ANTONIO MARIGONDA

Proprietà differenziali per una classe di funzioni non Lipschitziane ed applicazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 271–274.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_271_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 271-274

Proprietà differenziali per una classe di funzioni non Lipschitziane ed applicazioni

ANTONIO MARIGONDA

1. – Introduzione.

Dato un sistema di controllo in dimensione finita $\dot{x} = f(t, x, u)$, indicata con $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^m$ la classe dei controlli ammissibili, e un insieme bersaglio chiuso S a frontiera compatta, definiamo $t_x(u) := \inf\{t : y_x(t, u) \in S\}$ (ponendo $\inf \emptyset = +\infty$) dove $u : [0, +\infty[\to \mathcal{U}$ è misurabile e $y_x(, u)$ indica la traiettoria di $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ soddisfacente $x(0) = x$. Definiamo poi la funzione tempo minimo $T(x) := \inf_u t_x(u)$. Tale funzione indica il tempo minimo necessario per una traiettoria del sistema che parta da x per giungere ad S. Un problema naturale che sorge nella Teoria del Controllo è quello dello studio delle proprietà di regolarità di $T(\cdot)$. In [3] viene provato che, per un problema lineare con bersaglio convesso, se $T(\cdot)$ è localmente Lipschitziana, allora è semiconvessa. Le funzioni semiconvesse possono essere caratterizzate come perturbazioni quadratiche di funzioni convesse, ed ereditano da esse alcune proprietà di regolarità come ad esempio la locale Lipschitzianità e la differenziabilità due volte q.o. Tali funzioni in generale non sono lisce, tuttavia il loro epigrafico gode della seguente proprietà geometrica: esiste un intorno di esso dove la proiezione è ben definita, e la distanza dall'epigrafico risulta essere una funzione di classe $C^{1,1}$. Semiconcavità e semiconvessità sono considerate buone classi di regolarità, intermedie tra Lipschitzianità e regolarità C^1.

Vi sono alcuni risultati noti sulla Lipschitzianità o Hölderianità di T. Nel caso di funzioni Lipschitziane, il teorema di Radamacher assicura la loro differenziabilità quasi ovunque. Invece nel caso di funzioni Hölderiane, non sono noti risultati forti sulla differenziabilità.

Vi sono semplici esempi che mostrano come il tempo minimo in generale non sia localmente Lipschitziano, nemmeno nel caso di problemi lineari con bersaglio convesso (ad esempio, il sistema in R^2 $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $\mathcal{U} = [-1, 1]$ con bersaglio $S = \{0\}$). Risulta naturale quindi la ricerca di una classe di funzioni dotate di proprietà di regolarità confrontabili con quelle funzioni semiconvesse, ma non necessariamente localmente Lipschitziane. Una scelta possibile è quella di richiedere che il loro epigrafico sia un insieme con *reach* positivo nel senso di [4]. Insiemi di questo tipo sono stati studiati da diversi autori sia in dimensione finita che in dimensione infinita. Questa scelta costituisce una generalizzazione naturale della semiconvessità, in quanto funzioni di questo tipo risultano essere in generale non localmente Lipschitziane e, qualora si aggiunga l'ipotesi di locale Lipschitzianità, si ritrova la classe delle funzioni semiconvesse. Le funzioni che godono di questa proprietà sono note con il nome di *prox-regular* o φ-convesse e risultano essere promettenti dal punto di vista dello studio delle proprietà di differenziabilità.

2. – Struttura della tesi.

Inizialmente vengono studiate le proprietà degli insiemi con *reach* positivo in R^n. Si prova, tra gli altri risultati, che la loro frontiera è $\mathcal{H}^{n-1}$-rettificabile e che il loro perimetro è localmente finito e vengono confrontati alcuni oggetti derivanti dall'analisi nonsmooth con altri derivanti dalla teoria geometrica della misura, in particolare, dalla teoria di De Giorgi sugli insiemi di perimetro finito. Tali proprietà vengono successivamente utilizzate nello studio delle funzioni. Sono state esplorate diverse definizioni di enti con proprietà di *proximal smoothness* risultate poi non equivalenti e sono stati forniti controesempi opportuni. Si prova che una funzione f s.c.i. soddisfacente alla condizione di epigrafico con reach positivo, gode di varie proprietà di regolarità tra cui quella di essere due volte differenziabile $\mathcal{L}^n$-q.o. Nelle sezioni successive, viene studiata in dettaglio la struttura dell'insieme singolare degli insiemi con *reach* positivo e dell'insieme Σ dei punti di non differenziabilità per funzioni con epigrafico che goda di questa proprietà. In particolare, viene studiato il problema della *propagazione* delle singolarità, ossia dello studio delle condizioni sufficienti affinchè esista una curva Lipschitziana costituita interamente da punti singolari, uscente da un punto di non differenziabilità. In seguito vengono stabilite alcune formule di rappresentazione per il cono normale all'epigrafico, che vengono utilizzate nel contesto delle soluzioni di viscosità. Si prova come una funzione continua, con ipografico con *reach* positivo il cui cono normale non contenga rette e soddisfacente q.o. un'equazione di Hamilton-Jacobi $H(x, u, Du) = 0$, sia in realtà una soluzione di viscosità, posto che H sia convessa in Du e continua. Nella parte finale della tesi, l'attenzione viene concentrata sulla funzione tempo minimo per un problema di controllo. Dapprima vengono studiate alcune condizioni di controllabilità per un problema non lineare con bersaglio non necessariamente convesso. Tali condizioni garantiscono l'Hölderianità del tempo minimo, indebolendo cosìl'ipotesi di Lipschitzianità necessaria per la semiconvessità nel risultato di [3]. Viene poi caratterizzata una classe di problemi lineari in cui la funzione tempo minimo ha epigrafico con *reach* positivo: si mostra che per un problema lineare con bersaglio convesso se il tempo minimo è continuo, il suo epigrafico ha *reach* positivo. Se ne deducono nuove proprietà di regolarità di T. Infine vengono presentati alcuni problemi aperti, il principale dei quali è quello di identificare le classi di problemi di controllo non lineari in cui il tempo minimo abbia epi- o ipografico con *reach* positivo.

3. – Risultati principali.

Per le definizioni dei concetti di analisi nonsmooth, teoria geometrica della misura e teoria del controlllo rimandiamo alla bibliografia. Un primo risultato è stato quello di provare l'equivalenza delle seguenti due definizioni:

DEFINIZIONE 1 (Federer). – *Sia $K \subset R^n$ chiuso, definiamo* Unp(A) *come l'insieme di tutti i punti $x \in R^n$ per cui esiste un unico punto di A che minimizzi la distanza di x da A. La proiezione π_A :* Unp$(A) \to A$*, che associa ad $x \in$* Unp(A)

l'unico $a \in A$ *tale che* $d_A(x) = |x - a|$, *è ben definita. Per ogni* $a \in A$ *poniamo* $\mathrm{reach}(A, a) := \sup\{r > 0 : B(a, r) \subseteq \mathrm{Unp}(A)\}$, $\mathrm{reach}(A) := \inf_{a \in A} \mathrm{reach}(A, a)$. *Diremo che* A *ha reach positivo se* $\mathrm{reach}(A) > 0$.

DEFINIZIONE 2. – *Sia* $K \subset R^n$ *chiuso e* $\varphi : K \to [0, +\infty)$ *continua. Diremo che* K *è* φ*-convesso se per ogni* $x, y \in K$, $v \in N_K^F(x)$ *(cono normale di Fréchet), vale* $\langle v, y - x\rangle \le \varphi(x)|v|\,|y - x|^2$. *Se* K *è l'epigrafico di una funzione continua* $f(\,\cdot\,)$, *allora tale condizione prende la forma* $\langle(\zeta, \xi), (y, \beta) - (x, a)\rangle \le \varphi(x, a)(|\zeta| + |\xi|)(|y - x|^2 + |\beta - a|^2)$ *per ogni* $x, y \in \mathrm{dom}(f)$, $a \ge f(x)$, $\beta \ge f(y)$, $(\zeta, \xi) \in N^P_{\mathrm{epi}(f)}(x, a)$ *(normale prossimale), con* $\varphi : \mathrm{epi}(T) \to [0, +\infty)$ *continua.*

Grazie a questa equivalenza, si ha che per questi insiemi tutti i coni normali (prossimale, di Fréchet e di Clarke) coincidono, ovvero $N^P(x) = N^F(x) = N^C(x)$. Il principale risultato sulla differenziabilità è il seguente:

TEOREMA 1. – *Sia* Ω *aperto di* R^n, *e sia* $f : \overline{\Omega} \to R \cup \{+\infty\}$ *propria e inferiormente semicontinua, tale che* $\mathrm{epi}(f)$ *sia* φ*-convesso. Allora esiste una successione di insiemi* $\Omega_h \subseteq \Omega$ *tali che ogni* Ω_h *sia compatto in* $\mathrm{dom}(f)$, *l'unione degli* Ω_h *copre* $\mathcal{L}^n$*-quasi tutto* $\mathrm{dom}(f)$, *ovvero* $\mathcal{L}^n\left(\mathrm{dom}(f) \setminus \bigcup_h \Omega_h\right) = 0$, *e inoltre per ogni* $x \in \bigcup_h \Omega_h$ *valgono i seguenti fatti:* f *è (strettamente) Fréchet differenziabile in* x, Df *è approssimativamente continuo in* x, *e per ogni successione* $\{y_m\} \subset \mathrm{dom}(Df)$ *tale che* $y_m \to x$, *si ha* $Df(y_m) \to Df(x)$; *inoltre esiste* $\delta = \delta(x) > 0$, $L = L(x) > 0$ *tale che* f *è Lipschitziana su* $B(x, \delta)$ *di costante* L, *dunque semiconvessa su tale palla e quindi differenziabile due volte q.o. in* $\mathrm{dom}(f)$.

DIMOSTRAZIONE. -- Vengono stabilite alcune proprietà delle normali a insiemi con reach positivo, grazie all'uso combinato di teoria geometrica della misura e analisi nonsmooth. In seguito tali risultati sono stati applicati all'epigrafico delle funzioni. Le difficoltà maggiori nella dimostrazione sono dovute alla presenza di punti di nondifferenziabilità per la funzione che, al contrario di quanto avviene nel caso semiconvesso, non provengono da singolarità dell'epigrafico (ovvero da punti dell'epigrafico dove il cono normale ha dimensione maggiore di 1), bens dalla presenza di punti dove il piano tangente all'epigrafico è verticale. Si sono usate le proprietà della funzione distanza dall'epigrafico per ovviare a tali difficoltà. □

L'applicazione alle soluzioni di viscosità è data dal seguente risultato

TEOREMA 2. – *Sia* $u : \Omega \to R$ *funzione continua tale che per ogni* $x \in \Omega$ *il cono* $N^P_{\mathrm{epi}(u)}(x, u(x))$ *non contenga rette, e tale che* $-u$ *abbia epigrafico* φ*-convesso. Si assuma inoltre che* $(x, u) \mapsto H(x, u, p)$ *sia continua, uniformemente rispetto a* $p \in \{Du(x) : x \in \mathrm{dom}(Du)\}$, *e che* $H(x, u, \cdot)$ *sia convessa per ogni* $(x, u) \in \Omega \times R$. *Si assuma che per q.o.* $x \in \Omega$ *valga* $H(x, u(x), Du(x)) = 0$. *Allora* $u(\,\cdot\,)$ *è soluzione di viscosità di* $H(x, u, Du) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. – Per provare il risultato si cerca di ricostruire il cono normale all'epigrafico in un punto come limite di combinazioni convesse dei differenziali nei punti vicini (per il teorema di differenziabilità la funzione è quasi ovunque differenziabile), estendendendo i risultati di [3]. La possibile non Lipschitzianità impone di aggiungere l'ipotesi che il cono non contenga rette in modo da assicurare tale ricostruzione. Si sfrutta la continuità uniforme e le proprietà delle normali ad un insieme con reach positivo per passare al limite nei punti di non differenziabilità. □

La classe di sistemi di controllo lineari in cui la funzione tempo minimo ha epigrafico con reach positivo è descritta dal seguente:

TEOREMA 3. – *Si consideri il sistema di controllo lineare* $\dot{y}(t) = Ay(t) + u(t)$ a.e., $u(t) \in \mathcal{U}$ a.e. con $\mathcal{U} \subseteq R^n$ compatto e convesso. Sia $S \neq \emptyset$ l'insieme bersaglio.

Poniamo $h(x,\zeta) = \langle Ax, \zeta\rangle + \min_{u\in\mathcal{U}} \langle u, \zeta\rangle$. *Supponiamo che S sia chiuso e convesso,* $h(x,\zeta) \leq 0$ *per ogni* $x \in S$ *e* $\zeta \in N_S(x)$ *(cono normale dell'analisi convessa) e che* $T(\,\cdot\,)$ *sia continua in* $S(\delta) := \{x :\ T(x) \leq \delta\}$. *Allora esiste una funzione continua* φ *tale che l'epigrafico di* $T_{|S(r)\setminus S}$ *sia* φ*-convesso.*

DIMOSTRAZIONE. – Il risultato si basa sull'applicazione del Principio del Massimo di Pontryagin e sulle rappresentazioni esplicite delle soluzioni e del cono normale a T per un sistema lineare con bersaglio convesso. Tali formule, tuttavia, sono disponibili solo nel caso lineare. Risultati comparabili per sistemi non lineari (ad esempio contenuti in [3] sotto l'ipotesi di Lipschitzianità di T) dovranno necessariamente utilizzare tecniche differenti. Da questo risultato seguono le proprietà di differenziabilità della funzione tempo minimo del Teorema 1 per questi sistemi. □

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] L. AMBROSIO, N. FUSCO e D. PALLARA, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, (2000).

[2] M. BARDI e I. CAPUZZO-DOLCETTA, *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations*, Birkhäuser, Boston (1997).

[3] P. CANNARSA e C. SINESTRARI, *Semiconcave functions, Hamilton–Jacobi Equations, and Optimal Control*, Birkhäuser, Boston (2004).

[4] H. FEDERER, *Curvature Measures*, Trans. Amer. Math. Soc., **93** (1959), 418-491.

[5] F. H. CLARKE, R. J. STERN e P. R. WOLENSKI, *Proximal smoothness and the lower–*$\mathcal{C}^2$ *property*, J. Convex Anal., **2** (1995), 117-144.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: amarigo@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Giovanni Colombo, Università di Padova