Luca Spada

Punti fissi nelle logiche a più valori

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 355–358.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_355_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 355-358

Punti fissi nelle logiche a più valori

LUCA SPADA

1. – Introduzione.

Il lavoro di ricerca svolto ha per oggetto alcune estensioni con punti fissi di logiche a più valori.

Le prime estensioni con punti fissi in Logica Matematica sono state quelle del prim'ordine. L'introduzione di punti fissi nella logica predicativa ha permesso di trovare un frammento del second'ordine con caratteristiche interessanti dal punto di vista computazionale ed espressivo (si veda [4] per un'ampia trattazione dell'argomento).

L'idea fondamentale utilizzata per fornire una semantica a tale sistema è quella che una formula del primo ordine contenente una variabile *relazionale* (quindi del secondo ordine) dà origine ad una funzione sui sottoinsiemi della struttura in cui è interpretata. È facile mostrare che se la variabile relazionale ha solo occorrenze *positive* nella formula, allora la funzione associata è una funzione crescente; ciò permette di trovare sempre un'interpretazione per il punto fisso, in virtù del teorema di Tarski:

TEOREMA 1. – *Ogni funzione crescente da un reticolo completo in se stesso ha un punto fisso.*

Un altro importante esempio di logica con punti fissi è il μ-calcolo. Tale logica è ottenuta estendendo la logica modale tramite operatori di punto fisso. Il metodo per fornire una semantica a tale calcolo è del tutto simile, nello spirito, a quello succitato.

L'approccio usato in questa dissertazione è differente. Le logiche oggetto di studio, ammettono infatti una semantica basata su funzioni da $[0,1]^n$ in $[0,1]$. Una volta fissate tutte le variabili proposizionali meno che una è possibile vedere le formule di tali logiche come funzioni da $[0,1]$ in $[0,1]$. Se tali funzioni sono anche continue, allora l'esistenza di un punto fisso è garantita dal teorema di Brouwer.

TEOREMA 2. – *Ogni funzione continua dall'intervallo unitario* $[0,1]$ *in se stesso ha almeno un punto fisso.*

Non solo un tale approccio non era mai stato utilizzato prima in logica, ma l'introduzione di punti fissi nel linguaggio delle logiche polivalenti non era ancora stato oggetto di ricerche.

2. – Metodo e nozioni preliminari.

Affinché il Teorema di Brouwer garantisca l'esistenza di un'interpretazione semantica per punti fissi è essenziale limitarsi a considerare le sole formule la cui interpretazione è una funzione continua (nella variabile su cui consideriamo il punto fisso). Chiameremo le formule per cui è possibile assicurare una tale continuità tramite gli assiomi della logica *formule continue*. Va notato inoltre che la funzione che dà i punti fissi di una formula non è necessariamente continua. Per questo motivo non è possibile introdurre un *operatore* di punto fisso. Per superare questa difficoltà introdurremo i punti fissi delle formule come *nuovi connettivi* nel linguaggio.

Il metodo generale utilizzato è schematizzato nella seguente definizione

DEFINIZIONE 1. – *Sia L una logica. Il linguaggio della logica L contiene tutte le formule di L più le formule $\mu x.\varphi(x, \bar{y})$ e $\upsilon x.\varphi(x, \bar{y})$ per ogni $\varphi(x, \bar{y})$ formula continua, nel linguaggio di L.*

La logica L con punti fissi è assiomatizzata da tutti gli assiomi e regole di L più i seguenti:

1. $\varphi(\mu x.\varphi(x, \bar{y}), \bar{y}) \leftrightarrow \mu x.\varphi(x, \bar{y})$
2. $\varphi(\upsilon x.\varphi(x, y), y) \leftrightarrow \upsilon x.\varphi(x, y)$
3. *Se* $[\varphi(t, \bar{y}) \leftrightarrow t]$ *allora* $\mu x.\varphi(x, \bar{y}) \to t$
4. *Se* $[\varphi(t, \bar{y}) \leftrightarrow t]$ *allora* $t \to \upsilon x.\varphi(x, \bar{y})$

È facile capire dagli assiomi che μ svolge il ruolo di *minimo* punto fisso e υ quello del *massimo*. Si noti che nelle logiche dotate di una negazione involutiva è possibile definire il minimo punto fisso a partire dal massimo, e viceversa, mentre negli altri casi essi vanno introdotti separatamente.

Mentre nella logica proposizionale classica è possibile fornire una semantica dei connettivi per mezzo di *tavole di verità*, nel caso delle logiche polivalenti la presenza di una possibile infinità di valori di verità ci obbliga a presentare l'interpretazione semantica dei connettivi come funzioni.

Nelle logiche prese in esame l'interpretazione della congiunzione è una t-norma continua.

DEFINIZIONE 2. – *Una t-norma $*$, è una funzione da $[0,1]^2$ in $[0,1]$ con le seguenti proprietà:*

- $x * y = y * x$ *(commutativa)*
- $x * (y * z) = (x * y) * z$ *(associativa)*
- $x * 1 = x$ *(dotata di elemento neutro)*
- *Se* $x \leq z$ *allora* $x * y \leq z * y$ *(crescente in entrambi gli argomenti)*

DEFINIZIONE 3. – *Data una t-norma $*$ se ne definisce il suo residuato, come quella funzione $\Rightarrow$ da $[0,1]^2$ in $[0,1]$ tale che*

$$x * z \leq y + \ \textit{se, e soltanto se, } \ +z \leq x \Rightarrow y$$

In un tale ambito la completezza della logica va dunque cercata rispetto ad una (classe di) t-norma ed il suo residuato.

DEFINIZIONE 4. – *Una logica polivalente gode della completezza standard rispetto ad una t-norma* $*$ *se le formule provabili sono esattamente quelle valide nell'intervallo reale* $[0,1]$ *arricchito con la struttura indotta da* $*$ *e dal suo residuato* $\Rightarrow$.

Il sistema BL caratterizza esattamente il calcolo logico comune a tutte le t-norme continue, in altre parole BL gode della completezza standard rispetto a tutte le t-norme continue. Alle sue estensioni assiomatiche corrispondono logiche basate su particolari t-norme. Le sue più importanti estensioni sono la logica di Łukasiewicz (Ł), la logica prodotto (Π) e la logica di Gödel (G) (si veda [3]). Il sistema ŁΠ [2], infine, corrisponde all'"unione disgiunta" di queste ultime tre logiche: le logiche Ł, Π e G, sono fedelmente interpretabili in ŁΠ.

Il lavoro svolto si occupa delle estensione con punti fissi delle suddette logiche. Va notato che alcune di queste sono banali o già state esplorate in circostanze diverse. Le estensioni delle logiche BL, Ł e ŁΠ si rivelano al contrario interessanti e prolifiche. Il metodo è prevalentemente algebrico, per ogni logica introdotta viene studiata la sua semantica algebrica equivalente (nel senso di [1]).

In letteratura è possibile trovare importanti risultati che legano le semantiche algebriche delle logiche finora introdotte a strutture appartenenti ad altri settori della Matematica.

DEFINIZIONE 5. – *Si consideri una qualsiasi algebra del tipo* $\mathcal{A} = \langle A, +, 0, 1 \leq, \dots \rangle$, *dove 0 è l'elemento neutro di* $+$, *1 è un elemento, detto unità forte, tale che per ogni elemento* $a \in A$ *esiste un naturale* $a \leq \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\ volte}$ *e ... sono altre possibili operazioni.*

Si definisce algebra intervallo di $\mathcal{A}$ *una struttura avente operazioni definite tramite quelle di* $\mathcal{A}$ *e come sostegno l'insieme* $\{a \in A \mid 0 \leq a \leq 1\}$.

3. – Risultati Principali.

Il caso più generale affrontato è quello della logica BL. Sfortunatamente lo scarso potere espressivo della logica non permette di descrivere dettagliatamente il comportamento dei punti fissi. Ciò nonostante è possibile provare il seguente risultato.

TEOREMA 3. – *La logica BL con punti fissi è dotata della completezza standard.*

È stato possibile inoltre dimostrare che la logica BL con punti fissi ha lo stesso potere espressivo di una logica già conosciuta nel campo delle logiche a più valori. La dimostrazione del seguente fatto si basa sull'equivalenza *termine a termine* delle rispettive semantiche algebriche.

TEOREMA 4. – *La logica BL con punti fissi è equivalente alla logica BL con operatore magazzino.*

Il caso della logica di Łukasiewicz è il più malleabile: dato che tutti i connettivi in questa logica sono continui è possibile darne una trattazione più omogenea delle altre.

TEOREMA 5. – *La logica di Łukasiewicz con punti fissi è dotata della completezza standard.*

Anche in questo caso è possibile dimostrare che la logica introdotta ha lo stesso potere espressivo di una logica studiata in ambiti completamente diversi:

TEOREMA 6. – *La logica di Łukasiewicz con punti fissi è equivalente alla logica razionale di Łukasiewicz con Δ.*

Infine lo studio dell'estensione con punti fissi della logica ŁΠ, la più espressiva tra quelle studiate, permette di stabilire interessanti legami con altri tipi di strutture.

TEOREMA 7. – *Gli elementi linearmente ordinati della semantica algebrica della logica ŁΠ con punti fissi sono tutte e sole le algebre intervallo di campi reali chiusi.*

Tale legame è estensibile a tutti i componenti della semantica algebrica della logica ŁΠ con punti fissi.

TEOREMA 8. – *Esiste una equivalenza categoriale tra la semantica algebrica della logica ŁΠ con punti fissi ed un particolare tipo di prodotti sottodiretti di campi reali chiusi.*

Anche in questo caso è possibile dimostrare il seguente risultato.

TEOREMA 9. – *La logica ŁΠ con punti fissi è dotata di completezza standard.*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] BLOK W. J. e PIGOZZI D., *Algebraizable Logics*, Memoirs of American Mathematics Society, **77/396**, (1989).
[2] ESTEVA F., GODO L. e MONTAGNA F. *The ŁΠ and Ł$\Pi\frac{1}{2}$ logics: two complete fuzzy systems joining Łukaiewicz and Product Logics,* Archive for Mathematical Logic, **40** (2001), 39-67.
[3] HÁJEK P., Metamathematics of Fuzzy Logic. *Trends in Logic,* Kluwer Academic (1998).
[4] MOSCHOVAKIS Y. N., *Elementary induction on abstract structures*, North Holland (1974).

Dipartimento di Matematica, Università di Salerno
e-mail: lspada@unisa.it
Dottorato in Logica Matematica ed Informatica Teorica
(sede amministrativa: Università di Siena) - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof. Franco Montagna, Università di Siena