Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Anita Pasotti

Decomposizioni di grafi con un gruppo di automorfismi strettamente transitivo sui vertici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 311–314.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_311_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 311-314

Decomposizioni di grafi con un gruppo di automorfismi strettamente transitivo sui vertici

ANITA PASOTTI

La teoria delle decomposizioni di grafi [4], nata negli anni '60 come generalizzazione della teoria dei disegni in senso classico [1], è ora uno dei settori più studiati della matematica discreta anche in considerazione delle sue molteplici applicazioni in svariati ambiti.

Dato un sottografo Γ di un grafo K, una *Γ-decomposizione di K*, detta anche un *(K, Γ)-disegno*, è un insieme $\mathcal{B}$ di grafi isomorfi a Γ, detti *blocchi*, i cui spigoli costituiscono una partizione dell'insieme degli spigoli di K.

Nel caso in cui K e Γ siano grafi completi di ordine v e k rispettivamente, una tale decomposizione è del tutto equivalente a un 2-$(v, k, 1)$ disegno che è usualmente definito come una coppia $(V, \mathcal{B})$ dove V è un insieme di v punti e $\mathcal{B}$ è un insieme di k-sottoinsiemi di V, detti *blocchi*, con la proprietà che per ogni coppia di punti distinti x ed y di V vi sia esattamente un blocco di $\mathcal{B}$ che li contenga entrambi. Un tale disegno è anche detto un *2-disegno di Steiner di ordine v con blocchi di cardinalità k*.Un gruppo di automorfismi di un (K, Γ)-disegno $\mathcal{B}$ è un gruppo di permutazioni sui vertici di K che muta $\mathcal{B}$ in se stesso. I disegni maggiormente studiati sono quelli che ammettono un "ricco" gruppo di automorfismi in quanto essi, rispetto a quelli *rigidi* (cioè privi di automorfismi non banali), oltre a potersi presentare in modo più economico ed elegante sono più facilmente "catturabili" grazie all'ausilio fondamentale dell'algebra.

Nella tesi l'attenzione è stata focalizzata sui disegni che ammettono un gruppo di automorfismi G strettamente transitivo sui vertici, in particolare su quelli *abeliani elementari*, ossia quelli in cui tale G è il gruppo additivo di un campo finito.

Un *sistema di k-cicli di ordine v* [4] è una decomposizione del grafo completo su v vertici i cui blocchi sono cicli di lunghezza k, ossia un (K_v, C_k)-disegno. Il problema di determinare per quali coppie (v, k) un tale disegno esista è stato studiato da molti matematici sin dagli anni '60 ed è stato completamente risolto solo nel 2002.

TEOREMA 1. – *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista un sistema di k cicli di ordine v è che v sia un intero dispari non inferiore a k per cui si abbia* $\dfrac{v(v-1)}{2k} \in N$.

In particolare sono molto studiati i sistemi di cicli di Steiner.

DEFINIZIONE 1. – *Un sistema di k-cicli di ordine v è di Steiner se per ogni spigolo* $[x, y]$ *di* K_v *e per ogni intero positivo* $i \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ *esiste esattamente un ciclo del sistema in cui x ed y appaiono a distanza i.*

Il tema centrale della tesi è la seguente generalizzazione del concetto appena definito.

DEFINIZIONE 2. – *Un* Γ*-sistema di Steiner di ordine v è un* (K_v, Γ)*-disegno con la proprietà che per ogni coppia* (x, y) *di vertici distinti di* K_v *e per ogni intero positivo i che non superi il diametro di* Γ *vi sia esattamente un blocco del disegno in cui x ed y siano a distanza i.*

Si noti che se Γ è un grafo completo si ritrova il concetto di 2-disegno di Steiner, mentre se Γ è un ciclo si ritrova quello di sistema di cicli di Steiner.

Nella tesi è stato anzitutto dimostrato che una condizione necessaria per l'esistenza di un Γ-sistema di Steiner è che Γ appartenga ad una classe molto particolare di grafi che sono stati chiamati equidistanti.

DEFINIZIONE 3. – *Dato un grafo connesso* Γ *ed un intero positivo i non superiore al suo diametro, sia* $\Gamma(i)$ *il grafo avente gli stessi vertici di* Γ *e in cui due vertici sono adiacenti se e solo se hanno distanza i in* Γ*. Allora diciamo che* Γ *è un grafo equidistante se i grafi* $\Gamma(i)$ *hanno tutti lo stesso numero di spigoli per* $1 \leq i \leq diam(\Gamma)$*.*

Essendo il concetto appena definito del tutto nuovo, si è ritenuto opportuno dedicare un intero capitolo della tesi allo studio dei grafi equidistanti proponendo numerosi esempi ed alcuni problemi al momento ancora aperti.

Uno dei risultati più importanti ottenuti nella tesi è l'aver provato che la citata condizione necessaria per l'esistenza di un Γ-sistema di Steiner risulta anche sufficiente.

TEOREMA 2. – *Sia* Γ *un grafo equidistante con e spigoli. Allora, esiste un* Γ*-sistema di Steiner abeliano elementare di ordine* $q \equiv 1(mod\ 2e)$ *per ogni numero primario q (cioè della forma* $q = p^n$ *con p primo e* $n \geq 1$*) sufficientemente grande.*

Osserviamo che applicando questo teorema al caso in cui Γ è un grafo completo si riottiene, come corollario, il seguente celebre risultato di Wilson [5].

TEOREMA 3. – *Dato un intero* $k \geq 3$*, esiste un* 2-$(q, k, 1)$ *disegno abeliano elementare per ogni intero primario* $q \equiv 1(mod\ k(k-1))$ *sufficientemente grande.*

Per la dimostrazione del Teorema 2 è stato di fondamentale importanza l'uso del *Teorema di Weil sulle somme dei caratteri moltiplicativi di un campo finito* recentemente utilizzato da molti autori per provare l'esistenza di strutture combinatoriche di vari generi. Sottolineiamo però che tali autori hanno di volta in volta direttamente applicato il Teorema di Weil al caso specifico che stavano considerando. Nella tesi il Teorema di Weil è stato invece usato per ottenere un risultato intermedio, puramente algebrico, con il quale è stato poi possibile dimostrare, in modo assai rapido, il Teorema 2. Questo stesso risultato permette di ottenere, in modo altrettanto rapido, tutti i risultati combinatorici che sono (o saranno) "figli del Teorema di Weil" evitando i lunghi e noiosi calcoli che comporterebbe l'uso diretto di tale teorema.

È comunque opportuno osservare che il risultato asintotico ottenuto nella tesi (come quello di Wilson) sebbene sia importante dal punto di vista teorico non è costruttivo né tanto meno pratico poiché *q sufficientemente grande* significa, quasi sempre, q davvero "enorme".

D'altra parte nella tesi sono anche presenti costruzioni *concrete* di Γ-sistemi di Steiner con un gruppo d'automorfismi strettamente transitivo sui vertici per varie classi di grafi Γ. Alcune di queste costruzioni generalizzano risultati classici di teoria dei disegni dovute a Bose, Wilson e Buratti.

DEFINIZIONE 4. – *Al fine di ottenere costruzioni ricorsive di decomposizioni di grafi strettamente transitive, nella tesi è stato introdotto e studiato il seguente concetto. Dato un gruppo additivo G ed un grafo Γ, una $(G, \Gamma, 1)$ matrice differenza è una matrice ad elementi in G per cui sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra le sue righe ed i vertici di Γ in modo che la differenza tra una qualunque coppia di righe corrispondenti a vertici adiacenti sia una permutazione degli elementi di G.*

Questa è una generalizzazione del concetto assai noto di $(G, k, 1)$ matrice differenza che corrisponde al caso in cui Γ è il grafo completo su k vertici.

Prima di tutto si mostra come sia possibile costruire una $(G, \Gamma, 1)$ matrice differenza non appena si abbia una *colorazione $\mathcal{C}$ dei vertici* [3] di Γ e una $(G, k, 1)$ matrice differenza con k uguale al numero dei *colori* usati in $\mathcal{C}$.

Poi si mostra come tutte le costruzioni ricorsive attualmente note di 2-disegni strettamente transitivi che utilizzano le matrici differenza in senso classico, possano essere adattate ad analoghe costruzioni di decomposizioni di grafi strettamente transitive usando le matrici differenza nel senso più generale sopra introdotto. In tal modo si sono ottenute, ricorsivamente, molte nuove classi di decomposizioni.

I principali risultati della tesi sulle $(G, \Gamma, 1)$ matrici differenza o che fanno uso di esse, sono stati di recente pubblicati in [2].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] BETH T., JUNGNICKEL D. e LENZ H., *Design Theory*, Cambridge University Press, (1999).
[2] BURATTI M. e PASOTTI A., *Graph decompositions with the use of difference families*, Bulletin of the ICA, **47** (2006), 23-32.
[3] HARARY F., *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading MA (1969).
[4] COLBOURN C.J. e DINITZ J.H., *Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL (2006).
[5] WILSON R.M., *Cyclotomic and difference families in elementary abelian groups*, J. Number Theory., 4 (1972), 17-47.

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni,
Università degli Studi di Milano-Bicocca,
e-mail: pasotti@dmf.unicatt.it
Dottorato in Matematica Pura ed Applicata
(sede amministrativa: Università degli Studi Milano-Bicocca) - Ciclo XIX
Direttori di Ricerca:
Prof. Marco Buratti, Università degli Studi di Perugia
Prof. Francesca Dalla Volta, Università degli Studi Milano-Bicocca