Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Gianluca Mola

Attrattori globali ed esponenziali per un sistema di phase-field conservato con legge di conduzione termica di tipo Gurtin-Pipkin

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 291–294.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_291_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 291-294

Attrattori globali ed esponenziali per un sistema di phase-field conservato con legge di conduzione termica di tipo Gurtin-Pipkin

GIANLUCA MOLA

1. – Il modello.

Questo lavoro di tesi si occupa dell'analisi delle soluzioni di un sistema di equazioni integro-differenziali a derivate parziale che sorge dalla modellazione matematica di fenomeni di separazione di fase dovuti a variazioni di temperatura in materiali speciali quali, ad esempio, certi liquidi ad alta viscosità. Per ulteriori dettagli relativi al modello e alle tecniche rinviamo il lettore ai contributi [2, 3] e ai riferimenti in essi contenuti.

Supponiamo che un dominio tridimensionale Ω, limitato e con frontiera regolare, sia occupato da un materiale a due fasi. Supponiamo inoltre che tali fasi coesistano ad una certa temperatura critica θ_c. Definiamo dunque il *campo di variazione termica* come $\vartheta = (\theta - \theta_c)/\theta_c$, essendo θ la temperatura assoluta. Accanto ad essa, introduciamo il *parametro d'ordine* (o *phase-field*) χ che rende conto del cambiamento di fase. Entrambe le variabili di stato ϑ e χ dipendono da $x \in \Omega$ e da $t \in [0, \infty)$. Deduciamo ora le equazioni che governano l'evoluzione di queste variabili.

L'equazione di bilancio termico ha la forma seguente

$$\partial_t \mathcal{E} + \nabla \cdot \boldsymbol{q} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times [0, \infty),$$

ove l'*energia interna* e il *vettore flusso di calore* sono legati a ϑ e χ dalle leggi costitutive

$$\mathcal{E}(x,t) = \vartheta(x,t) + \chi(x,t), \qquad \boldsymbol{q}(x,t) = -\int_0^\infty k(s)\nabla\vartheta(x, t-s)ds.$$

La seconda delle quali è nota come legge di conduzione termica di Gurtin-Pipkin. Il *nucleo di memoria* k è una funzione positiva e sommabile. Se tale nucleo si riduce alla delta di Dirac, otteniamo la classica legge di Fourier. Per mettere in evidenza il tempo di rilassamento caratteristico del nucleo, definiamo per ogni $\varepsilon \in (0, 1]$, il *nucleo riscalato* $k_\varepsilon(s) = \varepsilon^{-1}k\big(\varepsilon^{-1}s\big)$. Si noti che $k_\varepsilon \to \delta_0$ (delta di Dirac concentrata in 0) nel senso delle distribuzioni, per $\varepsilon \to 0$. Tenendo conto di tale riscalamento, sostituendo le leggi costitutive nell'equazione di bilanciamento dell'energia, otteniamo l'equazione integro-differenziale

$$\partial_t(\vartheta + \chi) - \int_0^\infty k_\varepsilon(s)\Delta\vartheta(t-s)ds = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times [0, \infty). \tag{1}$$

L'equazione di evoluzione per il parametro d'ordine χ è ricavata partendo dal funzionale energia libera

$$\mathcal{F}_{\vartheta}\{\chi\} = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}|\nabla\chi|^2 + \Phi(\chi) - \vartheta\chi\right] d\Omega,$$

ove la non linearità Φ è una funzione potenziale di tipo "doppio pozzo" (tipicamente, $\Phi(r) = (r^2 - 1)^2$). L'ipotesi fenomenologica è che la velocita di χ sia proporzionale alla diffusione della derivata funzionale di $\mathcal{F}_{\vartheta}\{\chi\}$. Ciò conduce all'equazione di tipo Cahn-Hilliard

$$\partial_t\chi = \Delta\left(\frac{\delta\mathcal{F}_{\vartheta}\{\chi\}}{\delta\chi}\right) = \Delta(-\Delta\chi + \phi(\chi) - \vartheta) = 0,$$

ove $\Phi' = \phi$. Più precisamente, considereremo una versione più generale di tale equazione, che tiene conto anche di possibili effetti di viscosità mediante un termine $a\partial_t\chi$. L'equazione modificata sarà dunque

$$\partial_t\chi - \Delta(-\Delta\chi + a\partial_t\chi + \phi(\chi) - \vartheta) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times [0, \infty), \tag{2}$$

dove la costante $a \geq 0$ è il parametro di *viscosità*. Associamo alle equazioni (\ref1)-(\ref2) condizioni al bordo di tipo adiabatico

$$\partial_{\boldsymbol{n}}\vartheta = \partial_{\boldsymbol{n}}\chi = \partial_{\boldsymbol{n}}(-\Delta\chi + a\partial_t\chi + \phi(\chi) - \vartheta) = 0 \qquad \text{su} \quad \partial\Omega \times [0, \infty),$$

e condizioni iniziali $\vartheta(0) = \vartheta_0$, $\chi(0) = \chi_0$ e $\vartheta(-s) = \vartheta_1(s)$, $s > 0$,

ove l'ultima condizione tiene conto della storia passata della temperatura fino all'istante iniziale. Osserviamo che le condizioni al bordo implicano la conservazione delle medie spaziali dell'*entalpia* $e = \vartheta + \chi$ e di χ, vale a dire, per ogni $t \geq 0$,

$$\int_{\Omega} e(t)\, d\Omega = \int_{\Omega} (\vartheta_0 + \chi_0)\, d\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \chi(t)\, d\Omega = \int_{\Omega} \chi_0\, d\Omega. \tag{3}$$

2. – Il sistema dinamico.

Riformuliamo il problema descritto in precedenza come sistema dinamico infinito-dimensionali (si veda, ad esempio [4]). A tale scopo, introduciamo la variabile *storia passata*, definita come (cfr. [3])

$$\eta^t(s) = -\int_0^s \Delta(e(t-y) - \chi(t-y))dy \qquad \text{in } \Omega, \ \ (t,s) \in [0,\infty) \times (0,\infty),$$

soggetta alle condizioni iniziali

$$\eta^t(0) = 0, \quad \eta^0(s) = \eta_0(s) = -\int_0^s \Delta\vartheta_1(y)dy \qquad \text{in } \Omega, \ \ t, s \in (0,\infty).$$

È facile verificare che η soddisfa l'equazione di tipo iperbolico

$$\partial_t \eta = -\partial_s \eta - \Delta(e-\chi) \qquad \text{in } \Omega, \ \ (t,s) \in (0,\infty)\times(0,\infty),$$

e inoltre risulta

$$-\int_0^\infty k_\varepsilon(s)\Delta(e(t-s)-\chi(t-s))ds = \int_0^\infty \mu_\varepsilon(s)\eta^t(s)ds \qquad \text{in } \Omega, \ \ s\in(0,\infty),$$

ove si è posto $\mu_\varepsilon = -k'_\varepsilon$. Conseguentemente, la nuova formulazione del problema **P**. *Trovare una soluzione* (e,χ,η) *del sistema*

$$\partial_t e + \int_0^\infty \mu_\varepsilon(s)\eta(s)ds = 0,$$
$$\partial_t\chi - \Delta(-\Delta\chi + a\partial_t\chi + \phi(\chi) - (e-\chi)) = 0,$$
$$\partial_t\eta = -\partial_s\eta - \Delta(e-\chi),$$

in $\Omega\times(0,\infty)$, soggetta alle condizioni iniziali $(e(0),\chi(0),\eta^0) = (e_0,\chi_0,\eta_0)$.

L'insieme degli stati iniziali nel quale ambientare tale problema è lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\varepsilon = H\times V\times\mathcal{M}_\varepsilon$ se $\varepsilon\in(0,1]$ e $\mathcal{H}_0 = H\times V$, dove $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$ e $\mathcal{M}_\varepsilon = L^2_{\mu_\varepsilon}(0,\infty;H^{-1}(\Omega))$. Si noti che il caso $\varepsilon = 0$, che corrisponde al problema con legge di Fourier, lo spazio $\mathcal{H}_0$ degenera perdendo la componente di memoria. Costruendo un opportuno schema di approssimazione di tipo Faedo-Galerkin, è possibile provare che il problema **P** genera un sistema dinamico $S^{a,\varepsilon}(t)$ sullo spazio delle fasi $\mathcal{H}_\varepsilon$, per ogni $a\geq 0$ e $\varepsilon\in[0,1]$ (cf. [2]).

3. – I risultati.

I risultati della tesi sono una estensione di alcuni risultati contenuti in [2] nello spirito di [1]. L'obiettivo generale quello di dimostrare l'esistenza di opportuni insiemi invarianti, abbastanza piccoli (i.e. compatti e di dimensione frattale finita), che caratterizzino la dinamica del sistema. Più precisamente, ci occupiamo dell'esistenza dell'*attrattore globale* e di un *attrattore esponenziale*. Ricordiamo che l'attrattore globale (qualora esista) è l'unico insieme compatto e pienamente invariante che attrae insiemi limitati di dati iniziali, rispetto alla semidistanza di Hausdorff. L'attrattore esponenziale è invece un insieme compatto, invariante e di dimensione frattale finita che attrae (sempre rispetto alla semidistanza di Hausdorff) insiemi limitati di dati iniziali a velocità esponenziale. Contrariamente all'attrattore globale, esso non è unico. Analizziamo inoltre la stabilità degli attrattori globali ed esponenziali quando ε tende a zero e la convergenza agli equilibri di singole traiettorie.

Il sistema dinamico $(\mathcal{H}_\varepsilon, S^{a,\varepsilon}(t))$ è *dissipativo*. Questo significa, dal punto di vista matematico, che traiettorie che hanno origine in un insieme limitato $\mathcal{B}$ dello spazio delle fasi entrano, dopo un tempo finito (che dipende solo da $\mathcal{B}$) in una regione limitata dello spazio delle fasi (detta *insieme assorbente*). Per dimostrare la dissipatività di $S^{a,\varepsilon}(t)$, è necessario porre restrizioni sullo spazio $\mathcal{H}_\varepsilon$ e sul nucleo μ. Per quanto concerne il primo, avvalendoci delle leggi di conservazione (3), definiamo, per ogni $\beta, \gamma \geq 0$ fissati, lo spazio metrico completo $\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon$ degli elementi di $\mathcal{H}_\varepsilon$ tali che $\left|\int_\Omega e(t)\, d\Omega\right| \leq \beta$ e $\left|\int_\Omega \chi(t)\, d\Omega\right| \leq \gamma$. Riguardo il secondo, supporremo la validità dell'ipotesi! di decadimento $\mu'(s) + \delta\mu(s) \leq 0$, per qualche $\delta > 0$. I primi risultati riguardano la dissipatività e l'esistenza dell'attrattore globale.

TEOREMA 1. – *Il sistema dinamico $S^{a,\varepsilon}(t)$ ristretto a $\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon$ possiede un insieme assorbente limitato $\mathcal{B}_\varepsilon$, il cui raggio è indipendente da $\varepsilon \in [0, 1]$ e da $a \geq 0$.*

TEOREMA 2. – *Il sistema dinamico $S^{a,\varepsilon}(t)$ ammette un attrattore globale $\mathcal{A}_{a,\varepsilon}$. Inoltre, per $a > 0$ la dimensione frattale di $\mathcal{A}_{a,\varepsilon}$ è finita e, per ogni a fissato, la famiglia $\{\mathcal{A}_{a,\varepsilon}\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ è superiormente semicontinua, rispetto alla semidistanza di Hausdorff in $\mathcal{H}_\varepsilon$, per $\varepsilon \to 0$.*

Il principale risultato della tesi riguarda l'esistenza di una famiglia *robusta* di attrattori esponenziali (cfr. [1]). In sostanza, la dinamica non transitoria del sistema perturbato è prossima a quella del sistema non perturbato ($\varepsilon = 0$).

TEOREMA 3. – *Esiste $\varepsilon_* \leq 1$ tale che, per ogni $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$, il sistema dinamico $S^{a,\varepsilon}(t)$ ammette una famiglia di attrattori esponenziali $\mathcal{E}_{a,\varepsilon}$ con proprietà uniformi rispetto a ε. Inoltre, per ogni a fissato, la famiglia $\{\mathcal{E}_{a,\varepsilon}\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_*]}$ è continua rispetto alla distanza di Hausdorff in $\mathcal{H}_\varepsilon$, per $\varepsilon \to 0$.*

Infine dimostriamo la convergenza di traiettorie singole a singoli stati stazionari. Questo fatto non è ovvio poichè l'insieme degli equilibri può essere un *continuum*. Tuttavia, usando un'opportuna disuguaglianza di tipo ojasiewicz-Simon, è possibile provare il

TEOREMA 4. – *Sia ϕ reale analitica. Per ogni $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ fissato, se $(e_0, \chi_0, \eta_0) \in \mathcal{H}_\varepsilon$ è abbastanza regolare, allora la corrispondente traiettoria $S^{a,\varepsilon}(t)(e_0, \chi_0, \eta_0)$ converge in $\mathcal{H}_\varepsilon$ ad uno stato stazionario $(e_\infty, \chi_\infty, \eta_\infty)$ del problema* **P** *per $t \to \infty$.*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] CONTI M., PATA V. e SQUASSINA M., *Singular limit of differential system with memory*, Indiana Univ. Math. J., **55** (2006), 169-216.

[2] GRASSELLI M. e PATA V., *Attractor for a conserved phase-field system with hyperbolic heat conduction*, Math. Methods Appl. Sci., **27** (2004), 1917-1934.

[3] GRASSELLI M. e PATA V., *Attractors of phase-field systems with memory*, Chap. 7 of "Mathematical methods and models in phase transitions", (A. Miranville, Ed.), Nova Science Publishers, Inc., (2005), 157-175.

[4] TEMAM R., *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer-Verlag, New York, (1988).

Dipartimento di Matematica "F.Brioschi", Politecnico di Milano
e-mail: gianluca.mola@polimi.it
Dottorato di ricerca in Ingegneria Matematica
(sede amministrativa: Politecnico di Milano) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. M. Grasselli