Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Luca Prelli

Fasci sul sito sottoanalitico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 327–330.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_327_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 327-330

Fasci sul sito sottoanalitico

LUCA PRELLI

In questa nota, dopo aver ricordato la definizione di sito sottoanalitico e di fascio su un sito sottoanalitico, introduciamo la nozione di specializzazione e microlocalizzazione per questi fasci. Queste costuzioni permettono di unificare e semplificare numerosi lavori anteriori sulla coomologia temperata e formale.

1. – Fasci sul sito sottoanalitico.

Sia k un campo e sia X una varietà analitica reale.

Sia $\mathrm{Op}_{sa}(X)$ la categoria degli aperti sottoanalitici di X. Muniamo $\mathrm{Op}_{sa}(X)$ della seguente topologia di Grothendieck: $S \subset \mathrm{Op}_{sa}(X)$ è un ricoprimento di $U \in \mathrm{Op}_{sa}(X)$ se per ogni compatto K di X esiste un sottoinsieme finito $S_0 \subset S$ tale che $K \cap \bigcup_{V \in S_0} V = K \cap U$. Chiameremo X_{sa} il sito associato (sito sottoanalitico), $\mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$ la categoria dei fasci su X_{sa} e $D^b(k_{X_{sa}})$ la sua categoria derivata. Chiameremo $\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}-c}(k_X)$ la categoria dei fasci $\mathbb{R}$-costruibili su X.

Sia $\rho : X \to X_{sa}$ il morfismo naturale di siti. Si possono definire i seguenti funtori:

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}-c}(k_X) \subset \mathrm{Mod}(k_X) \underset{\rho^{-1}}{\overset{\rho_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}}).$$

I funtori ρ^{-1} e ρ_* sono i funtori di immagine inversa e diretta associati a ρ. Il funtore ρ^{-1} ammette un aggiunto a sinistra, $\rho_!$. Il fascio $\rho_! F$ è il fascio associato al prefascio $\mathrm{Op}_{sa}(X) \ni U \mapsto F(\overline{U})$.

Il funtore ρ_* è pienamente fedele ed esatto su $\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}-c}(k_X)$, possiamo quindi identificare $\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}-c}(k_X)$ con la sua immagine in $\mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$ tramite ρ_*.

Siano X, Y due varietà analitiche reali, e sia $f : X \to Y$ un morfismo di varietà analitiche. Le operazioni interne *calHom*, $\otimes$ e le operazioni esterne f^{-1} e f_* sono sempre ben definite per i fasci su un sito. Nel caso sottoanalitico possiamo anche definire il funtore di immagine diretta propria $f_{!!}$. Il funtore derivato $Rf_{!!}$ ammette un aggiunto a destra, $f^!$. Otteniamo così le sei operazioni di Grothendieck e le formule usuali (proiezione, cambio di base, ecc.) per i fasci sul sito sottoanalitico.

2. – Trasformata di Fourier-Sato, specializzazione e microlocalizazione.

Anche se risultati di questa sezione sono simili a quelli di [3], le costruzioni sono delicate e sfruttano le proprietà geometriche degli insiemi sottoanalitici (in particolare la decomposizione cilindrica).

Sia E un fibrato vettoriale reale su una varietà analitica reale Z munito dell'azione naturale di $\mathbb{R}^+$. Sia U un aperto di E. Diciamo che U è $\mathbb{R}^+$-connesso se le sue intersezioni con le orbite dell'azione di $\mathbb{R}^+$ sono connesse. Chiamiamo $\mathbb{R}^+U$ il cono generato da U.

DEFINIZIONE 1. – *Un fascio F su E_{sa} è conico se la restrizione $\Gamma(\mathbb{R}^+U;F) \to \Gamma(U;F)$ è un isomorfismo per ogni aperto $\mathbb{R}^+$-connesso relativamente compatto sottoanalitico di E. Chiamiamo $\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}^+}(k_{E_{sa}}) \subset \mathrm{Mod}(E_{X_{sa}})$ la categoria dei fasci conici e $D^b_{\mathbb{R}^+}(k_{E_{sa}})$ la sottocategoria di $D^b(k_{E_{sa}})$ dei complessi con coomologia conica.*

Sia E^* il fibrato duale e siano p_1, p_2 le proiezioni di $E \times_Z E^*$ su E e E^* rispettivamente. Definiamo $P := \{(x,y) \in E \underset{Z}{\times} E^*;\ \langle x,y\rangle \geq 0\}$, $P' := \{(x,y) \in E \underset{Z}{\times} E^*;\ \langle x,y\rangle \leq 0\}$. Analogamente alla teoria classica dei fasci, definiamo la trasformata di Fourier-Sato e la sua inversa

$$\begin{aligned}
(\,\cdot\,)^\wedge : D^b_{\mathbb{R}^+}(k_{E_{sa}}) \to D^b_{\mathbb{R}^+}(k_{E^*_{sa}}), \qquad & F^\wedge = Rp_{2!!}(p_1^{-1}F)_{P'},\\
(\,\cdot\,)^\vee : D^b_{\mathbb{R}^+}(k_{E^*_{sa}}) \to D^b_{\mathbb{R}^+}(k_{E_{sa}}), \qquad & F^\vee = Rp_{1*}\mathrm{R}\Gamma_{P'}p_2^!F.
\end{aligned}$$

Queste costruzioni sono compatibili con quelle classiche (vedi [3]), infatti i funtori $^\wedge$ e $^\vee$ commutano con ρ^{-1} e $R\rho_*$. Inoltre

TEOREMA 1. – *I funtori $^\wedge$ e $^\vee$ sono equivalenze di categorie inverse una dell'altra.*

Sia X un varietà analitica reale n-dimensionale e sia M una sottovarietà chiusa di codimensione ℓ. Consideriamo il fibrato normale $T_MX \xrightarrow{\tau} M$ e il fibrato conormale $T^*_MX \xrightarrow{\pi} M$.

Ricordiamo ora la definizione della deformazione normale di X, che è data da una varietà analitica $\widetilde{X}_M$, un'applicazione $(p,t) : \widetilde{X}_M \to X \times \mathbb{R}$, e un'azione di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ su $\widetilde{X}_M$ $(\widetilde{x}, r) \mapsto \widetilde{x} \cdot r$ tali che $p^{-1}(X \setminus M) \simeq (X \setminus M) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $t^{-1}(c) \simeq X$ per ogni $c \neq 0$ e $t^{-1}(0) \simeq T_MX$. Sia $s : T_MX \hookrightarrow \widetilde{X}_M$ l'inclusione, Ω l'aperto di $\widetilde{X}_M$ definito da $\{t > 0\}$, $i_\Omega : \Omega \hookrightarrow \widetilde{X}_M$ e $\widetilde{p} = p \circ i_\Omega$. Otteniamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
T_MX \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\tau"] & \widetilde{X}_M \arrow[d, "p"] & \Omega \arrow[l, "i_\Omega"'] \arrow[dl, "\widetilde{p}"] \\
M \arrow[r, "i_M"] & X. &
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

DEFINIZIONE 2. – *Il funtore di specializzazione è definito da*

$$\nu_M^{sa} : D^b(k_{X_{sa}}) \to D^b_{\mathbb{R}^+}(k_{T_M X_{sa}}), \qquad \nu_M^{sa}(F) = s^{-1} R\Gamma_\Omega p^{-1} F.$$

Il funtore di microlocalizzazione è dato dalla trasformata di Fourier-Sato della specializzazione, i.e.

$$\mu_M^{sa} : D^b(k_{X_{sa}}) \to D^b_{\mathbb{R}^+}(k_{T_M^* X_{sa}}), \qquad \mu_M^{sa} F = (\nu_M^{sa} F)^\wedge.$$

Si può verificare la compatibilità con i funtori di specializzazione e microlocalizzazione definiti in [3] data dall'isomorfismo $\rho^{-1}\nu_M^{sa} R\rho_* \simeq \nu_M$ (e dall'analogo per μ^{sa}). Otteniamo il triangolo di Sato per i fasci sottoanalitici:

$$F|_M \otimes \omega_{M/X} \to \mathrm{R}\Gamma_M F|_M \to R\dot{\pi}_* \mu_M^{sa} F \xrightarrow{+}$$

ove $\dot{\pi}$ è la restrizione di π a $T_M^* X \setminus M$.

Sia Δ la diagonale di $X \times X$, e sia δ l'inclusione. La deformazione normale della diagonale $X \times X$ può essere visualizzata con il seguente diagramma

(2.2)
$$\begin{tikzcd}
TX \arrow[r, "\sim"] & T_\Delta(X \times X) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\tau_X"] & \widetilde{X \times X} \arrow[d, "p"] & \Omega \arrow[l, "i_\Omega"'] \arrow[dl, "\tilde{p}"] \\
& \Delta \arrow[r, "\delta"] & X \times X \arrow[r, shift left, "q_2"] \arrow[r, shift right, "q_1"'] & X.
\end{tikzcd}$$

DEFINIZIONE 3. – *Siano* $F \in D^b_{\mathbb{R}-c}(k_X)$ *e* $G \in D^b(k_{X_{sa}})$. *Definiamo* $\mu hom^{sa}(F, G) := \mu_\Delta^{sa} R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F, q_1^! G)$.

3. – Microlocalizzazione temperata e formale.

Sia M una varietà analitica reale. Indichiamo con $\mathcal{D}b_M$ e $\mathcal{C}_M^\infty$ i fasci delle distribuzioni e delle funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ su M. Ricordiamo ora le definizioni dei fasci su M_{sa} delle distribuzioni temperate $\mathcal{D}b_M^t$ e delle funzioni di Whitney $\mathcal{C}_M^{\infty,\mathrm{w}}$ introdotte in [4]:

$$\Gamma(U; \mathcal{D}b_M^t) = \Gamma(M; \mathcal{D}b_M)/\Gamma_{M\setminus U}(M; \mathcal{D}b_M), \quad \Gamma(U; \mathcal{C}_M^{\infty,\mathrm{w}}) = \Gamma(M; \mathcal{C}_M^\infty)/\Gamma(M; \mathcal{I}_{M\setminus U}^\infty),$$

dove U è un aperto sottoanalitico (a coomologia localmente triviale, vedi [3]) e $\Gamma(M; \mathcal{I}_{M\setminus U}^\infty)$ è lo spazio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ che si annullano su $M \setminus U$ con tutte le derivate.

Sia ora X una varietà analitica complessa, con fascio strutturale olomorfo $\mathcal{O}_X$. Chiameremo $\overline{X}$ la varietà complessa coniugata (con fascio strutturale antiolomorfo $\mathcal{O}_{\overline{X}}$), e $X_\mathbb{R}$ la varietà analitica sottostante, identificata con la diagonale di $X \times \overline{X}$. Chiameremo $\mathcal{D}_X$ il fascio degli operatori differenziali di ordine finito a coefficienti olomorfi, $\mathcal{O}_X^t$ e $\mathcal{O}_X^{\mathrm{w}}$ i fasci su X_{sa} delle funzioni olomorfe temperate e di Whitney definiti nel modo seguente:

$$\mathcal{O}_X^t := R\mathcal{H}om_{\rho_!\mathcal{D}_X}(\rho_!\mathcal{O}_{\overline{X}}, \mathcal{D}b^t_{X_{\mathbb{R}}}), \quad \mathcal{O}_X^{\mathrm{w}} := R\mathcal{H}om_{\rho_!\mathcal{D}_X}(\rho_!\mathcal{O}_{\overline{X}}, \mathcal{C}^{\infty,\mathrm{w}}_{X_{\mathbb{R}}}).$$

Consideriamo la deformazione normale della diagonale in $X \times X$ come in (1).

TEOREMA 2. – *Sia $F \in D^b_{\mathbb{R}-\mathrm{c}}(\mathbb{C}_X)$. I funtori di microlocalizzazione temperata di Andronikof* [1] *e microlocalizazzione formale di Colin [2] si ottengono dalla microlocalizzazione di $\mathcal{O}_X^t$ e $\mathcal{O}_X^{\mathrm{w}}$, i.e.*

$$\rho^{-1}\mu hom^{sa}(F, \mathcal{O}_X^t) \simeq t\mu hom(F, \mathcal{O}_X), \qquad \rho^{-1}\mu hom^{sa}(F, \mathcal{O}_X^{\mathrm{w}}) \simeq (D'F \overset{\mathrm{w}}{\underset{\mu}{\otimes}} \mathcal{O}_X)^a,$$

dove $(\,\cdot\,)^a$ è l'immagine diretta del morfismo antipodale.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] ANDRONIKOF E., *Microlocalisation temperée*, Mémoires Soc. Math. France, **57**, (1994).

[2] COLIN V., *Formal microlocalization*, C. R. Acad. Sci. Paris Math., **327** (1998), 289-293.

[3] KASHIWARA M. e SCHAPIRA P., *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Math., **292** (1990).

[4] KASHIWARA M. e SCHAPIRA P., *Ind-sheaves*, Astérisque, **271** (2001).

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: lprelli@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo XVII
Direttori di ricerca: Andrea D'Agnolo (Università di Padova), Pierre Schapira (Università Paris 6)