Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francesco Petitta

Equazioni paraboliche nonlineari con dato misura

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 323–326.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_323_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 323-326

Equazioni paraboliche nonlineari con dato misura

FRANCESCO PETITTA

La mia tesi di dottorato, realizzata sotto la supervisione del Prof. Luigi Orsina e discussa presso il Dipartimento di Matematica G. Castelnuovo dell'Università La Sapienza in Roma in data 12 gennaio 2006, ha riguardato equazioni paraboliche nonlineari con dati singolari, e, in particolare, lo studio di esistenza, unicità e proprietà qualitative per soluzioni di equazioni paraboliche con dati misura in domini limitati.

1. – Comportamento Asintotico.

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, è un aperto limitato, sia $A(u) = -\mathrm{div}\,(a(t, x, \nabla u))$ un operatore che agisce dallo spazio $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ nel suo spazio duale $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$, $p > 1$, che soddisfi le ipotesi standard di Leray-Lions che implicano opportune proprietà di coercività e monotonia. Sotto opportune ipotesi mi sono interessato alla questione dell'esistenza, unicità e del comportamento asintotico delle soluzioni di problemi di Cauchy del tipo

$$
\begin{cases} u_t + A(u) = \mu & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u(t, x) = 0 & \text{su } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}
$$

dove μ è una misura di Radon a variazione limitata su $Q = (0, T) \times \Omega$, e $u_0 \in L^1(\Omega)$, $T > 0$. Per fissare le idee si può considerare l'esempio particolare di (1) relativo al p-Laplaciano:

$$
\begin{cases} u_t - \mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \mu & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u(t, x) = 0 & \text{su } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}
$$

Se A e μ sono entrambi indipendenti dal tempo, allora A si riduce ad un operatore ellittico monotono soddisfacente le classiche condizioni di Leray-Lions; in questo caso si puó provare che le soluzioni del problema (1), che esistono e sono uniche, convergono, almeno in $L^1(\Omega)$, alla soluzione stazionaria dello stesso problema.

La difficoltà principale nello studio di questo tipo di problemi riguarda la presenza di un dato misura che costringe a riformulare il problema in modo opportuno tale da assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione.

Nel caso parabolico, si è sviluppato in maniera parallela un approccio simile a quello adottato nel caso ellittico introducendo via via le nozioni di soluzioni per *dualità*, di *entropia* e *rinormalizzate* fino a coprire il caso di dati assolutamente continui rispetto alla p-capacità parabolica.

Dopo un capitolo introduttivo di presentazione dei risultati noti e dell'ambito funzionale di tali studi, nel secondo capitolo della mia tesi (il cui contenuto è confluito in [4]) ho studiato il comportamento asintotico, per T che tende a infinito, della soluzione di entropia del problema 1 dove A è un operatore monotono di tipo Leray-Lions, $u_0 \in L^1(\Omega)$ è una funzione non negativa, e μ è una misura di Radon non negativa a variazione limitata su Q assolutamente continua rispetto alla p-capacità parabolica ($\mu \in \mathcal{M}(Q)$) e indipendente dal tempo. Il risultato principale, la cui dimostrazione risiede in un risultato di confronto e in un lemma tecnico di omogeneizzazione (quest'ultimo risultato ottenuto utilizzando un risultato di G-compattezza), è dunque il seguente

TEOREMA 1. – *La soluzione* $u(T,x)$ *di* (1) *converge alla soluzione stazionaria* $v(x)$ *in* $L^1(\Omega)$ *per* T *che tende a infinito.*

Inoltre, nel caso lineare, lo stesso tipo di risultato può essere ottenuto per misure μ qualsiasi, anche singolari, utilizzando la nozione di soluzione per dualità che si estende al caso parabolico in maniera del tutto simile a quello ellittico (questo risultato è contenuto anche in [5]).

Il terzo capitolo della tesi fa riferimento ad un lavoro in collaborazione con Tommaso Leonori (si veda [3]), e contiene risultati del tutto analoghi ai precedenti per una classe di problemi assai differenti; abbiamo infatti esteso tali risultati a problemi di tipo *quasilineare* il cui modello è

$$
\begin{cases} u_t - \Delta u + g(u)|\nabla u|^2 = f & \text{in } (0,T) \times \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u(t,x) = 0 & \text{su } (0,T) \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}
$$

dove $u_0 \in 1$ è non negativa, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione reale in $C^1(\mathbb{R})$ tale che $g(s)s \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $g'(s) > 0, \forall\ s \in \mathbb{R}$, e $f(x) \in L^1(Q)$ è una funzione non negativa indipendente dal tempo; in letteratura, il termine di assorbimento $|\nabla u|^2$ è detto a crescita naturale in quanto forza, in qualche modo, la soluzione ad appartenere allo spazio di energia $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$, cosa non vera, in generale, nei casi descritti precedentemente. Questo tipo di equazioni, che nasce in maniera naturale da una classe di problemi variazionali, sono state molto studiate negli ultimi anni; le ipotesi sulla nonlinearità g, sono standard in quanto assicurano, ad esempio, l'unicità della soluzione.

Si osservi che, come per i risultati precedenti, la convergenza in norma alla soluzione stazionaria può essere migliorata in dipendenza dalla regolarità dei dati.

2. – Soluzioni Rinormalizzate.

Come detto in precedenza, per quanto riguarda il problema (1), se μ è una misura qualsiasi (diremo che $\mu \in \mathcal{M}(Q)$) è necessario provare che una soluzione esiste in un senso che garantisca l'unicità; questa questione è stata sostanzialmente risolta, nel caso ellittico, grazie all'introduzione del concetto di soluzione rinormalizzata che generalizza quello di soluzione di entropia.

Nel terzo quarto capitolo della mia tesi (che confluirà in [5]) ho affrontato questo tipo di questione in ambito parabolico dimostrando l'esistenza di una soluzione rinormalizzata per il problema (1), con dato una misura qualsiasi in $\mathcal{M}(Q)$, e molti risultati riguardanti proprietà qualitative di tali soluzioni.

È possibile dare la definizione di soluzione rinormalizzata per il problema (1) nello spirito di [1], facendo uso di un risultato di decomposizione per misure in $\mathcal{M}(Q)$ dimostrato in [2]; ovvero, se $\mu \in \mathcal{M}(Q)$ allora

$$\mu = f - \operatorname{div}(G) + g_t + \mu_s, \tag{4}$$

nel senso delle distribuzioni, con $f \in L^1(Q)$, $G \in (L^{p'}(Q))^N$, $g \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, e $\mu_s \perp p$-capacità.

In effetti, se g è come in (4), e u è la soluzione, per semplificare la trattazione del problema, si può dare tale definizione facendo riferimento alla traslazione regolare della soluzione $v = u - g$.

Nel nostro caso, sia $\mu \in \mathcal{M}(Q)$ e $u_0 \in L^1(\Omega)$. Essenzialmente, una funzione misurabile u è *soluzione rinormalizzata* del problema (1) se $v \in L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ per ogni $q < p - \dfrac{N}{N+1}$, $T_k(v) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ per ogni $k > 0$, e per ogni $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ $(S(0) = 0)$ tale che S' abbia supporto compatto su $\mathbb{R}$, v soddisfa una formulazione integrale che utilizza funzioni test dipendenti dalla soluzione stessa del tipo $S'(v)\varphi$ per ogni $\varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$, $\varphi_t \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$, con $\varphi(T,x) = 0$. Inoltre, per ogni $\psi \in C(\overline{Q})$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \le v < 2n\}} a(t,x,\nabla u)\cdot \nabla v \; \psi \; dxdt = \int_Q \psi \; d\mu_s^+, \tag{5}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_{\{-2n < v \le -n\}} a(t,x,\nabla u)\cdot \nabla v \; \psi \; dxdt = \int_Q \psi \; d\mu_s^-, \tag{6}$$

dove μ_s^+ e μ_s^- sono rispettivamente la parte positiva e la parte negativa della parte singolare μ_s di μ.

Una caratteristica cruciale in questa definizione risiede nelle proprietà di ricostruzione (5) e (6); esse mostrano che, in qualche senso, l'energia di una soluzione rinormalizzata u, sugli insiemi dove essa è *grande*, va a ricostruire la parte singolare del dato μ.

Una proprietà importante di tali soluzioni è quella che le lega alla p-capacità parabolica; si può provare, infatti, che v (ma in generale non u), ammette un rappresentante cap_p-quasi continuo (i.e. continuo ovunque tranne che su un insieme di p-capacità arbitrariamente piccolo) definita cap_p-quasi ovunque.

Il risultato principale di tale capitolo è dunque il seguente

TEOREMA 2. – *Sia $\mu \in \mathcal{M}(Q)$ e $u_0 \in L^1(\Omega)$, allora esiste una soluzione rinormalizzata del problema* (1).

La dimostrazione dell'esistenza di una soluzione rinormalizzata è ottenuta tramite un argomento di approssimazione e un ruolo chiave è giocato dalla prova della convergenza forte delle troncate $T_k(v^\varepsilon)$ della successione approssimante.

Si è cercato poi di enfatizzare il fatto che, come nel caso ellittico, la nozione di soluzione rinormalizzata è quella giusta per garantire l'unicità della soluzione provando che, nel caso lineare, la soluzione è unica (come del resto se $\mu \in M_0(Q)$); infatti, se A è lineare, allora la soluzione u risulta soluzione nel senso di dualità.

Nell'ultimo paragrafo del capitolo, viene enunciato, come corollario del Teorema 2, e in particolare delle proprietà (5) e (6), godute da tali soluzioni il così detto *Principio del Massimo Inverso* che si applica a operatori parabolici nonlineari generali e dati misure singolari; ovvero, in qualche senso: *soluzioni rinormalizzate non negative derivano da dati singolari non negativi.*

In effetti, una ulteriore ipotesi sul termine g in (4) permette di dimostrare il Principio del Massimo Inverso per operatori nonlineari e dati qualsiasi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] DAL MASO G., MURAT F., ORSINA L. e PRIGNET A., *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **28** (1999), 741-808.

[2] DRONIOU J., PORRETTA, A. e PRIGNET, A., *Parabolic capacity and soft measures for nonlinear equations*, Potential Anal., **19** (2), (2003), 99-161.

[3] LEONORI T., PETITTA F., *Asymptotic behavior of solutions for parabolic equations with natural growth term and irregular data*, Asymptotic Analysis, **48** (3) (2006), 219-233.

[4] PETITTA F., *Asymptotic behavior of solutions for parabolic operators of Leray-Lions type and measure data*, to appear

[5] PETITTA F., *Asymptotic behavior of solutions for linear parabolic equations with general measure data*, to appear in C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.

[6] PETITTA F., *Renormalized solutions of nonlinear parabolic equations with general measure data*, to appear.

Dipartimento di Matematica G. Castelnuovo, Università di Roma La Sapienza
e-mail: petitta@mat.uniroma1.it
Dottorato in Matematica
(sede amministrativa: Università di Roma La Sapienza) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Luigi Orsina, Università di Roma La Sapienza