Vita Leonessa

Operatori lineari positivi associati a selezioni continue di misure di Borel

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 259–262.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_259_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 259-262

Operatori lineari positivi associati a selezioni continue di misure di Borel

VITA LEONESSA

1. – Introduzione.

Nel 1912 il matematico Bernstein propose la prima dimostrazione costruttiva del ben noto teorema di approssimazione di Weierstrass esibendo una successione di operatori di tipo polinomiale approssimanti le funzioni continue e definiti ponendo per ogni $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{C}([0,1])$,

$$\mathcal{B}_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Gli operatori $\mathcal{B}_n : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1])$ $(n \geq 1)$ sono lineari, positivi e la successione $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 1}$ costituisce un processo di approssimazione nello spazio $\mathcal{C}([0,1])$ (i.e., per ogni $f \in C([0,1])$ si ha $\lim_{n \to \infty} \mathcal{B}_n(f) = f$ uniformemente su $[0,1]$).

In risposta alla necessità di modificare tali operatori di al fine di ottenere un processo di approssimazione in spazi di funzioni integrabili, nel 1930 L. V. Kantorovich introdusse nuovi operatori lineari e positivi definiti ponendo

$$K_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \left[(n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

per ogni $n \geq 1, f \in \mathcal{L}^1([0,1])$ e $x \in [0,1]$. Come mostrato dallo stesso Kantorovich, la successione $(K_n)_{n \geq 1}$ costituisce un processo di approssimazione negli spazi $\mathcal{L}^p([0,1])$, $p \geq 1$, oltre che negli spazi di funzioni continue, ed inoltre ha il pregio di richiedere la conoscenza della media integrale della funzione f in un intorno dei nodi k/n $(0 \leq k \leq n)$, piuttosto che il suo valore sui nodi.

Nel seguito diversi studiosi si sono occupati dell'estensione degli operatori di Berstein in contesti multidimensionali. Di tali generalizzazioni, che vanno sotto il nome di operatori di Bernstein-Schnabl, si ricorda quella dovuta ad Altomare che coinvolge proiezioni positive e che permette di dimostrare diverse proprietà che risultano essere molto interessanti nelle applicazioni in teoria dei semigruppi ed equazioni di evoluzione.

Ispirati alle tecniche sviluppate da Altomare, in questa tesi si introducono nuovi operatori lineari e positivi, definiti anch'essi mediante selezioni continue di misure di probabilità di Borel su $[0,1]$, che costituiscono una generalizzazione degli operatori di Kantorovich e di cui si studiano sia le proprietà di approssimazione che di conservazione.

Si dimostra che anche per questi nuovi operatori sussistono proprietà analoghe a quelle degli operatori di Bernstein-Schnabl ed, in particolare, che essi possono essere utilizzati nell'approssimazione costruttiva e qualitativa non solo delle funzioni integrabili ma anche delle soluzioni di alcune classi di equazioni di evoluzione.

Nel corso di tali studi è in realtà emerso un profondo legame tra i nuovi operatori e gli operatori di Bernstein-Schnabl associati a selezioni continue di misure. Tale legame ha suggerito la possibilità di approfondire lo studio di questi ultimi operatori ottenendo nuovi risultati contenuti in parte in questa tesi e in [1].

2. – Operatori positivi associati a selezioni continue di misure.

Sia $(\mu_x)_{0\le x\le 1}$ una famiglia di misure di probabilità di Borel su $[0,1]$ tale che per ogni $f \in \mathcal{C}([0,1])$ la funzione $x \longmapsto \int_0^1 f d\mu_x$ è continua su $[0,1]$ (in tal caso brevemente si dirà che $(\mu_x)_{0\le x\le 1}$ è una *selezione continua* di misure). Si supponga inoltre che per ogni $x \in [0,1]$, $\int_0^1 e_1 d\mu_x = x$, dove $e_1(t) = t$ per ogni $t \in [0,1]$.

Per ogni $n \ge 1$ l'*n-simo operatore di Bernstein-Schnabl (associato alla selezione di misure)* è definito ponendo per ogni $f \in \mathcal{C}([0,1])$ ed $x \in [0,1]$

$$B_n(f)(x) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big) d\mu_x(x_1) \cdots d\mu_x(x_n). \tag{1}$$

Si osservi che se si considera la particolare selezione continua $\mu_x := x\varepsilon_1 + (1-x)\,\varepsilon_0$, $(0 \le x \le 1)$, ove ε_0 ed ε_1 denotano le misure di Dirac concentrate rispettivamente in 0 ed in 1, allora i corrispondenti operatori sono i classici operatori di Bernstein.

Utilizzando il teorema di Korovkin si dimostra che la successione $(B_n)_{n\ge 1}$ costituisce un processo di approssimazione sullo spazio $\mathcal{C}([0,1])$ e a tal proposito si esibiscono alcune stime, puntuali e uniformi, della velocità di convergenza mediante opportuni moduli di regolarità. In seguito si investigano le proprietà qualitative di questi operatori, quali la conservazione della monotonia e della convessità, l'invarianza dell'insieme delle funzioni hölderiane ed infine la monotonia della successione $(B_n(f))_{n\ge 1}$, tutto questo, ovviamente, sotto opportune ipotesi (cfr. [1] per uno studio più approfondito sugli operatori di Bernstein-Schnabl definiti in (1)).

In riferimento alla selezione continua di misure sopra fissata, vengono poi introdotti i nuovi operatori lineari e positivi C_n nel modo seguente.

Siano $(a_n)_{n\ge 1}$ e $(b_n)_{n\ge 1}$ due successioni di numeri reali tali che, per ogni $n \ge 1$, $0 \le a_n < b_n \le 1$. Per ogni $n \ge 1$, si definisce l'operatore $C_n : \mathcal{L}^1([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1])$ lineare e positivo ponendo, per ogni $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$ e $x \in [0,1]$,

$$C_n(f)(x) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\int_0^1 f\left(\frac{(b_n - a_n)s + a_n + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}\right) ds\right] d\mu_x(x_1) d\mu_x(x_n). \tag{2}$$

Nel caso particolare in cui $\mu_x = x\varepsilon_1 + (1-x)\varepsilon_0$ $(0 \le x \le 1)$ e $a_n = 0$ e $b_n = 1$ per ogni $n \ge 1$, gli operatori C_n non sono altro che gli operatori di Kantorovich dei quali si intendeva proporre una generalizzazione.

Gli operatori C_n sono intimamente connessi agli operatori di Bernstein-Schnabl sopra definiti. È possibile infatti esprimere i C_n in termini degli operatori B_n e ciò non solo permette di determinare alcune proprietà degli operatori C_n a partire da quanto è noto per gli operatori di Bernstein-Schnabl, ma suggerisce anche un metodo per generalizzare gli operatori C_n nell'ambito di contesti multidimensionali ed infinito dimensionali. Tali estensioni verranno esaminate in future ricerche.

Si dimostra che la successione $(C_n)_{n\ge1}$ costituisce un processo di approssimazione per lo spazio $\mathcal{C}([0,1])$ e, in un caso particolare, anche per gli spazi $\mathcal{L}^p([0,1])$, $1 \le p < +\infty$. In entrambi i casi si presentano diverse stime, puntuali ed uniformi, della velocità di convergenza.

Si studiano poi le proprietà di conservazione degli operatori C_n. Ci si interroga dapprima su quali siano le condizioni da imporre affinchè la successione $(C_n)_{n\ge1}$ lasci invariate le funzioni Hölderiane, ritrovando forti analogie con il caso degli operatori di Bernstein-Schnabl. Si passa poi allo studio del comportamento degli operatori C_n sulle funzioni convesse pervenendo ad un risultato che afferma che anche gli operatori C_n conservano la convessità delle funzioni. Indagando invece sull'eventuale proprietà di monotonia della successione $(C_n(f))_{n\ge1}$, contrariamente a quanto accade per la successione $(B_n(f))_{n\ge1}$, se f è una funzione continua e convessa, in generale la successione $(C_n(f))_{n\ge1}$ non è monotona. Si dimostra però una disuguaglianza che mette in relazione la funzione $C_{n+1}(f)$ con una combinazione lineare convessa delle funzioni $C_n(f)$ e $B_{n+1}(f)$. Infine si prova che, per funzioni convesse e monotone, le loro trasformate mediante C_n si trovano al di sopra delle funzioni stesse in un sottointervallo di $[0,1]$. Per maggiori dettagli si veda [2].

3. – Semigruppi di Markov ed equazioni di evoluzione.

In questa sezione vengono brevemente illustrate le applicazioni degli operatori C_n nell'ambito della teoria dei semigruppi e dell'approssimazione delle soluzioni di equazioni di evoluzione. A tal fine sia $(C_n)_{n\ge1}$ la successione degli operatori definiti in (2) tale che la successione $(a_n+b_n)_{n\ge1}$ sia convergente e sia $d := \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$. Allora, per ogni $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, si ha la seguente formula asintotica

$$\lim_{n\to\infty} n(C_n(f)(x) - f(x)) = \frac{T(e_2)(x) - x^2}{2} f''(x) + \left(\frac{d}{2} - x\right) f'(x), \tag{3}$$

uniformemente su $[0,1]$, ove si è posto $e_2(t) = t^2$ $(0 \le t \le 1)$ e $T(e_2)(x) = \int_0^1 e_2 d\mu_x$.

La formula (3) individua un operatore differenziale del secondo ordine del tipo

$$Au(x) := a(x)u''(x) + \left(\frac{d}{2} - x\right)u'(x) \quad (0 < x < 1)$$

dove $a \in \mathcal{C}([0,1])$, $a(0) = a(1) = 0$. Si supponga in aggiunta che a sia derivabile in 0 ed 1 e che $a'(0) \ne 0 \ne a'(1)$ e si continui a denotare con A l'operatore differenziale definito come

$$
(4) \qquad A(u)(x) := \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} A(u)(x) & x = 0, \\ a(x)u''(x) + \left(\dfrac{d}{2} - x\right)u'(x) & 0 < x < 1, \\ \lim\limits_{x\to 1^-} A(u)(x) & x = 1, \end{cases}
$$

per ogni $u \in D_M(A) := \left\{u \in \mathcal{C}([0,1]) \cap \mathcal{C}^2(]0,1[) \mid \lim\limits_{x\to 0^+} A(u)(x), \lim\limits_{x\to 1^-} A(u)(x) \in \mathbb{R}\right\}$.

Si dimostra che l'operatore $(A, D_M(A))$ genera un semigruppo di Markov $(T(t))_{t\geq 0}$ su $\mathcal{C}([0,1])$ e che $\mathcal{C}^2([0,1])$ è un core per $(A, D_M(A))$.

Inoltre per ogni $t \geq 0$, per ogni successione $(k(n))_{n\geq 1}$ di interi positivi tale che $k(n)/n \to t$ $(n \to \infty)$ e per ogni funzione $f \in \mathcal{C}([0,1])$, si ha

$$
(5) \qquad \lim_{n\to\infty} C_n^{k(n)}(f) = T(t)f \quad \text{uniformemente su } [0,1].
$$

Inoltre se si considera il problema di Cauchy associato all'operatore $(A, D_M(A))$ definito come segue

$$
(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = a(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + \left(\dfrac{d}{2} - x\right)\dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t) & 0 < x < 1,\ t \leq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & u_0 \in D_M(A), 0 \leq x \leq 1, \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x\to 1^-}} a(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \left(\dfrac{d}{2} - x\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) \in \mathbb{R} & t \geq 0, \end{cases}
$$

dalla (5) si ricava anche una formula di rappresentazione delle soluzioni di tale problema data da

$$
(7) \qquad u(x,t) = T(t)u_0(x) = \lim_{n\to\infty} C_n^{k(n)}(u_0)(x) \quad (0 \leq x \leq 1, t \geq 0)
$$

e il limite è uniforme rispetto ad $x \in [0,1]$.

La formula di rappresentazione (5) permette di ricavare diverse informazioni qualitative sul semigruppo $(T(t))_{t\geq 0}$ e sulle soluzioni di (6) a partire da quelle ricavate dallo studio degli operatori C_n svolto in precedenza.

Per i dettagli dei risultati di questa sezione si veda [3].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] ALTOMARE F., LEONESSA V. e RASA I., *On Bernstein-Schnabl operators on the unit interval*, in corso di stampa su Journal for Analysis and its Applications.

[2] Altomare F. e Leonessa V., *Positive linear operators associated with continuous selections of Borel measures*, Mediterr. j. math., 3, no. 3-4 (2006), 363-382.

[3] Altomare F. e Leonessa V., *Continuous selections of Borel measures, positive operators and degenerate evolution problems*, in corso di stampa su Revue D'Analyse Numérique et Théorie de l'Approximation.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi della Basilicata
e-mail: vita.leonessa@unibas.it
Dottorato di Ricerca in Matematica
(sede amministrativa: Università degli Studi di Bari) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Francesco Altomare, Università degli Studi di Bari