Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Sabina Milella

Equazioni di evoluzione su intervalli reali, semigruppi e loro approssimazione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 287–290.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_287_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 287-290

Equazioni di evoluzione su intervalli reali, semigruppi e loro approssimazione

SABINA MILELLA

1. – Introduzione.

Oggetto della tesi è lo studio di problemi di evoluzione associati ad operatori differenziali ellittici del secondo ordine (possibilmente degeneri) a coefficienti continui sulla retta reale nel contesto degli spazi di funzioni continue con peso.
Gli obiettivi principali sono:

– studio dell'esistenza ed unicità della soluzione, tramite tecniche della teoria dei semigruppi di operatori;
– rappresentazione del semigruppo associato mediante iterate di operatori lineari e positivi costruiti opportunamente, utilizzando risultati di approssimazione di tipo Trotter;
– analisi qualitativa del semigruppo associato e quindi della soluzione, partendo da informazioni sugli operatori approssimanti.

La linea di ricerca seguita è stata introdotta da Altomare (cfr. [1]) ed è stata applicata con successo ad una ampia classe di problemi di evoluzione in spazi di funzioni reali e continue definite su intervalli compatti, sull'intervallo $[0, +\infty[$ e su sottoinsiemi compatti e convessi di $\mathbb{R}^n$. Nella tesi si affrontano tali problematiche nel caso dell'intera retta reale.

Si presentano dunque alcuni risultati di generazione per l'operatore differenziale associato con condizioni asintotiche di tipo massimale e si determinano vari core per esso.

Si introduce inoltre una nuova classe di operatori lineari e positivi di tipo integrale che generalizzano gli operatori di Gauss-Weierstrass. Tali operatori sembrano avere un proprio indipendente interesse nell'approssimazione delle funzioni continue e di essi si studiano le proprietà di approssimazione sia da un punto di vista qualitativo che quantitativo.

I principali risultati presentati nella tesi sono raccolti nelle Note [3, 4, 5].

2. – Problemi di evoluzione sulla retta reale.

Sia w è una funzione peso su $\mathbb{R}$, i.e. $w \in C_b(\mathbb{R})$ strettamente positiva; si denoti con $C_b^w(\mathbb{R})$ (risp. $C_0^w(\mathbb{R})$) lo spazio di Banach reticolato delle funzioni $f \in C(\mathbb{R})$ tali che $wf \in C_b(\mathbb{R})$ (risp. $wf \in C_0(\mathbb{R})$, i.e. $w(x)f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$), munito della relazione d'ordine naturale e della norma con peso $\|f\|_w := \|wf\|_\infty$.

Si consideri il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \beta(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \gamma(x)u(x,t) & x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}, \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} w(x)u(x,t) = 0, \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty_i} w(x)\left(a(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \beta(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) = 0 \qquad t \geq 0, \end{cases}$$

dove $a, \beta \in C(\mathbb{R})$, a è strettamente positiva, $\gamma \in C_b(\mathbb{R})$.

Tale problema si può riformulare come problema astratto di Cauchy associato all'operatore differenziale $Lu := au'' + \beta u' + \gamma u$ definito sullo spazio $D_w(L) := \{u \in C_0^w(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}) \mid au'' + \beta u' \in C_0^w(\mathbb{R})\}$.

Per un noto risultato della teoria dei semigruppi di operatori, per ogni dato iniziale $u_0 \in D_w(L)$, esiste una soluzione (unica) $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ se e solo se l'operatore $(L, D_w(L))$ è generatore di un semigruppo fortemente continuo $T(t)_{t\geq 0}$ di operatori lineari e limitati su $C_0^w(\mathbb{R})$; in tal caso sussiste la relazione

$$u(x,t) = T(t)u_0(x) \qquad (x \in \mathbb{R},\ t \geq 0).$$

Relativamente ad una possibile rappresentazione del semigruppo, si prendono in esame alcune classi speciali di operatori. Precisamente si indaga la generazione nei seguenti casi.

(1) Siano $a(x) = O(x^2)$ e $\beta(x) = O(|x|)$ per $x \to \pm\infty$. Siano inoltre $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ e si assuma che:
(i) la funzione $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\beta(s)}{a(s)}\,ds$ è localmente limitata a $+\infty$ oppure $\beta(x) \geq 0$ per $x \geq \delta$,
(ii) la funzione $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\beta(s)}{a(s)}\,ds$ è localmente limitata a $-\infty$ oppure $\beta(x) \leq 0$ per $x \leq -\delta$.

(2) Siano $a = \dfrac{\sigma^2}{2}$ e $\beta = \dfrac{\sigma\sigma'}{2}$, dove $\sigma \in C^1(\mathbb{R})$ è una funzione strettamente positiva e tale che $\sigma^{(r)}(x) = O(|x|^{1-r})$ per $x \to \pm\infty$ ed $r = 0, 1$.

In entrambi i casi si assuma che la funzione peso w sia derivabile due volte e tale che $\omega := \sup\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{|a(2(w')^2 - ww'') - \beta ww'|}{w^2} < +\infty$.

Nelle precedenti ipotesi, si prova il seguente teorema, la cui dimostrazione si basa su un recente risultato di generazione dovuto ad Altomare ed Attalienti (cfr. Theorem 2.3 in [2]).

TEOREMA 2.1. – *L'operatore* $(L, D_w(L))$ *genera un semigruppo fortemente continuo e positivo* $(T(t))_{t\geq 0}$ *su* $C_0^w(\mathbb{R})$ *tale che* $\|T(t)\| \leq e^{(\omega + \|\gamma\|_\infty)t}$, *per ogni* $t \geq 0$.

Dalla positività del semigruppo segue la positività della soluzione laddove il dato iniziale u_0 sia positivo. Si ottiene inoltre la stima $|u(x,t)| \leq e^{(\omega + \|\gamma\|_\infty)} \|u_0\|_w w(x)^{-1}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$.

Nel caso (2), partendo dall'equazione differenziale stocastica associata all'operatore L, si ottiene la seguente rappresentazione integrale esplicita del semigruppo

$$T(t)f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f \circ \varphi^{-1}\right)(u + \varphi(x)) e^{-\frac{u^2}{2t}} du$$

per ogni $t > 0, f \in C_0^w(\mathbb{R})$ ed $x \in \mathbb{R}$. Dove $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ è tale che $\varphi' = \dfrac{1}{\sigma}$ e φ^{-1} denota la funzione inversa di φ.

3. – Operatori di tipo integrale in spazi di funzioni continue con peso di una variabile reale

Sia $E(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni $f \in C(\mathbb{R})$ tali che $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(ax+b)| e^{-\frac{x^2}{2}} dx < +\infty$, per ogni $a \geq 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Assegnate tre funzioni $\alpha, \beta \in C(\mathbb{R})$, α positiva, e $\gamma \in C_b(\mathbb{R})$, si considerino gli operatori lineari e positivi definiti ponendo

$$G_n^*(f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{\gamma}{n}\right) f\right) \left(\sqrt{\frac{2\alpha(x)}{n}} y + x + \frac{\beta(x)}{n}\right) e^{-y^2/2} dy,$$

per $n \geq \|\gamma\|_\infty, f \in E(\mathbb{R})$ ed $x \in \mathbb{R}$. Si denoti con G_n l'operatore G_n^* per $\gamma = 0$.

Si osservi che se w è una funzione peso su $\mathbb{R}$ e se per ogni coppia di insiemi compatti $I \subset \mathbb{R}_+$ e $J \subset \mathbb{R}$ esiste $h \in L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$\frac{e^{-y^2/2}}{w(ay+b)} \leq h(y) \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R},\ a \in I,\ b \in J$$

allora $C_b^w(\mathbb{R}) \subset E(\mathbb{R})$. Inoltre, se $G_n\left(\dfrac{1}{w}\right) \in C_b^w(\mathbb{R})$, allora G_n^* è continuo da $C_b^w(\mathbb{R})$ in sé e $\|G_n^*\| \leq \left(1 + \dfrac{\|\gamma\|_\infty}{n}\right) \left\|G_n\left(\dfrac{1}{w}\right)\right\|_w$.

Sotto opportune ipotesi che legano i coefficienti α e β al peso w, si dimostra che per ogni $f \in C_0^w(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty} G_n^*(f) = (f) \quad \text{in } C_0^w(\mathbb{R})$$

ed uniformemente sui sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$; in particolare, se le funzioni α e β sono limitate, la convergenza è uniforme su tutto $\mathbb{R}$ in alcuni sottospazi di $C_b(\mathbb{R})$. Se $\beta = \gamma = 0$ la convergenza è monotona sulla classe delle funzioni convesse.

Accanto a tali risultati si presentano alcune stime dell'ordine di approssimazione.

Gli operatori G_n^* sono legati in modo naturale all'operatore differenziale L definito nella Sezione 2 tramite la seguente relazione asintotica

$$\lim_{n\to\infty} w\left[n\left(G_n^*(f) - f\right) - (\alpha f'' + \beta f' + \gamma f)\right] = 0 \quad \text{uniformemente su } \mathbb{R},$$

per ogni funzione $f \in C^2(\mathbb{R})$ con derivata seconda uniformemente continua e limitata.

In particolare tale formula sussiste se $\alpha(x) = O(x^2)$ e $\beta(x) = O(|x|)$ per $x \to \pm\infty$ e se $w_m(x) := (1 + x^{2m})^{-1}$ $(x \in \mathbb{R}, m \geq 2)$.

Si supponga allora che siano soddisfatte le ipotesi di generazione considerate nella Sezione 1. Sia $m \geq 2$ e si denoti con $(T_m(t))_{t\geq 0}$ il semigruppo generato da $(L, D_{w_m}(L))$.

In tale contesto si riescono a determinare vari core per l'operatore $(L, D_{w_m}(L))$ ed è quindi possibile rappresentare il semigruppo $(T_m(t))_{t\geq 0}$ tramite le iterate degli operatori G_n^*. Si ha ad esempio il seguente risultato.

TEOREMA 3.1. – *Si assuma che:*

(i) *esiste* $\delta > 0$ *tale che* $\alpha \in C^2(\mathbb{R}\backslash[-\delta, \delta])$ *e* $\beta \in C^1(\mathbb{R}\backslash[-\delta, \delta])$,
(ii) $(\alpha' - \beta)(x) = O(x)$ *e* $(\alpha'' - \beta')(x) = O(\mathbf{1})$ *per* $x \to \pm\infty$;

Allora, per ogni $f \in C_0^{w_m}(\mathbb{R})$ *e* $t \geq 0$

$$T_m(t)f = \lim_{n\to+\infty} \left(G_n^*\right)^{k(n)} f \quad \text{in } C_0^{w_m}(\mathbb{R}),$$

dove $(k(n))_{n\geq 1}$*è una successione di interi positivi tale che* $k(n)/n \to t$ *e* $(G_n^*)^{k(n)}$ *denota l'iterata di ordine* $k(n)$ *di* G_n^*.

In particolare la convergenza è uniforme sui compatti di $\mathbb{R}$.

Dalla formula di approssimazione ottenuta e da analoghe proprietà degli operatori G_n^* segue che il semigruppo $(T_m(t))_{t\geq 0}$, in diverse situazioni, conserva la classe delle funzioni affini, convesse e lipschitziane.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] F. ALTOMARE, *Approximation theory methods for the study of diffusion equations*, Approximation Theory, Proc. IDOMAT '95, Mathematical Research, Academie Verlag, Berlin, **86** (1995), 9–26
[2] F. ALTOMARE e A. ATTALIENTI, *Degenerate evolution equations in weighted continuous function spaces, Markov processes and the Black-Scholes equation-Part II*, Result. Math. **42** (2002), 212–228.
[3] F. ALTOMARE e S. MILELLA, *Integral-type operators on continuous function spaces on the real line*, preprint 2006, submitted.
[4] F. ALTOMARE e S. MILELLA, *On the C_0-semigroups generated by second order differential operators on the real line*, preprint 2006, submitted.
[5] S. MILELLA, *On a class of second order differential operators on the real line*, preprint 2006.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari
e-mail: smilella@dm.uniba.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Bari) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Francesco Altomare
Correlatore: Dott. Lorenzo D'Ambrosio