# Bollettino Unione Matematica Italiana

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*



Francesca Gardini


## Stime a posteriori dell'errore per problemi agli autovalori in forma mista


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 243–245.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_243_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 243-245

# Stime a posteriori dell'errore per problemi agli autovalori in forma mista

FRANCESCA GARDINI

## 1. – Introduzione.

Nell'ultimo ventennio si è assistito ad un crescente interesse per le stime dell'errore a posteriori e i raffinamenti adattivi per l'approssimazione mediante elementi finiti di equazioni alle derivate parziali che derivano da applicazioni fisiche e ingegneristiche.

Lo scopo è quello di ottenere una soluzione numerica con una certa accuratezza con il minimo sforzo computazionale.

Le stime a priori dell'errore, fornite dalla classica analisi dell'errore per il metodo degli elementi finiti, forniscono infatti informazioni solo sul comportamento asintotico dell'errore e dipendono fortemente dalla regolarità della soluzione. In particolare, in presenza di singolarità quali angoli rientranti o layers interni o di bordo, l'accuratezza globale della soluzione numerica si deteriora.

Un primo rimedio consiste nel raffinare la mesh: tuttavia un raffinamento uniforme puo' comportare uno sforzo computazionale elevato, quando di fatto è sufficiente raffinare la mesh nelle vicinanze delle singolarità. Si pone dunque la questione di come individuare gli elementi che devono essere raffinati e di come bilanciare le zone raffinate e quelle non raffinate in modo tale che l'accuratezza globale della soluzione numerica sia ottimale.

Un'altra questione importante è essere in grado di giudicare la qualità della soluzione numerica, cioè ottenere una stima affidabile dell'accuratezza della soluzione approssimata in modo tale da poter decidere se si è raggiunta la tolleranza richiesta.

In questo contesto appare chiara la necessità di uno stimatore dell'errore che possa essere calcolato localmente a partire dalla soluzione numerica e dai dati del problema. Lo stimatore deve fornire una stima dell'alto e dal basso per l'errore calcolato in una norma opportuna. Infatti, una stima globale dall'alto è sufficiente ad assicurare che la soluzione numerica abbia raggiunto una tolleranza prescritta, mentre stime locali dal basso sono essenziali per garantire che l'errore non sia sovrastimato e per derivare un processo di raffinamento adattivo della mesh. Infine, il costo computazionale del calcolo dello stimatore deve essere inferiore a quello del calcolo della soluzione numerica.

## 2. – Risultati.

Nella tesi si è sviluppata un'analisi a posteriori dell'errore per l'approssimazione con elementi finiti misti del seguente problema agli autovalori:

$$\begin{cases} -\nabla \operatorname{div} u & = & \lambda \boldsymbol{u} & \text{in } \Omega \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{u} & = & 0 & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} & = & 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $\Omega$ è un dominio poligonale semplicemente connesso, $\partial\Omega$ la sua frontiera e $\boldsymbol{n}$ il versore normale uscente.

Tale problema deriva dalla formulazione agli spostamenti per il calcolo dei modi di vibrazione di un fluido acustico contenuto in una cavità rigida. Inoltre, poiché in due dimensioni, gli operatori di divergenza e di rotore sono isomorfi, esso risulta essere equivalente al problema agli autovalori di Maxwell per una cavità risonante con costante dielettrica e permeabilità magnetica costanti ed uguali a 1.

Dapprima si è considerata l'approssimazione con elementi finiti di Brezzi-Douglas-Marini di ogni ordine e si è introdotto uno stimatore a posteriori basato sul residuo. Assumendo la regolarità dell' autosoluzione, si è dimostrato che lo stimatore maggiora la norma H(div) dell'errore a meno di una costante moltiplicativa e di termini di ordine superiore. Inoltre, anche la radice quadrata dell'errore nell'approssimazione dell'autovalore è maggiorata dallo stimatore a meno di una costante moltiplicativa e di termini di ordine superiore. Le costanti di cui sopra dipendono dall'autovalore, ma sono indipendenti dalla size della mesh. Infine, senza assumere nessuna ipotesi aggiuntiva sulla regolarità dell'autosoluzione, si è dimostrato che l'indicatore dell'errore è efficiente, cioè limita dal basso l'errore locale, a meno di termini di ordine superiore.

Si è poi considerata anche l'approssimazione mediante elementi finiti di Raviart-Thomas e si è presentata una diversa analisi a posteriori dell'errore. Si è introdotto uno stimatore dell'errore basato sul residuo e si è dimostrato che, se vale una proprietà di superconvergenza, allora esso è equivalente alla norma $L^2$ dell'errore a meno di termini di ordine superiore. La proprietà di superconvergenza richiesta per l'analisi è stata dimostrata per gli elementi finiti di Raviart-Thomas di ordine basso.

È noto che una simile proprietà di superconvergenza vale per il problema sorgente associato al problema agli autovalori. Tuttavia, poichè il punto chiave della dimostrazione data per il problema sorgente consiste nell'utilizzo della proprietà di ortogonalità di Galerkin, che vale appunto per il problema sorgente ma non per quello agli autovalori, si è dovuto ricorrere ad altre tecniche dimostrative.

I risultati sopra esposti valgono per un generico dominio poligonale o poliedrico semplicemente connesso e per mesh simplettiche soddisfacenti l'usuale ipotesi di regolarità. Inoltre, gli stimatori possono essere calcolati localmente a partire dalle autosoluzioni discrete.

I risultati delle prove numeriche effettuate mostrano il buon comportamento degli stimatori dell'errore quando utilizzati come base per derivare un processo di raffinamento adattivo della mesh.

La proprietà di superconvergenza per gli elementi di Raviart-Thomas di ordine basso è stata suffragata dai risultati numerici. Infine, le prove numeriche effettuate sembrano suggerire che la proprietà di superconvergenza valga anche per gli elementi di Brezzi-Douglas-Marini di ordine basso.

I risultati di questa tesi sono stati parzialmente pubblicati in [1, 2, 3, 4]

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] GARDINI F., *A Posteriori Error Estimates for an Eigenvalue Problem Arising from Fluid-Structure Interactions* Ist. Lombardo (Rend. Sc.) **138** (2004), 17-34

[2] GARDINI F. *A Posteriori Error Estimates for an Eigenvalue Problem Arising from Fluid-Structure Interactions* Computational Fluid and Solid Mechanics 2005 (2005), 228-231

[3] GARDINI F. *On a Superconvergence Result for Mixed Approximation of Eigenvalues Problems* Numerical Mathematics and Advanced Applications (2005), 244-251

[4] GARDINI F. *Mixed Approximation of Eigenvalue Problems: a Superconvergence Result* Preprint IMATI-CNR Pavia **9-PV** (2006).

Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università degli Studi di Pavia
e-mail: francesca.gardini@unipv.it
Dottorato di Ricerca in Matematica e Statistica
(sede amministrativa: Università di Pavia) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Daniele Boffi, Università di Pavia