Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Daniele Ettore Otera

Topologia asintotica dei gruppi connessione all'infinito e semplice connessione geometrica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 303–306.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_303_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 303-306

Topologia asintotica dei gruppi connessione all'infinito e semplice connessione geometrica

DANIELE ETTORE OTERA

Il soggetto generale della Tesi di Dottorato è la *Teoria Geometrica dei Gruppi*: invarianti di quasi-isometrie dei gruppi le cui definizioni sono ispirate dalla topologia (all'infinito) in dimensione bassa. Le nozioni centrali studiate sono: la *semplice connessione all'infinito* e il suo tipo di crescita, la funzione *profondità dei capi* (end-depth), la *semplice connessione geometrica* e la *proprietà di Tucker*. Queste proprietà "catturano", in un certo senso, il comportamento all'infinito dei gruppi visti come spazi metrici (quindi, esse non dicono nulla per i gruppi finiti).

Questa filosofia viene da M.Gromov (vedi [2]): dato un problema algebrico, tradurlo in un problema geometrico per renderlo visibile. Il problema algebrico generale è quello di capire i gruppi *finitamente generati*. Un tale gruppo possiede una metrica naturale: la *metrica delle parole*, che, però, dipende dal sistema di generatori. Tuttavia, le metriche associate a due distinti sistemi di generatori dello stesso gruppo sono "simili", ovvero *quasi-isometriche*. Ricordiamo che due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) sono *quasi-isometrici* se esistono una funzione $f : X \to Y$ e due costanti reali positive $\lambda > 0$ e $C \geq 0$ tali che:

$$\lambda^{-1} d_X(x_1, x_2) - C \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + C, \quad \text{e}$$
$$\forall y \in Y, \ \exists x \in X \text{ tale che } d_Y(y, f(x)) \leq C.$$

L'esempio tipico è il seguente: sia M una varietà riemanniana compatta, allora il suo gruppo fondamentale e il suo rivestimento universale sono quasi-isometrici.

Poiché non è possibile classificare i gruppi finitamente presentati (il problema della parola non è decidibile), lo scopo di Gromov è quello di classificare i gruppi a meno di quasi-isometrie. In quest'ottica, le proprietà interessanti sono quelle invarianti per quasi-isometrie (queste proprietà sono chiamate *geometriche* o *asintotiche*).

Oltre alla Congettura di Poincaré, una delle congetture più importanti nella topologia di dimensione bassa era la *Universal Covering Conjecture*: se M è una 3-varietà chiusa, orientabile, irriducibile, con un $\pi_1(M)$ infinito, allora il rivestimento universale di M è omeomorfo a $\boldsymbol{R}^3$. Tale congettura non vale in dimensione più grande (M. Davis, 1983): per ogni $n \geq 4$ esistono varietà chiuse, asferiche (i.e. il cui rivestimento universale è contraibile) non ricoperte dallo spazio Euclideo. Per questo notevole risultato, Davis ha utilizzato una proprietà topologica che caratterizza gli spazi euclidei tra gli spazi contraibili: la semplice connessione all'infinito.

Uno spazio X è *semplicemente connesso all'infinito* (o *sci*) se per ogni compatto $K \subset X$ esiste un compatto $H \subset X$ contenente K tale che i lacci al di fuori di H sono banali in $X - K$ (ovvero: i lacci all'infinito bordano dischi vicino l'infinito).

In realtà Davis mostra che per ogni $n \geq 4$ esistono varietà chiuse e asferiche il cui rivestimento universale non è semplicemente connesso all'infinito. Si osservi che la semplice connessione all'infinito è una condizione necessaria e sufficente affinchè una varietà aperta contraibile sia diffeomorfa (solo omeomorfa in dimensione 4) allo spazio euclideo (Stallings per $n \geq 5$, Freedman per $n = 4$, Edwards per $n = 3$).

Poenaru ha dato vari risultati parziali alla Covering Conjecture in dimensione 3. Una delle tecniche da lui usate (vedi [5]) è la decomposizione in manici: cercare di trovare decomposizioni senza manici di indice uno (almeno "stabilmente", cioè considerando il prodotto di una 3-varietà con un n-disco). Le varietà che ammettono una decomposizione in manici senza 1-manici sono dette *geometricamente semplicemente connesse* (o *gsc*). Un'estensione di questo concetto nella categoria dei poliedri è la *semplice connessione geometrica debole*. Un poliedro P è geometricamente semplicemente connesso in modo debole (o *wgsc*) se ammette un'esaustione di sotto-poliedri compatti e semplicemente connessi. Gli studi eseguiti suggeriscono la seguente modifica alla Universal Covering Conjecture (generalizzata):

CONGETTURA 1. – *I rivestimenti universali di varietà chiuse e asferiche sono geometricamente semplicemente connesse in modo debole.*

1. – I risultati.

1.1 – *Semplice connessione all'infinito e end-depth*

Nella Tesi ci siamo interessati allo studio delle suddette proprietà definite per i gruppi discreti.

DEFINIZIONE 1. – *Un gruppo G è semplicemente connesso all'infinito (sci o $\pi_1^\infty G = 0$) se il rivestimento universale di qualche complesso cellulare compatto X avente G come gruppo fondamentale è semplicemente connesso all'infinito.*

Questa definizione è ben posta, ovvero indipendente dalla scelta di X (vedi [3]); inoltre, in [1], abbiamo cercato di raffinare questa proprietà definendo una funzione che misura "in che modo" un gruppo è sci (se in modo banale o no).

DEFINIZIONE 2. – *Sia X uno spazio metrico tale che $\pi_1 X = 0$ e $\pi_1^\infty X = 0$. Il rate of vanishing del π_1^∞, denotato $V_1(r)$, è l'*inf *degli $N(r)$ con la proprietà che ogni laccio al di fuori della bolla $B(N(r))$ di raggio $N(r)$ borda un 2-disco al di fuori di $B(r)$.*

Definendo un'opportuna relazione d'equivalenza sulle funzioni (per evitare la dipendenza dal sistema di generatori), ci siamo interessati al tipo di crescita della funzione V_1 per i gruppi (che chiamiamo *crescita del π_1^∞*), dimostrando che:

TEOREMA 1. – *La semplice connessione all'infinito e il suo tipo di crescita sono degli invarianti di quasi-isometrie dei gruppi.*

Il passo successivo è stato quello di calcolare tale funzione e abbiamo ottenuto:

TEOREMA 2. – • *I gruppi di Coxeter, di Artin e i buildings Euclidei semplicemente connessi all'infinito hanno una crescita del π_1^∞ lineare.*

• *La funzione V_1 è lineare per i reticoli co-compatti di gruppi di Lie semi-semplici, nilpotenti e risolubili. Ciò è vero anche per alcune classi di reticoli non-uniformi di gruppi di Lie di rango almeno 2 (quelli di rango razionale 1).*

COROLLARIO 1. – *La funzione V_1 è lineare per i gruppi fondamentali di 3-varietà.*

D'altro canto, ci si aspetta che esistano gruppi con un V_1 non lineare; ma, la stabilità di tale funzione rende la costruzioni di esempi espliciti molto difficile. A tale scopo abbiamo definito un funzione 0-dimensionale analoga a V_1: la *profondità del capo* (o *end-depth*). La profondità del capo è, per definizione, la crescita della funzione $V_0(r) = \inf(R)$ con la proprietà che due punti presi al di fuori della bolla di raggio R possono essere uniti da un cammino che sta al di fuori della bolla di raggio r. Questo nuovo invariante, che "classifica" i gruppi a un solo capo (one-ended), è anche legato alla crescita del π_1^∞. Infatti:

TEOREMA 3. – • *La profondità del capo è un invariante asintotico dei gruppi.*

• *I gruppi iperbolici di Gromov e $CAT(0)$ hanno una profondità del capo lineare.*

• *Se G_1 e G_2 sono due gruppi a un solo capo con una profondità del capo lineare, allora il prodotto amalgamato $G = G_1 *_H G_2$ ha una profondità del capo lineare.*

• *Se G_1 e G_2 sono due gruppi semplicemente connessi all'infinito con una funzione V_1 lineare e se H è un sottogruppo a un solo capo di G_1 e G_2, allora la crescita della semplice connessione all'infinito del prodotto amalgamato $G = G_1 *_H G_2$ è la stessa della profondità del capo di H (i.e. $V_1(G) = V_0(H)$).*

1.2 – *Semplice connessione geometrica e proprietà di Tucker.*

Nella seconda parte delle Tesi ci siamo interessati al concetto di semplice connessione geometrica per i gruppi. La motivazione originaria fu che Casson e Poenaru studiarono alcune condizioni geometriche del grafo di Cayley di gruppi fondamentali di 3-varietà che implicavano la Universal Covering Conjecture. La prova consisteva nell'approssimare il rivestimento universale con 3-varietà compatte e semplicemente connesse. Questa condizione fu poi adattata da Brick per i gruppi, e fu chiamata *quasi-simple filtration*. Poiché è alquanto difficile provare che un dato complesso non verifica la proprietà *qsf* di Brick, noi abbiamo considerato una condizione simile ma più naturale: la *semplice connessione geometrica debole* (*wgsc*).

DEFINIZIONE 3. – *Un gruppo G è wgsc se il rivestimento universale X di qualche complesso cellulare compatto avente G come gruppo fondamentale è wgsc (i.e. se ogni compatto di X è contenuto in un compatto semplicemente connesso).*

Si noti che questa definizione dipende dalla presentazione del gruppo (esiste una presentazione di **Z** il cui 2-complesso di Cayley non é wgsc). Ciononostante:

TEOREMA 4. – *Le proprietà qsf, wgsc e gsc sono equivalenti per i gruppi di tipo finito.*

Essendo gli invarianti di natura topologica molto stabili, esempi in cui la topologia è non banale (e.g. gruppi non wgsc) sono molto difficili da trovare. Tuttavia, le varietà contraibili non wgsc costruite da Funar e Gadgil suggeriscono l'esistenza di gruppi non wgsc. Tali gruppi risulterebbero estremamente *non generici*. Infatti:

TEOREMA 5. – • *Il prodotto amalgamato di gruppi wgsc è wgsc.*

• *Tutti i gruppi a un solo relatore, i gruppi semplicemente connessi all'infinito, i gruppi quasi-convessi, i gruppi iperbolici o CAT(0), combable, risolubili, e i gruppi che ammettono un "complete geodesic rewriting system", sono wgsc.*

Inoltre, richiedere che, per un 2-complesso di Cayley di un gruppo, il π_1 delle bolle metriche sia generato da lacci uniformemente piccoli, implica che il gruppo è wgsc di "tipo" semplice (proprietà non vera in generale per i gruppi wgsc). Infine:

TEOREMA 6. – *Il gruppo di Grigorchuk e la sua estensione HNN sono wgsc.*

Nell'ultima parte della Tesi, ci siamo occupati di una generalizzazione della semplice connessione geometrica per spazi non semplicemente connessi: la proprietà di Tucker (che esprime il fatto che qualche decomposizione in manici necessita solo di un numero finito di 1-manici, senza alcun controllo sul loro numero).

DEFINIZIONE 4. – *Una varietà M è Tucker se per ogni sottovarietà compatta K, il gruppo fondamentale di $M - K$ è finitamente generato.*

Usando alcune tecniche di Poenaru (vedi [5]) abbiamo dimostrato ([4]) che:

TEOREMA 7. – *La proprietà di Tucker e la quasi-simple-filtration di Brick sono invarianti di omotopia propria (i.e. l'immagine inversa di un compatto è compatta).*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] L. FUNAR e D.E. OTERA, *A refinement of the simple connectivity at infinity of groups*, Archiv der Mathematik (Basel), **81**, no. 3 (2003), 360-368.

[2] M. GROMOV, *Asymptotic invariants of infinite groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **182** (1993), 1-295.

[3] D.E. OTERA, *On the simple connectivity of groups*, Bollettino U.M.I, (8) **6-B**, no. 3 (2003), 739-748.

[4] D.E. OTERA, *On the proper homotopy invariance of the Tucker property*, Acta Mathematica Sinica, English Series, **23**, no. 3 (2007), 571-576.

[5] V. POENARU, *Killing handles of index one stably and π_1^∞*, Duke Mathematical Journal, **63**, (1991), 431-447.

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni
e-mail: oterad@math.unipa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Palermo) - Ciclo XV
Tesi effettuata in *co-tutela* con l'Université de Paris XI - Orsay
Direttori di ricerca: Corrado Tanasi (Palermo) e Valentin Poenaru (Paris XI)