Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Taíse Santiago Costa Oliveira

Calcolo di Schubert su un'algebra di Grassmann

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 343–346.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_343_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 343-346

Calcolo di Schubert su un'algebra di Grassmann

TAÍSE SANTIAGO COSTA OLIVEIRA

1. Sia $G(k,n)$ la varietà grassmanniana che parametrizza i sottospazi vettoriali di dimensione k di $\mathbb{C}^n$. Il classico calcolo di Schubert descrive esplicitamente la struttura della coomologia di $G(k,n)$ come algebra sugli interi. In letteratura sono state studiate varie *deformazioni* della coomologia di $G(k,n)$, per esempio la deformazione quantica piccola (small quantum cohomology) o la coomologia equivariante rispetto all'azione di un toro che possiede solo punti fissi isolati. Ispirandomi all'articolo [1], dove il classico calcolo di Schubert viene riformulato in termini di derivazioni sull'algebra esterna di un modulo libero di rango finito, la mia tesi elabora una teoria assiomatica, battezzata *Calcolo di Schubert su un'algebra di Grassmann*, in grado di trattare in modo unificato i vari tipi di coomologia summenzionati.

Un calcolo di Schubert su un'algebra di Grassmann è una derivazione sull'algebra esterna di un A-modulo libero M di rango finito o infinito, ossia un omomorfismo di A-algebre

$$D_t : \bigwedge M \longrightarrow \bigwedge M[[t]].$$

In particolare, D_t è una serie formale $D_t := \sum_{i \geq 0} D_i t^i$ a coefficienti in $End_A(\bigwedge M)$. L'equazione

$$D_t(a \wedge \beta) = D_t a \wedge D_t \beta,$$

che traduce esplicitamente il fatto che D_t è un omomorfismo di algebre, è detta, nella tesi, l'*equazione fondamentale del calcolo di Schubert*. Tutti i risultati contenuti nella dissertazione risultano essere una conseguenza puramente formale di questa fondamentale equazione.

2. Si ricordi che la coomologia classica della grassmanniana è un modulo libero di rango finito sugli interi ed è finitamente generata, come algebra sugli interi, dalle classi di coomologia classicamente note come *cicli di Schubert speciali*. Il prodotto di due *cicli di Schubert* (cos vengono parimenti dette le classi di coomologia di certe naturali sottovarietà, dette di Schubert, della grassmanniana) è governato da due regole di calcolo: la *formula di Pieri*, che regola il prodotto tra un ciclo di Schubert qualsiasi e un ciclo speciale, e la *formula di Giambelli*, che esprime ogni ciclo di Schubert come polinomio esplicito dei cicli di Schubert speciali. È naturale e importante il problema di determinare estensioni delle classiche formule di Pieri e Giambelli capaci di descrivere il prodotto della deformazione quantica e di quella equivariante.

3. I risultati principali che ottengo nella tesi, quale frutto della costruzione assiomatica menzionata nel paragrafo 1, sono:

1) L'estensione dei risultati ottenuti in [1] al caso dei fibrati in Grassmanniane ([2]). Tale estensione era già stata ottenuta da Laksov e Thorup usando la teoria delle algebre di spezzamento universali di un polinomio monico, a coefficienti in un anello, nel prodotto di due fattori di grado positivo. La mia estensione, invece, si basa sull'uso di derivazioni sull'algebra di Grassmann del gruppo di Chow del fibrato in Grassmanniane.

2) Usando la predetta estensione ottengo una descrizione semplice, esplicita e computazionalmente efficace della coomologia equivariante della grassmanniana $G(k, n)$, rispetto ad una azione indotta da quella di un toro n-dimensionale che agisce diagonalmente su $\mathbb{C}^n$; si prova l'esistenza di una base naturale in cui le formule di Pieri e Giambelli sono essenzialmente le medesime che nel caso classico ([2], [3]).

3) Ottengo esplicitamente le formule di Pieri equivarianti nella base studiata da Knutson e Tao in [Duke Math. J., **119**, no. 2 (2003), 221-260]; tale problema combinatorio non era stato ancora risolto e risponde esaurientemente ad una questione aperta posta da Lakshmibai, Raghavan e Sankaran in [Pure Appl. Math. Q. **2** (2006), no. 3, 699-717] (si veda anche [3]).

4) Come caso particolare ottengo la *equivariant Pieri's rule* descritta da Knutson e Tao in [loc. cit.], fornendone cos una dimostrazione alternativa elegante e trasparente.

5) Applico le tecniche di derivazione per completare la descrizione combinatoria di un gioco di traffico studiato da Niederhausen (*Catalan Traffic at the Beach*, The Eletr. J. of Combin., **9** (2002), ♯R32). In una *mappa* di una città, una retta rappresenta la *spiaggia*. Niederhausen prova che il numero dei cammini necessari per raggiungere la spiaggia da un punto fissato sulla mappa coincide coi numeri di Catalan. Nella tesi provo che il numero dei cammini necessari per raggiungere altri punti della spiaggia, a partire dallo stesso punto fissato, sono gradi di cicli di codimensione massima su certe grassmanniane di rette di $\mathbb{P}^n$ (Il risultato di Niederhausen è un caso particolare, giacché l'n-esimo numero di Catalan è proprio il grado della grassmanniana $G(2, n)$ ([5]).

6) Provo che $F(z) = \exp(2z)(I_0(2z) - I_1(2z))$, dove $I_j(w)$ sono le *funzioni di Bessel modificate di tipo* j, è una funzione generatrice dei gradi delle grassmanniane $G(2, n)$. Più precisamente, detto d_n il grado della $G(2, n)$, allora:

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} d_n \frac{z^n}{n!}.$$

7) Scrivo una formula per il grado di tutte le curve razionali di grado d ($d \geq 0$) in $\mathbb{P}^3$ non proietivamente equivalenti, con $2d-6$ punti marcati che hanno flesso esattamente in questi punti. Implemento la formula sul computer, usando Mathematica e R, e produco una lista di tali gradi fino a $d = 12$.

4. La tesi contiene anche nuove semplici prove di risultati classici. Si offre, per esempio, una nuova prova del calcolo del grado delle grassmanniane $G(k,n)$ nel proprio embedding di Plücker, dando cos una nuova trasparente interpretazione della dimostrazione originale offerta da Schubert.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] L. Gatto, *Schubert Calculus via Hasse–Schmidt Derivations*, Asian J. Math., **9**, no. 3, (2005), 315-322.
[2] L. Gatto, T. Santiago, *Schubert Calculus on a Grassmann Algebra*, Canad. Math. Bull., to appear (arXiv:math.AG/0702759).
[3] L. Gatto, T. Santiago, *Equivariant Schubert Calculus*, Preprint 2006 arXiv:math.AG/0703445.
[4] T. Santiago, *Degrees of Grassmannians of Lines*, Atti Acc. Sci. di Torino, 2005, to appear (2007).
[5] T. Santiago, *"Catalan Traffic" and Integrals on the Grassmannian of Lines*, Discrete Math. 2007, to appear (arXiv:math.AG/0704.2376).

Caminho Pedrao, 14 - Cidade Nova, Feira de Santana - Bahia 44032-080, Brasile
e-mail: taisesantiago@gmail.com
Dottorato in matematica per le scienze dell'ingegneria
(sede amministrativa: Politecnico di Torino) - Ciclo XVIII
Direttore di Ricerca: Prof. Letterio Gatto, Politecnico di Torino