

---

# BOLLETTINO

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

FRANCESCA MAGGIONI

## **Cinematiche di filamenti elastici e rilassamento magnetico di tubi di flusso**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 10-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2007), n.2, p. 267–270.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2007\\_8\\_10A\\_2\\_267\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_267_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Cinematiche di filamenti elastici e rilassamento magnetico di tubi di flusso

FRANCESCA MAGGIONI

### 1. – Introduzione.

In natura si presentano su svariate scale di grandezza strutture filamentose che si deformano assecondando una tendenza comune a redistribuire e minimizzare l'energia interna, di tipo cinetico, magnetico o elastico. Alcuni esempi di tali strutture sono dati, a livello microscopico, dalle molecole di DNA ai difetti nella fisica dello stato solido, dai sistemi elastici ai vortici in turbolenza e ai tubi di flusso magnetico in astrofisica. Un tipico meccanismo presente nei suddetti sistemi, è quello dell'auto-avvolgimento, per mezzo del quale ad esempio una molecola di DNA si "impacchetta" in una cellula umana, o attraverso cui i tubi di flusso magnetico, guidati da un ciclo di auto-eccitazione di tipo *stretch-twist-fold*, generano un campo magnetico eccitato (effetto dinamo). Nella presente tesi si considerano evoluzioni in cui la topologia del sistema sia conservata, mantenendo quindi costanti quantità topologiche quali tipo di nodo e *numero di legame*  $Lk$ . Nel caso di un filamento chiuso, la conservazione del numero di legame  $Lk$  implica l'invarianza della somma di due quantità geometriche, il numero di distorsione (*writhing number*)  $Wr$  e il numero di contorsione (*twist number*)  $Tw$ , per mezzo di un continuo scambio di  $Tw$  e  $Wr$  secondo la nota formula di Călugăreanu-White (1961, 1969) [3], [5]:

$$(1) \quad Lk = Wr + Tw ;$$

$Wr$  è una misura della distorsione e dell'avvolgimento dell'asse del filamento su se stesso, mentre  $Tw$  è una misura della contorsione delle fibre infinitesimali attorno all'asse stesso del filamento.

Lo scopo di questa tesi è duplice: innanzitutto, nell'ambito dei filamenti elastici, si introducono nuove equazioni per modellare e studiare l'evoluzione di un filamento sottile e inestensibile  $\mathcal{F}$ , che evolve nello spazio da una configurazione circolare piana ad una superavvolta; si calcola l'energia di deformazione associata, nel contesto della teoria elastica lineare per un filamento uniforme, omogeneo e isotropo, e si analizza la presenza di configurazioni inflessionali.

Secondariamente, nell'ambito della magnetoidrodinamica ideale, adottando un sistema di coordinate curvilineo ortogonale, si effettua la minimizzazione dell'energia magnetica di un tubo di flusso  $\mathcal{F}$  a sezione trasversale circolare, twist uniforme e immerso in un fluido perfettamente conduttore e incompressibile. Infine si applicano i risultati ottenuti allo studio di un meccanismo di dinamo rapida dal punto di vista ci-

nematico secondo il modello di *stretch-twist-fold* proposto da Vainshtein & Zeldovich nel 1972.

Il filamento  $\mathcal{F}$  e il tubo di flusso  $\mathcal{T}$  sono definiti da un tubo sottile di lunghezza  $L$ , sezione trasversale circolare e uniforme di area  $\pi a^2$ , con  $L \gg a$ , costituito da un fascio di fibre infinitesimali elicodali distribuite all'interno di esso e avvolte con dato twist  $T\omega$ , attorno all'asse  $\mathcal{C}$  dello stesso.  $\mathcal{C}$  è una curva regolare, semplice e chiusa di equazione  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\xi, t)$  in  $\mathbb{R}^3$ , dove  $\xi \in [0, 2\pi]$  è un parametro regolare lungo la curva e  $t$  un tempo cinematico. La geometria dell'asse del filamento o del tubo di flusso è prescritta dalla curvatura  $c(\xi, t)$  e dalla torsione  $\tau(\xi, t)$  attraverso le formule di Serret-Frenet.

## 2. – Cinematiche di avvolgimento.

Le equazioni parametriche della famiglia di curve studiate, sono date da:

$$(2) \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\xi, t) : \begin{cases} x = 2\pi[a \cos(m\xi) + b t \cos(n\xi)]/L(t), \\ y = 2\pi[c \sin(m\xi) + d t \sin(n\xi)]/L(t), \\ z = 2\pi[t \sin(\xi)]/L(t), \end{cases}$$

dove  $a, b, c, d = 1$ ,  $\{n, m\} \in \mathbb{N}$ , con  $n > m$ , ed in cui al fine di assicurare l'ineestensibilità del filamento, ogni componente è stata normalizzata per la funzione lunghezza  $L(t)$ . Assegnati i valori dei parametri  $a, b, c, d, m, n$ , l'eq. (2) descrive la cinematica di una curva chiusa che evolve da una singola circonferenza di lunghezza  $2\pi$  (per  $m = 1, t = 0$ ), o da un ricoprimento multiplo di circonferenza (se  $m \neq 1$ ) fino a deformarsi in una configurazione auto-avvolta o super-avvolta (si veda Fig. 1). A seconda dei valori dei parametri  $a, b, c, d$ , la curva/evoluzione viene detta di tipo *epicicloide* o *ipocicloide*, *pseudo-epicicloide* o *pseudo-ipocicloide* in relazione al corrispondente tipo di curva piana proiettata sul piano  $xy$ .

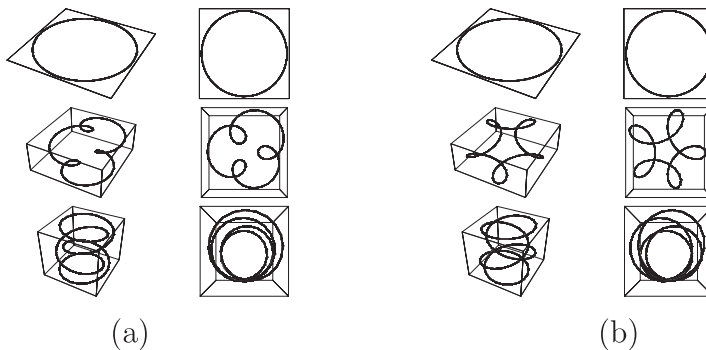


Figura 1. – Vista di  $3/4$  ed in pianta dell'evoluzione di curve generate dall'eq. (2) nel caso della formazione di tre coil a partire da una configurazione iniziale circolare, secondo: (a) curva di tipo epicicloide ( $a = c = +1, b = d = -1$ ), (b) curva di tipo ipocicloide ( $a = b = c = +1, d = -1$ ),  $m = 1$  e  $n = 4$ .

Le differenti cinematiche di avvolgimento vengono confrontate in termini di quantità geometriche globali quali *writhing number*  $Wr$ , *curvatura totale normalizzata*  $\mathcal{K}$  e *torsione totale normalizzata*  $\mathcal{T}$  osservando in particolare che un'evoluzione di tipo epicicloide comporta un tasso di variazione di  $Wr$  e di  $\mathcal{K}$  maggiore rispetto alla corrispondente di tipo ipocicloide.

Nel contesto della teoria lineare elastica per un tubo sottile, uniforme, omogeneo e isotropo, si determina inoltre l'*energia elastica* di deformazione associata al processo di avvolgimento studiato. In prima approssimazione, essa è data dalla convenzionale forma quadratica  $E = E_b + E_t$ , somma dell'*energia di curvatura*  $E_b$  e dell'*energia di torsione*  $E_t$ . Come è noto al di sopra di certi valori di twist critico, il rilassamento dell'energia elastica favorisce il processo di avvolgimento.

Una peculiarità di questo modello consiste nel fatto che tutte le cinematiche basate su evoluzioni di tipo epicicloide/ipocicloide sono caratterizzate, indipendentemente dal numero di capi formati, da un numero di avvolgimento massimo  $Wr_{\max} = 1$ , il quale comporta, a causa della conservazione di  $Lk$  (si veda eq. (1)), un ulteriore limite in  $Tw$  e in  $E_t$ .

Nella tesi viene inoltre confermato che ogni cinematica di avvolgimento proposta presenta un passaggio attraverso una *configurazione inflessionale* (come originariamente discusso in [3]), contraddistinta dall'esistenza lungo la curva di un punto a curvatura nulla e torsione singolare. In particolare ne vengono messe in luce le conseguenze geometriche, quali l'istantanea conversione di twist intrinseco in torsione totale, ed energetiche. Alcuni di questi risultati sono pubblicati in [2] e [4].

### 3. – Minimizzazione dell'energia magnetica e cinematiche di dinamo rapida.

Nell'ambito della magnetoidrodinamica ideale si considera un tubo di flusso magnetico  $\mathcal{F}$  immerso in un fluido perfetto e incompressibile; si introduce un sistema di coordinate curvilineo, ortogonale  $(r, \mathcal{S}_R, \xi)$  (detto di Mercier), con versori rispettivamente nelle direzioni radiale  $r$ , meridiana  $\mathcal{S}_R$  e longitudinale  $\xi$  rispetto a cui il campo magnetico  $\mathbf{B}$  viene scritto in termini di flusso toroidale  $\Phi_T$ , poloidale  $\Phi_P$  e di una funzione  $\psi(r, \mathcal{S}_R, \xi)$  periodica in  $\xi$  e  $\mathcal{S}_R$ :

$$(3) \quad \mathbf{B} = \left( 0, \frac{1}{L} \frac{d\Phi_P}{dr}, \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi_T}{dr} \right) + \left( 0, \frac{\partial\psi}{\partial\xi}, -\frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{S}_R} \right);$$

si determina l'*elicità*  $e$ , seguendo l'approccio presentato in [1], si calcola esplicitamente il funzionale dell'*energia magnetica minimizzata*

$$(4) \quad \mathcal{M}^* = \left( \frac{L^2}{2V} + \frac{\pi Lk^2}{L} \right) \Phi^2,$$

in funzione degli invarianti  $Lk$ , flusso totale  $\Phi$  e volume  $V$ , nel caso in cui il tubo di flusso sia *standard* ( $\Phi_P = Lk\Phi_T$ ) e *uniforme* in direzione longitudinale ( $\partial\psi/\partial\xi = 0$ ).

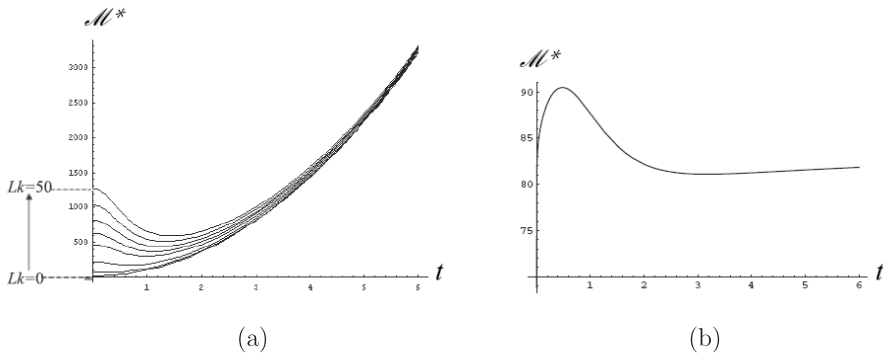


Figura 2. – (a) Andamento di  $\mathcal{M}^*$  nel tempo  $t$ , per un’evoluzione generata dall’eq. (2), con  $m = 1$  e  $n = 2$  e  $Lk = 0, 10, 20, 30, 35, 40, 45$  e  $50$ . (b) Andamento di  $\mathcal{M}^*$  nel tempo  $t$  per la cinematica di dinamo rapida proposta.

Al fine di studiare il comportamento dell’energia magnetica vincolata nel tempo e il suo minimo, si effettuano varie applicazioni tra cui quella in cui l’asse del tubo evolve attraverso una curva di tipo epicicloide/ipocicloide (si veda Fig. 2(a)). Infine, si investiga una cinematica che riproduca il meccanismo di *stretch-twist-fold* proposto da Vainshtein & Zeldovich per la generazione di dinamo rapida. Utilizzando il modello proposto si dimostra che l’energia magnetica minimizzata può crescere super-esponenzialmente nei primi stadi dell’avvolgimento, con una conseguente crescita super-esponenziale dell’energia magnetica del sistema (si veda Fig. 2(b)).

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] CHUI A.Y.K. e MOFFATT H.K., *The energy and helicity of knotted magnetic flux tubes*, Proc. R. Soc. London A, **451** (1995), 609-629.
- [2] MAGGIONI F. e RICCA R.L., *Writhing and coiling of closed filaments*, Proc. R. Soc. A, **462**, (2006), 3151-3166.
- [3] MOFFATT H.K. e RICCA R.L., *Helicity and the Călugăreanu invariant*, Proc. R. Soc. London A, **439**, (1992), 411-429.
- [4] RICCA R.L. e MAGGIONI F., *Multiple folding and packing in DNA*, Special Issue on “Modeling and Computational Methods in Genomic” (ed. N. Bellomo e R. Tadei), Comput. Math. Appl., to appear.
- [5] WHITE J.H., *Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions*, Amer. J. Math., **91** (1969), 693-728.

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università degli Studi di Milano-Bicocca  
 e-mail: francesca.maggioni@unibg.it  
 Dottorato in Matematica Pura ed Applicata  
 (sede amministrativa: Università degli Studi Milano-Bicocca) - Ciclo XIX  
 Direttore della Ricerca: Prof. Renzo L. Ricca, Università degli Studi Milano-Bicocca