Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marco Antonio Pellegrini

Sui caratteri unipotenti di alcuni gruppi classici finiti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 319–322.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_319_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 319-322

Sui caratteri unipotenti di alcuni gruppi classici finiti

MARCO ANTONIO PELLEGRINI

Il problema affrontato nella mia tesi di dottorato si inserisce nell'ambito della teoria della rappresentazione dei gruppi finiti. Ricordiamo che data una rappresentazione $\Psi : G \to GL(n, \mathbb{C})$ di un gruppo G, si definisce carattere di G associato a Ψ la funzione $\psi : G \to \mathbb{C}$ tale che $\psi(g) = Traccia(\Psi(g))$. Un carattere ψ viene detto irriducibile se il $\mathbb{C}G$-modulo associato all'azione di Ψ è irriducibile. Un problema che sorge in modo naturale è quello di decidere se la restrizione di un carattere irriducibile ψ ad un sottogruppo proprio H di G rimanga o meno irriducibile. Una situazione "estrema" è quella espressa dalla seguente:

DEFINIZIONE 1. – *Sia ψ un carattere irriducibile di G. Diremo che ψ è minimalmente irriducibile se la restrizione di ψ ad ogni sottogruppo proprio di G diviene riducibile.*

Questo concetto fu introdotto e studiato da Platonov e Suprunenko negli anni '70. Recentemente, sono stati classificati i caratteri minimalmente irriducibili che soddisfano particolari condizioni sul grado. Ad esempio sono stati classificati i caratteri minimalmente irriducibili il cui grado è un primo, la potenza di un primo (nel caso di gruppi semplici) o il prodotto di due primi distinti (nel caso di gruppi non semplici con zoccolo non risolubile). Per il mio lavoro di dottorato mi sono concentrato sui caratteri unipotenti di gruppi classici finiti, senza imporre vincoli sul grado.

I caratteri unipotenti dei gruppi classici, studiati e classificati da George Lusztig (cfr. [5]), sono definiti come costituenti irriducibili di caratteri generalizzati di Deligne-Lusztig. Affrontare in profondità questa definizione va oltre il carattere espositivo di questa sintesi, e pertanto rimandiamo per maggiori dettagli a [1]. Ci limitiamo ad osservare che è possibile costruire questi caratteri utilizzando anche la teoria dei caratteri cuspidali e il funtore di Harish-Chandra. Ricordiamo inoltre che alla famiglia dei caratteri unipotenti appartengono le costituenti irriducibili del carattere di permutazione 1_B^G associato ad un sottogruppo di Borel B di G (si dice che tali caratteri unipotenti appartengono alla serie principale). Per i gruppi di tipo A_n, tali caratteri esauriscono l'insieme dei caratteri unipotenti, mentre in generale la situazione è più complicata.

Grazie al lavoro di Lusztig, conosciamo i gradi di questi caratteri e una loro parametrizzazione in termini di partizioni o simboli. Dato un intero n, per partizione di n intendiamo una sequenza di interi $a = (a_1, \dots, a_t)$, tale che $1 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_t$ e $\sum_i a_i = n$. I simboli (ridotti) di Lusztig sono oggetti del tipo $\Lambda = \binom{\lambda}{\mu}$, ove $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_a)$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_b)$ sono due sequenze di interi tali che $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_a$ e $0 \le \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_b$, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ e $a \ge b$. $d = a - b$ si dice difetto di Λ e $\sum_i \lambda_i + \sum_j \mu_j - \left\lfloor \left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2 \right\rfloor$ si dice rango di Λ. Inoltre, se $a = b$ si considerano equivalenti i simboli $\binom{\lambda}{\mu}$ e $\binom{\mu}{\lambda}$.

I caratteri unipotenti di $PSL(n,q)$ e $PSU(n,q)$ sono parametrizzati da partizioni, mentre i caratteri unipotenti degli altri gruppi classici sono parametrizzati da simboli di Lusztig. In particolare, per i gruppi $PSp(2m,q)$ e $\Omega(2m+1,q)$ si utilizzano simboli di difetto dispari e rango m. Per $P\Omega^-(2m,q)$ si utilizzano simboli di difetto $d \equiv 2 \pmod 4$. Infine per $\Omega^+(2m,q)$ si utilizzano simboli di difetto $d \equiv 0 \pmod 4$.

I risultati ottenuti nella mia tesi sono descritti nei seguenti teoremi:

TEOREMA 1. – *Siano $G = PSL(n,q)$, $a \neq (n)$ una partizione di n e χ_a il carattere unipotente di G associato ad a. Allora χ_a è minimalmente irriducibile, con l'unica eccezione del carattere $\chi_{(1,3)}$ (avente grado 14) di $PSL(4,2)$.*

TEOREMA 2. – *Siano $G = PSp(2m,q)$, $\Lambda \neq \binom{m}{-}$ un simbolo di Lusztig ridotto di rango m e χ_Λ il carattere di G associato a Λ. Si supponga che q sia dispari. Allora χ_Λ è minimalmente irriducibile se e solo se $\chi \neq \binom{0\,1\,m}{-}$.*

TEOREMA 3. – *Siano $G = PSU(2m+1,q)$, $a \neq (2m+1)$ una partizione di $2m+1$ e χ_a il carattere unipotente di G associato ad a. Allora χ_a è minimalmente irriducibile se e solo se $a \neq (1, 2m)$.*

TEOREMA 4. – *Siano $G = PSU(2m,q)$, $a \neq (2m)$ una partizione di $2m$ e χ_a il carattere unipotente di G associato ad a. Si supponga $a \neq (1,2,2m-3)$. Allora χ_a è minimalmente irriducibile, con l'unica eccezione del carattere $\chi_{(1,3)}$ (avente grado 14) di $PSU(4,2)$.*

TEOREMA 5. – *Siano $G = \Omega(2m+1,q)$, $\Lambda \neq \binom{m}{-}$ un simbolo di Lusztig ridotto di rango m e χ_Λ il carattere di G associato a Λ. Si supponga che q sia dispari, $m \ge 5$ e $\Lambda \neq \binom{0\,1\,m}{-}$. Allora χ_Λ è minimalmente irriducibile.*

TEOREMA 6. – *Siano* $G = P\Omega^-(2m, q)$, $\Lambda \neq \begin{pmatrix} 0\,m \\ - \end{pmatrix}$ *un simbolo di Lusztig ridotto di rango* m *e* χ_Λ *il carattere di* G *associato a* Λ. *Si supponga che* q *sia dispari e, se* m *è dispari, si supponga anche che* $\Lambda \neq \begin{pmatrix} 0\,2m-1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Allora* χ_Λ *è minimalmente irriducibile.*

La scelta di concentrarci sui caratteri unipotenti è stata suggerita da una prima osservazione sulla minimalità del carattere di Steinberg di un gruppo semplice finito di tipo Lie. Inoltre, i caratteri unipotenti appaiono in modo naturale affrontando tematiche legate ai gruppi di tipo Lie e alla loro struttura, ad esempio osservandone l'azione su sottospazi totalmente isotropi. In questo contesto rientra il celebre teorema di Cameron-Kantor ([2]), di cui il Teorema 1 può essere visto come una generalizzazione.

I teoremi elencati precedentemente sono stati ottenuti con tecniche dimostrative relativamente uniformi, ma ovviamente ogni gruppo presenta difficoltà specifiche che sono state risolte in modo differente. Riportiamo di seguito le principali linee di dimostrazione.

Sia χ un carattere unipotente di G, ove $G = G(n, q)$ è uno qualsiasi dei precedenti gruppi classici. Osserviamo innanzitutto che possiamo sempre supporre che χ non sia né il carattere principale 1_G di G né il carattere di Steinberg di G. Inoltre, poiché conosciamo esplicitamente la lista completa dei sottogruppi massimali nel caso di gruppi in dimensione bassa, possiamo affrontare questi casi in modo diretto e supporre d'ora in poi che la dimensione sia "sufficientemente alta", tipicamente > 8. Ricordiamo (cfr. ad esempio [4]) che i sottogruppi massimali di G possono essere suddivisi in due classi: una prima classe, denotata con $\mathcal{C}$, contenente sottogruppi "geometrici", e una seconda classe, denotata con $\mathcal{S}$, contenente sottogruppi *almost simple* assolutamente irriducibili, "piccoli" rispetto all'ordine di G.

Procedendo per assurdo, supponiamo che esista un sottogruppo massimale H di G tale che la restrizione $\chi_{|H}$ sia irriducibile. Allora, $\chi(1)$ deve dividere l'ordine di H. Pertanto, il primo passo consiste nel determinare quando questa condizione necessaria è soddisfatta. Il grado dei caratteri unipotenti è noto, ma risulta molto difficile usare le corrispondenti formule per i nostri scopi. Per superare questo problema, utilizziamo le proprietà dei cosiddetti primi di Zsigmondy. Ricordiamo che dati due interi $a \geq 2$ e $b \geq 3$ tali che $(a, b) \neq (2, 6)$, allora esiste sempre un numero primo l tale $l \mid a^b - 1$, ma $l \nmid a^c - 1$, per ogni $c = 1, \ldots, b-1$. Un tale primo viene detto primo di Zsigmondy relativo alla coppia (a, b).

Classifichiamo quindi i caratteri unipotenti in funzione di opportuni primi di Zsigmondy che compaiono come divisori del grado (ad esempio per $G = PSL(n, q)$, prendiamo i primi di Zsigmondy relativi alle coppie (q, n) e $(q, n-1)$). Dall'altro lato, classifichiamo i sottogruppi appartenenti alla classe $\mathcal{C}$ in funzione degli stessi primi di Zsigmondy che compaiono come divisori dell'ordine di tali sottogruppi. Incrociando tali dati, riusciamo a restringere considerevolmente i sottogruppi da studiare. Una particolare rilevanza hanno i sottogruppi appartenenti alla classe $\mathcal{C}_1$, ovvero gli stabilizzatori di sottospazi non degeneri o totalmente isotropi (sottogruppi parabolici). Per i gruppi classici studiati, abbiamo provato che nel primo caso la restrizione di un carattere unipotente è sempre riducibile. Nel secondo caso, abbiamo provato che la restrizione di un carattere unipotente che appartiene alla serie principale è sempre riducibile.

Infine, abbiamo studiato le restrizioni a sottogruppi H appartenenti alla classe $\mathcal{S}$. In tale caso abbiamo che o $H \cong Alt(c), Sym(c)$, con $c = n+1, n+2$, o $|H| \leq q^{3n}$ (q^{6n} se G è unitario). I gruppi alterni e simmetrici possono essere esclusi usando le proprietà dei primi di Zsigmondy. Gli altri sottogruppi sono esclusi o in quanto "piccoli" rispetto al grado di χ o perché il loro ordine non è divisibile per gli stessi primi di Zsigmondy precedentemente utilizzati (anche per questa classe di sottogruppi, abbiamo una classificazione in funzione di particolari primi di Zsigmondy che ne dividono l'ordine, cfr. [3]).

Concludendo, abbiamo verificato per i casi studiati che se la dimensione è abbastanza grande, esiste al più un solo carattere unipotente (non banale) che non è minimalmente irriducibile. Particolare importanza, al fine di trovare caratteri unipotenti che non siano minimalmente irriducibili, hanno i sottogruppi parabolici $P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. La non-minimalità delle eccezioni ai Teoremi 2 e 3 è stata in effetti provata analizzandone le restrizioni a questi sottogruppi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Carter R. W., *Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters* Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., New York (1985)

[2] Cameron P. J. e Kantor, W. M., 2-*transitive and antiflag transitive collineation groups of finite projective spaces* J. Algebra, **60**, no. 2 (1979), 384-422.

[3] Guralnick R., Penttila T., Praeger C. E. e Saxl J., *Linear groups with orders having certain large prime divisors* Proc. London Math. Soc. (3) **78**, no. 1 (1999), 167-214

[4] Kleidman P. e Liebeck M., *The subgroup structure of the finite classical groups* London Mathematical Society Lecture Note Series **129**, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[5] Lusztig G. *Irreducible representations of finite classical groups* Invent. Math. **43**, no. 2 (1977), 125-175.

Dipartimento di Matematica Pura e Applicazioni,
Università degli Studi di Milano - Bicocca
e-mail: marco.pellegrini@unimib.it
Dottorato in Matematica Pura e Applicata
(sede amministrativa: Università degli Studi di Milano-Bicocca) - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof. Lino Di Martino,
Università degli Studi di Milano - Bicocca