbol{f} = \mathrm{vec}(F)$, dove G è l'immagine osservata, F è l'immagine "vera" $n \times n$ (si considerano immagini quadrate solo per semplicità) e l'operatore $\mathrm{vec}(\,\cdot\,)$ trasforma una matrice in un vettore concatenandone le colonne. Sia B la matrice che rappresenta la discretizzazione dell'operatore corrispondente alla PSF, l'invarianza per traslazione della PSF si traduce in una struttura Toeplitz bilivello per B. Inoltre, poiché per le immagini osservate le misurazioni vicine ai bordi dipendono dai dati al difuori della regione di osservazione, la matrice B è rettangolare con più colonne che righe. Quindi, l'immagine sfuocata ed affetta da rumore è ottenuta mediante il seguente sistema lineare sottodeterminato

$$\boldsymbol{g} = B\tilde{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{u}, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{u}$ denota il rumore, $\tilde{\boldsymbol{f}} = \mathrm{vec}(\tilde{F})$ e $\tilde{F}$ è la scena originale più amplia di F e G e contenente nella sua parte centrale F.

La struttura di B suggerisce l'utilizzo di algoritmi basati sulla FFT a causa delle elevate dimensioni che il sistema lineare (1) può raggiungere (ad esempio 2^{20} equazioni). Poiché il fatto che B è rettangolare può essere di intralcio nell'utilizzo di trasformate trigonometriche veloci, un approccio standard per evitare tali problemi si basa sull'imposizione a priori di condizioni al contorno (CC) su F. Le CC sono definite mediante una dipendenza funzionale tra gli elementi al difuori della finestra di osservazione e quelli interni alla stessa. In questo modo si ottiene una matrice A quadrata $n^2 \times n^2$ al posto della matrice B in (1). Una scelta appropriata delle CC dovrebbe garantire due proprietà cruciali: precisione della ricostruzione specialmente vicino ai bordi e basso costo computazione. Le CC classiche permettono solitamente di utilizzare trasformate trigonometriche discrete per ottenere l'immagine ricostruita, garantendo così un basso costo computazionale. Ad esempio, nel caso di CC periodiche la matrice A è circolante bilivello e diagonalizzabile mediante trasformate discrete di Fourier, nel caso di CC zero

Dirichlet A è Toeplitz bilivello, nel caso di CC riflettenti A ha una struttura Toeplitz più Hankel ad entrambi i livelli e se la PSF è simmetrica rispetto ad ogni direzione, allora A è diagonalizzabile mediante trasformate discrete di coseni di tipo III.

In generale non è garantito che la soluzione di (1) esista o sia unica anche nel caso in cui siano imposte particolari CC. Quindi un approccio largamente utilizzato consiste nel cercare una soluzione nel senso dei minimi quadrati, dove l'immagine ricostruita è ottenuta risolvendo $\boldsymbol{f}_{\mathrm{LS}} \min_{\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^{n^2}} \| A\boldsymbol{z} - \boldsymbol{g} \|_2^2$. È noto che si tratta di un problema lineare inverso malposto, si ha quindi la necessità di ricorrere a tecniche di regolarizzazione. In questo lavoro sono considerate due tecniche classiche: regolarizzazione alla Tikhonov e mediante metodi iterativi regolarizzanti. La regolarizzazione alla Tikhonov è ottenuta riformulando il precedente problema di minimo come $\min_{\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^{n^2}} \{\|A\boldsymbol{z} - \boldsymbol{g}^2 + \mu\|L\boldsymbol{z}^2\}$, dove L è scelta fra l'identità ed un operatore differenziale di ordine basso, e $\mu > 0$ è il parametro di regolarizzazione. Metodi iterativi regolarizzanti sono solitamente metodi di minimizzazione del gradiente applicati alle equazioni normali $A^T A\boldsymbol{z} A^T \boldsymbol{g}$. Il parametro di regolarizzazione in tal caso è l'iterazione a cui arrestare il metodo, in quanto si osserva un andamento dell'errore di ricostruzione inizialmente descrescente fino a raggiungere un punto di minimo per poi cominciare a crescere a causa degli effetti del rumore.

Nel lavoro di tesi da cui sono tratte queste note sono trattati in particolare i seguenti argomenti: analisi multidimensionale delle CC antiriflettenti sia da un punto di vista computazionale che della qualità dell'immagine ricostruita, studio di metodi multigrid per matrici con struttura in algebra (circolante, coseni, etc.) o Toeplitz tali da essere utilizzati o come risolutori veloci per il sistema lineare derivante dalla regolarizzazione alla Tikhonov oppure come metodi iterativi regolarizzanti. Per semplicità e brevità nel seguito tratteremo solo il caso 1D (segnali), rimandando alla corrispondente tesi per la trattazione completa del caso multidimensionale.

2. – CC antiriflettenti.

Sia $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ il segnale "vero", l'antiriflessione si ottiene mediante

$$f_{1-j} = 2f_1 - f_{j+1}, \qquad f_{n+j} = 2f_n - f_{n-j}, \tag{2}$$

per $j \in \boldsymbol{N}$. Sia $h(x) = \sum_{k=-m}^{m} h_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ la funzione generatrice della PSF, allora imponendo le condizioni (2) la matrice A assume la forma

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} z_0 & \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \\ z_1 & & z_{-m} \\ \vdots & \hat{A} & \vdots \\ z_m & & z_{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}^T & z_0 \end{array}\right], \tag{3}$$

dove $z_i = h_i + 2\sum_{k=i+1}^{m} h_k$ per $i = 0, \ldots, m$, mentre $z_i = h_i + 2\sum_{k=-m}^{i-1} h_k$ per $i = -m, \ldots, -1$ e

$$\hat{A} = T_{n-2}(h) - H(\sigma^2(\boldsymbol{u}), J\sigma^2(\boldsymbol{v})), \tag{4}$$

con $\boldsymbol{u} = (h_0, h_1, \ldots, h_m, 0, \ldots, 0)^T$, $\boldsymbol{v} = (h_0, h_{-1}, h_{-m}, 0, \ldots, 0)^T$, $T_{n-2}(h)$ la matrice di Toeplitz di ordine $n-2$ generata dal simbolo h e $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ la matrice Hankel avente $\boldsymbol{x}$ nella prima colonna e $\boldsymbol{y}$ nell'ultima. Dalla (4) se la PSF è simmetrica allora $\hat{A}$ può essere diagonalizzata mediante trasfomate discrete di seni di tipo I (DST-I).

Dal punto di vista computazionale il prodotto A per un vettore può essere calcolato sempre in $O(n \log(n))$ mediante FFT, mentre un sistema lineare con matrice dei coefficienti A può essere risolto in $O(n \log(n))$ mediante DST-I soltanto nel caso di PSF simmetrica. Inoltre le matrici con struttura (3) definiscono un'algebra che purtroppo non è chiusa per trasposizione. Nei metodi regolarizzanti presentati nella sezione precedente è sempre presente A^T che crea quindi problemi computazionali, non permettendo più di ricorrere alla DST-I neppure quando la PSF è simmetrica. È stata così proposta una strategia detta di reblurring [5], che consiste nel sostituire l'operatore di trasposizione con quello di correlazione. Invece di A^T si considera la matrice A' ottenuta imponendo le CC alla PSF ruotata di 180 gradi. Tale operazione corrispondere a ricorrere alle equazioni normali sul problema infinito dimensionale e discretizzando successivamente ogni singolo operatore separatamente, a differenza di quanto viene fatto usualmente discretizzando prima il problema infinito dimensionale e poi passando successivamente alle equazioni normali. In tal modo, avendo A' struttura (3), si superano i problemi computazionali ed a parità di costo computazionale otteniamo ricostruzioni qualitativamente migliori rispetto alle CC riflettenti [4].

3. – Multigrid per matrici con struttura in algebra o Toeplitz.

Metodi multigrid per matrici in algebra tau (matrici diagonalizzabili mediante DST-I) e Toeplitz sono presenti in letteratura a partire dai primi anni 90. In questo lavoro si considera la loro applicazione a problemi di ricostruzione di immagini, ma non solo, nel caso in cui il simbolo è un polinomio trigonometrico pari che si annulla in un punto con ordine finito. Sotto tali ipotesi la matrice assume una struttura a banda per n sufficientemente elevato. Si studia la loro applicazione sia in combinazione con la regolarizzazione alla Tikhonov che come metodi iterativi regolarizzanti.

Nel caso della regolarizzazione alla Tikhonov, si tratta di risolvere il sistema lineare ad essa associata con il minore costo computazionale possibile [3]. In tale direzione si forniscono delle condizioni leggermente più stringenti rispetto a quelle presenti in letteratura al fine di ottenere un multigrid "ottimale" anche nel caso del V-cycle e una sola iterazione di uno smoother semplice come ad esempio Jacobi [2, 1]. Con il termine "ottimale" si definisce un metodo iterativo che per risolvere un sistema lineare richiede un costo computazionale proporzionale a quello richiesto per il prodotto matrice-vettore con la stessa matrice dei coefficienti. La condizione leggermente più stringente consiste nel richiedere un proiettore più potente rispetto al passato, in particolare per zeri di ordine superiore a due. Per dare un'idea di tale scelta, considerando il simbolo della matrice dei coefficienti $f(x) = (1 - \cos(x_0))^q \phi(x)$, dove $x_0 \in [0, \pi]$ e $\phi(x) > 0 \ \forall x \in [0, \pi]$, si può dimostrare l'ottimalità scegliendo ad esempio come simbolo del proiettore $p(x) = (1 + \cos(x_0))^q$.

I metodi multigrid precedenti permettono di ottenere un risolutore per sistemi lineari particolarmente veloce in quanto proiettano il problema nel sottospazio malcondizionato dove i metodi iterativi classici (smoother) non riescono ad essere efficaci. Applicando tali metodi a problemi di ricostruzione di immagini, già dopo la prima iterazione la soluzione viene corrotta dal rumore in quanto proiettando il problema nel sottospazio malcondizionato il rumore viene subito amplificato. Al fine di ottenere un metodo multigrid regolarizzante, si fanno le stesse scelte per preservare la struttura, ma si sceglie diversamente il simbolo del proiettore in modo tale da proiettare il problema nel sottospazio bencondizionato [6]. Tale scelta rallenta la convergenza del metodo ma permette di ritardare l'amplificazione dell'errore di ricostruzione dovuto al rumore. Come prima operazione si proietta nelle basse frequenze, dove viene poi applicato un metodo iterativo regolarizzante classico come smoother ed infine si richiama ricorsivamente la procedura multigrid. Confrontando i risultati ottenuti con quelli del metodo iterativo regolarizzante utilizzato come smoother si ha solitamente un minore costo computazionale con una scelta più agevole del parametro di regolarizzazione. Tale schema multigrid è quindi un framework generale che può essere utilizzato per migliorare le proprietà regolarizzanti di un metodo iterativo regolarizzante inserendolo come smoother all'interno del multigrid.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] A. Aricò e M. Donatelli, *A V-cycle Multigrid for multilevel matrix algebras: proof of optimality*, Numer. Math., **105**, no. 4 (2007), 511-547.

[2] A. Aricò, M. Donatelli e S. Serra Capizzano, *V-cycle optimal convergence for certain (multilevel) structured linear systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **26**, no. 1 (2004), 186-214.

[3] M. Donatelli, *A Multigrid for image deblurring with Tikhonov regularization*, Numer. Linear Algebra Appl., **12** (2005), 715-729.

[4] M. Donatelli, C. Estatico, A. Martinelli, e S. Serra Capizzano, *Improved image deblurring with anti-reflective boundary conditions and re-blurring*, Inverse Problems, **22** (2006), 2035-2053.

[5] M. Donatelli e S. Serra Capizzano, *Anti-reflective boundary conditions and re-blurring*, Inverse Problems, **21** (2005), 169-182.

[6] M. Donatelli e S. Serra Capizzano, *On the regularizing power of multigrid-type algorithms*, SIAM J. Sci. Comput., **27**, no. 6 (2006), 2053-2076.

Dipartimento di Fisica e Matematica, Università dell'Insubria
e-mail: marco.donatelli@uninsubria.it
Dottorato in Matematica e Statistica per le Scienze Computazionali
(sede amministrativa: Università di Milano) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Stefano Serra Capizzano, Università dell'Insubria