Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giuseppe Marino

Immersioni proiettive deboli di geometrie punto-retta

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 275–278.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_275_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 275-278

Immersioni proiettive deboli di geometrie punto–retta

GIUSEPPE MARINO

La nozione di immersione proiettiva (completa) è stata introdotta da J. Tits [4] nel 1974 allo scopo di classificare gli spazi polari immergibili in spazi proiettivi. Si sono occupati di tale problema nomi autorevoli quali Buekenhout e Lefèvre a partire dal 1976, con particolare riferimento alle immersioni proiettive di quadrangoli generalizzati finiti, e Dienst dal 1980 con particolare riguardo alle immersioni di quadrangoli generalizzati infiniti. Successivamente gli studi si sono rivolti in due direzioni: da un lato, osservato che una geometria punto–retta può ammettere più immersioni complete, si è cercato di stabilire un legame tra tali immersioni allo scopo di individuarne una dominante; dall'altro sono state indebolite le ipotesi delle immersioni complete introducendo il concetto di immersione debole, e si è cercato e si cerca di classificare le immersioni deboli delle geometrie punto–retta.

Il risultato principale di questa tesi riguarda la classificazione degli spazi polari non degeneri, irriducibili, di rango finito almeno tre, debolmente immersi in uno spazio proiettivo di dimensione arbitraria, coordinatizzato su un corpo non necessariamente commutativo.

1. – Concetti preliminari.

Uno *spazio semilineare* $\Gamma = (P_\Gamma, \mathcal{L}_\Gamma)$ è una geometria punto–retta che soddisfa i seguenti assiomi: per due punti distinti passa al più una retta, ogni retta contiene al più due punti e per ogni punto passa almeno una retta. Diremo che Γ è *irriducibile* se ogni retta contiene almeno tre punti. Due punti distinti p e q di P_Γ sono *collineari*, e scriviamo $p \sim q$, se esiste una retta di $\mathcal{L}_\Gamma$ passante per essi. Per ogni punto p, denotiamo con $p^\sim$ l'insieme dei punti di Γ collineari con p unito il punto p. Se X è un sottoinsieme di P_Γ, scriviamo $X^\sim = \bigcap_{p \in X} p^\sim$. Un punto p tale che $p^\sim = P_\Gamma$ è detto *punto singolare* di Γ. Γ è *non–degenere* se tutti i suoi punti sono non–singolari, i.e. $P_\Gamma^\sim = \emptyset$. Se $P_\Gamma = P_\Gamma^\sim$, allora Γ è detto *spazio lineare*.

Un *sottospazio* di $\Gamma = (P_\Gamma, \mathcal{L}_\Gamma)$ è un sottoinsieme $S \subseteq P_\Gamma$ che contiene ogni retta che congiunge due suoi punti. Poiché l'intersione non vuota di sottospazi è un sottospazio, possiamo definire il sottospazio $\langle X \rangle_\Gamma$ generato da un sottoinsieme $X \subseteq P_\Gamma$

come l'intersezione di tutti i sottospazi contenenti X. Inoltre, diremo che un sottospazio di Γ è *singolare* se due suoi punti sono sempre collineari. Un sottospazio singolare S di Γ ha *rango* k se $k+1$ è la massima lunghezza di tutte le catene sature di sottospazi singolari $S_0 \subset S_1 \subset\subset S_t$, tali che S_0 è un punto e $S_t = S$. Pertanto Γ ha rango $rk\,(\Gamma) = n$ se $n-1$ è il massimo rango di tutti i suoi sottospazi singolari propri. Diremo che un sottoinsieme X di P_Γ è *indipendente* se $\langle Y\rangle_\Gamma \subset \langle X\rangle_\Gamma$ per ogni sottoinsieme proprio $Y \subset X$. Una *base* di un sottospazio S è un sistema indipendente di generatori di S.

Denotiamo con $\mathbb{P}(V)$ lo spazio proiettivo associato alla spazio vettoriale $V(K)$, con K corpo non necessariamente commutativo. Il corpo $K_\Sigma := K$ è detto corpo *soggiacente* di $\Sigma := \mathbb{P}(V)$.

Sia $\Gamma = (P_\Gamma, \mathcal{L}_\Gamma)$ uno spazio semilineare di rango $rk(\Gamma) \geq 2$ (se $rk(\Gamma) = 2$, supponiamo che Γ non sia una retta) e sia $\Sigma = (P_\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma)$ uno spazio proiettivo di dimensione $dim\,\Sigma \geq 2$. Se $dim\,\Sigma = 2$, supponiamo che Σ sia Desarguesiano e K_Σ denoterà il suo corpo soggiacente.

Diremo *immersione proiettiva debole* (o semplicemente *immersione*) di Γ in Σ, e scriveremo $e : \Gamma \to \Sigma$, un'applicazione iniettiva $e : P_\Gamma \to P_\Sigma$ che soddisfa le seguenti proprietà:

(E1) $\langle e(P_\Gamma)\rangle_\Sigma = P_\Sigma$;
(E2) per ogni retta $L \in \mathcal{L}_\Gamma$, si ha $\langle e(L)\rangle_\Sigma \in \mathcal{L}_\Sigma$;
(E3) considerate due qualsiasi rette $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_\Gamma$, con $L_1 \neq L_2$, si ha $\langle e(L_1)\rangle_\Sigma \neq \langle e(L_2)\rangle_\Sigma$.

Un'immersione $e : \Gamma \to \Sigma$ è detta *completa* se $\langle e(L)\rangle_\Sigma = e(L)$ per ogni retta $L \in \mathcal{L}_\Gamma$.

Considerati una geometria punto–retta Γ, uno spazio vettoriale V definito su un corpo K, un sottocorpo K_0 di K ed uno spazio vettoriale V_0 definito su K_0, diremo che un'immersione $e : \Gamma \to \mathrm{PG}(V)$ *incorpora* un'altra immersione $e_0 : \Gamma \to \mathrm{PG}(V_0)$ se, riguardato V come K_0–spazio vettoriale, esiste un'applicazione semilineare $f : V_0 \to V$ tale che $e = \mathrm{PG}(f) \cdot e_0$, dove $\mathrm{PG}(f)$ denota l'applicazione da $\mathrm{PG}(V_0) \setminus \mathrm{Ker}(f)$ a $\mathrm{PG}(V)$ indotta da f. Si noti che f è univocamente determinata a meno della scelta di uno scalare e di un'immersione di K_0 in K. Diremo che f è il *morfismo* da e_0 a e e scriveremo $f : e_0 \to e$.

Se $f : e_0 \to e$ è iniettivo e trasforma K_0–basi di V_0 in K–basi di V, allora diciamo che f è un'*estensione scalare*. Quando $K_0 = K$ allora f è suriettiva. In tal caso diremo che f è una *proiezione* di e_0. Un *isomorfismo* di immersioni è una proiezione biettiva.

Da [3], per ogni immersione e di Γ esiste un'immersione $\tilde{e}$ di Γ tale che e è una proiezione di $\tilde{e}$ e, per ogni immersione e' di Γ, se e è proiezione di e' allora e' è proiezione di $\tilde{e}$. L'immersione $\tilde{e}$ è univocamente determinata a meno di isomorfismi ed è detta immersione *universale* relativamente ad e. Diremo che e è *dominante* se e è immersione universale di se stessa (si veda [4, § 8.5]).

2. – Immersioni di spazi polari.

Uno *spazio polare* è uno spazio semilineare $\Gamma = (P_\Gamma, \mathcal{L}_\Gamma)$ che soddisfa il cosiddetto *assioma 1–tutti: per ogni punto p e per ogni retta L, p è congiungibile con esattamente uno oppure con tutti i punti di L* ([1]). Uno spazio polare lo diremo *oridnario* se è non–degenere, irriducicile e di rango almeno tre. Da [4], esistono tre classi di spazi polari ordinari.

Spazi polari classici. Tutti i sottospazi singolari di rango 3 sono piani proiettici Desarguesiani e sono coordinatizzati su uno stesso corpo K_Γ. Inoltre, o ogni retta appartiene ad almeno tre piani oppure $n = 3$, K_Γ è un campo e Γ è la quadrica di Klein $Q^+(5, K_\Gamma)$.

Spazio di Grassmann delle rette non–classico. In tal caso $n = 3$ e Γ è lo spazio di Grassmann di indici $(3, 1)$, $Gr(\mathrm{PG}(3, K))$, i cui punti sono le rette di uno spazio proiettivo 3–dimensionale $\mathrm{PG}(3, K)$ su un corpo non–commutativo K e le cui rette sono i fasci di rette di $\mathrm{PG}(3, K)$. Un piano di Γ è coordinatizzato o su K oppure sul corpo opposto K^{op}, a seconda che esso provenga da una stella di rette di $\mathrm{PG}(3, K)$ oppure da un piano rigato di $\mathrm{PG}(3, K)$.

Spazi polari di Tits. In tal caso $n = 3$ e i piani di Γ sono piani di Moufang.

Da [4], uno spazio polare ordinario $\Gamma = (P_\Gamma, \mathcal{L}_\Gamma)$ è classico se e soltanto se ammette un'immersione completa $e : \Gamma \to \mathrm{PG}(V)$, dove V è definito su K_Γ. Inoltre $\Gamma = (P_\Gamma, \mathcal{L}_\Gamma)$ ammette un'immersione *universale* e_{univ}, cioè un'immersione completa dalla quale tutte le immersioni complete di $\Gamma = (P_\Gamma, \mathcal{L}_\Gamma)$ si possono ottenere come proiezione. Inoltre, se $char(K_\Gamma) \neq 2$, allora e_{univ} è univocamente determinata a meno di isomorfismi.

Nella tesi si è cercato da un lato di estendere tale risultato di Tits realtivamente alle immersioni deboli di spazi polari ordinari in spazi proiettivi di dimensione anche infinita e dall'altro di capire quale fosse il legame tra tali immersioni e le eventuali immersioni universali. È stato così ottenuto il seguente risultato di classificazione ([2]).

TEOREMA 1. – *Se uno spazio polare ordinario $\Gamma = (P_\Gamma, \mathcal{L}_\Gamma)$ ammette un'immersione debole allora*

(1) *Γ è classico;*

(2) *ogni immersione debole di Γ incorpora l'immersione universale e_{univ} di Γ;*

(3) *un'immersione debole di Γ è dominante se e soltanto se è un'estensione scalare di e_{univ}.*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] F. BUEKENHOUT e E. SHULT, *On the foundations of polar geometry*, Geometriae Dedicata, 3 (1974), 155–170.

[2] E. Ferrara Dentice, G. Marino e A. Pasini, *Lax projective embeddings of polar spaces*, Milan J. of Math., **72** (2004), 335–377.
[3] A. Pasini, *Embeddings and expansions*, Bull. Belgian Math. Soc., **10** (2003), 585–626.
[4] J. Tits, *Buildings of Spherical Type and Finite BN-pairs*, Lecture Notes in Math., Springer, **386**, (1974).

Università degli Studi di Napoli "Federico II"
Dipartimento di Matematica "Renato Caccioppoli"
e-mail: giuseppe.marino@unina.it
Dottorato di ricerca in Matematica Applicata e Informatica
(sede amministrativa: Università degli Studi di Napoli "Federico II") - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Ferruccio Orecchia