Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Michela Eleuteri

Alcune equazioni alle derivate parziali con isteresi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 235–238.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_235_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 235-238

Alcune equazioni alle derivate parziali con isteresi

MICHELA ELEUTERI

Lo scopo della mia tesi di dottorato è stato quello di dimostrare alcuni risultati riguardanti certe nuove classi di equazioni alle derivate parziali contenenti un operatore di isteresi continuo. Ho cercato di focalizzare la mia attenzione sulla buona positura dei miei modelli, lavorando, quando possibile, con differenti tipi di condizioni al bordo. Sono inoltre riuscita a stabilire anche un risultato di comportamento asintotico per una classe di E.D.P. di tipo parabolico.

1. – Cos'è l'isteresi?

L'isteresi è un fenomeno che si può riscontrare in molteplici situazioni, come ad esempio in plasticità, in ferromagnetismo o nelle transizioni di fase.

Benché il concetto di isteresi sia stato conosciuto sin dalla fine del XVIII secolo, è stato solo circa 35 anni fa che un piccolo gruppo di matematici russi ha introdotto il concetto di operatore di isteresi e ha iniziato una sistematica analisi delle sue proprietà. Il punto di partenza può essere senz'altro fissato nell'importante monografia di Krasnosel'skiĭ and Pokrovskiĭ [3]; da quel momento la ricerca matematica sull'isteresi si è considerevolmente sviluppata e molti interessanti risultati sono stati raggiunti; a testimonianaza di questo è possibile citare le numerose monografie che trattano di questo argomento, assieme alle referenze in esse contenute, per esempio quella di Brokate e Sprekels [1], quella di Krejčí [4] o quella di Visintin [5].

Si può illustrare il concetto dell'isteresi per mezzo di un esempio molto semplice. Supponiamo di considerare una sorta di scatola nera che trasforma una variabile u dipendente dal tempo in maniera continua in una variabile w anch'essa dipendente dal tempo. u viene anche spesso detta *input* mentre w viene chiamata *output*. Per fare un paio di esempi, nel ferromagnetismo u corrisponde al campo magnetico H e w all'induzione magnetica B; oppure in plasticità, u può essere identificato col tensore delle forze ε mentre w può rappresentare invece il tensore degli stress σ.

Ad ogni istante t, $w(t)$ dipende dall'evoluzione dell'input u e dallo stato iniziale del sistema, o più in generale, da una variabile η^0 che contiene tutte le informazioni riguardo lo stato iniziale. Quindi lo stato del sistema può essere descritto da un operatore del seguente tipo

$$\mathcal{F} : C^0([0,T]) \times X \to C^0([0,T]) \qquad w(t) = [\mathcal{F}(u, \eta^0)](t) \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

con X opportuno spazio metrico. Si parla di *effetto di memoria* quando ad ogni istante

t l'output $w(t)$ non è semplicemente determinato dal valore di $u(t)$ allo stesso istante, ma dipende anche da tutta la precedente evoluzione di u. Si parla invece di *indipendenza dalla velocità* quando il cammino della coppia $(u(t), w(t))$ è invariante rispetto ad ogni omeomorfismo (nel tempo) crescente, in altre parole quando non c'è dipendenza dalla derivata di u. Questo fatto è quello che permette di disegnare i caratteristici cicli di isteresi nel piano (u, w). Gli operatori che manifestano l'effetto di memoria sono chiamati *operatori di memoria (o operatori di Volterra)*, mentre quelli che soddisfano entrambe le proprietà sono detti *operatori di isteresi*.

2. – Prima classe di equazioni alle derivate parziali con isteresi.

La prima classe di E.D.P. che ho studiato è stata la seguente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{G}(u)\right) = f \qquad \text{in } \Omega \times (0, T), \tag{1}$$

con Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^2$, $\triangle$ operatore di Laplace, $\mathcal{G}$ opportuno operatore di isteresi e f funzione data. Questa equazione può essere ottenuta accoppiando:

– *le equazioni di Maxwell e la legge di Ohm*, che vengono considerate sotto restrittive ipotesi sulla geometria del sistema, da cui deriva il carattere scalare della nostra equazione modello e la presenza dello spazio $\mathbb{R}^2$ invece dello spazio $\mathbb{R}^3$ atteso;

– *la seguente relazione costitutiva* $H = \mathcal{G}(B) + \lambda \dfrac{\partial B}{\partial t}$ tra B e H (rispettivamente l'induzione magnetica e il campo magnetico, che sono scalari per le ipotesi che abbiamo fatto). Qui $\mathcal{G}$ è un opportuno operatore di isteresi mentre $\lambda > 0$ è una costante data. Questa relazione può per esempio essere ottenuta combinando in serie un elemento ferromagnetico con isteresi assieme a un solenoide riempito di materiale paramagnetico.

Prima di tutto ho introdotto una formulazione debole negli spazi di Sobolev per un problema di Cauchy associato a (1); sotto opportune ipotesi sull'operatore di isteresi ho ottenuto un risultato di esistenza e unicità. La dimostrazione di questo risultato è portata avanti per mezzo di una tecnica che è basata su un risultato di punto fisso; ho incontrato diverse difficoltà soprattutto a causa della scelta non usuale degli spazi funzionali. Una volta ottenuta l'unicità della soluzione, si ottiene piuttosto facilmente la dipendenza Lipschitziana della soluzione dai dati. In seguito ho ottenuto un risultato di ulteriore regolarità basato su una classica caratterizzazione degli spazi di Sobolev $H^1(\Omega)$ e $H^1_0(\Omega)$.

3. – Seconda classe di equazioni alle derivate parziali con isteresi.

La seconda classe di E.D.P. studiata è stata

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + \mathcal{F}(u)) + \vec{v} \cdot \nabla(u + \mathcal{F}(u)) - \triangle u = f \qquad \text{in } \Omega \times (0, T), \tag{2}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $\triangle$ è l'operatore di Laplace, $\mathcal{F}$ è un opportuno operatore di isteresi, $\vec{v} : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^N$ e f sono funzioni date.

Questa classe di E.D.P. differisce dal modello più usuale grazie alla presenza del termine convettivo $\vec{v} \cdot \nabla(u + \mathcal{F}(u))$ e può essere usata per modellizzare fenomeni che sorgono in idraulica dei terreni o in magnetoidrodinamica.

Anche in questo caso ho introdotto una formulazione debole negli spazi di Sobolev per un problema di Cauchy associato a (2); sotto opportune ipotesi dell'operatore di isteresi $\mathcal{F}$ sono riuscita a trovare risultati di esistenza, lavorando con diverse condizioni al bordo. La tecnica utilizzata è questa volta basata sull'approssimazione del problema tramite discretizzazione temporale, stime a priori e passaggio al limite per compattezza. Questa tecnica di approssimazione è decisamente conveniente nell'analisi di equazioni che includono operatori di isteresi, dato che, ad ogni passo all'interno della discretizzazione temporale, si deve risolvere un problema stazionario in cui l'operatore di isteresi si riduce a una funzione non lineare.

Sono inoltre riuscita a provare un teorema di unicità per una opportuna sottoclasse di operatori di isteresi, un teorema di dipendenza della soluzione dai dati e un ulteriore risultato di esistenza attraverso quello che in letteratura viene spesso chiamato “metodo di regolarizzazione iperbolica”.

4. – Due sistemi di equazioni alle derivate parziali con isteresi.

Successivamente mi sono occupata dell'analisi di due sistemi di E.D.P. contenenti di nuovo un operatore di isteresi continuo, più precisamente ho lavorato con

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(u + w) - \triangle u = f \\ \lambda \dfrac{\partial w}{\partial t} + w = \mathcal{F}(u) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(u + w) - \triangle u = f \\ w = \mathcal{F}\left(u - \lambda \dfrac{\partial w}{\partial t}\right) \end{cases}$$

in $\Omega \times (0, T)$, dove $\mathcal{F}$ è un operatore di isteresi continuo, Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $\triangle$ è l'operatore di Laplace, f è una funzione data mentre $\lambda > 0$ è un'opportuna costante. Entrambi i sistemi sono caratterizzati dal fatto che la relazione costitutiva $w = \mathcal{F}(u)$ viene perturbata in due modi, rispettivamente $\lambda w_t + w = \mathcal{F}(u)$ e $w = \mathcal{F}(u - \lambda w_t)$, con la presenza di un termine di rilassamento $\lambda\, w_t$. Per entrambi i sistemi, che sorgono nel contesto dei processi elettromagnetici, ho ottenuto risultati di esistenza.

5. – Comportamento asintotico per una classe di equazioni alle derivate parziali con isteresi e condizioni al bordo di Neumann.

La mia attenzione si è quindi rivolta allo studio del comportamento asintotico per soluzioni di un problema associato all'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + \mathcal{F}(u)) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{per } (x, t) \in I \times (0, +\infty), \tag{3}$$

dove I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e $\mathcal{F}$ è un operatore di isteresi continuo.

Dopo aver introdotto una formulazione debole negli spazi di Sobolev per un problema di Cauchy (con condizioni al bordo di Neumann omogenee) associato a (3) e aver controllato che l'unica soluzione del mio problema vive in effetti in $I \times (0, +\infty)$, ho provato una stima di decadimento esponenziale in $L^2(I)$ per la funzione $\partial_x u$, per $t \to +\infty$. Questo risultato non è ovviamente sufficiente per dedurre un decadimento esponenziale anche per la soluzione u, dato che stiamo considerando condizioni al bordo di Neumann e quindi non è più valida la disuguaglianza di Poincaré. Tuttavia è stato possibile provare che la soluzione u converge puntualmente per $t \to \infty$ a una costante u_∞, cioè $\lim_{t \to \infty} u(x, t) = u_\infty$ per ogni $x \in I$. Il risultato è atteso, tenendo conto del significato fisico dell'equazione modello (infatti (3) può essere interpretata come il bilancio locale di liquido in un mezzo poroso e considerare condizioni al bordo di Neumann omogenee significa richiedere che non ci sia flusso di liquido attraverso la superificie); è quindi naturale aspettarsi che, dopo un certo lasso di tempo, la situazione tenda a una configurazione di equilibrio. La dimostrazione di questo fatto tuttavia è piuttosto complicata perché lo spazio degli stati del processo descritto da (3) consiste non solo di tutte le distribuzioni spaziali ammissibili per u ma anche di tutte le configurazioni di memoria (dipendenti dallo spazio) ammissibili per l'operatore di isteresi considerato. In pratica, oltre alla variabile spaziale $x \in I$ e a quella temporale $t > 0$, un'altra variabile ($r > 0$, detta variabile di memoria) entra in gioco e rende l'analisi asintotica molto complicata.

La generalizzazione di questi risultati a più variabili spaziali è stata ottenuta in [2] in collaborazione con Pavel Krejčí.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] M. Brokate e J. Sprekels, *Hysteresis and phase transitions*, Applied Mathematical Sciences, **121**, Springer-Verlag, New York (1996).

[2] M. Eleuteri e P. Krejčí, *Asymptotic behaviour of a Neumann parabolic problem with hysteresis*, ZAMM - Z. Angew. Math. Mech., **87**, no. 4 (2007), 261-277.

[3] M.A. Krasnosel'ski e A.V. Pokrovski, *Systems with hysteresis*, Springer, Berlin (1989), Russian edition: Nauka, Moscow (1983).

[4] P. Krejčí: *Hysteresis, convexity and dissipation in hyperbolic equations*, Gakuto Int. Ser. Math. Sci. Appl., Vol. **8**, Gakkōtosho, Tokyo, (1996).

[5] A. Visintin: *Differential models of hysteresis*, Springer (1994).

Dipartimento di Matematica, Università di Trento
e-mail: eleuteri@science.unitn.it
Dottorato di Ricerca in Matematica
(sede amministrativa: Università di Trento) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Augusto Visintin (Dipartimento di Matematica, Università di Trento)