Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Andrea Luigi Tironi

Varietà proiettive complesse lisce con sezioni iperpiane riducibili di tipo speciale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 359–362.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_359_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 359-362

Varietà proiettive complesse lisce con sezioni iperpiane riducibili di tipo speciale

ANDREA LUIGI TIRONI

Sin dagli anni '70, molti autori dimostrarono in vari modi il principio che una varietà proiettiva liscia X è tanto speciale quanto lo sono i suoi divisori ampi. Negli anni '80, il principale strumento tecnico di investigazione divenne la mappa di aggiunzione. I fondamentali risultati sull'esistenza di questa mappa e lo studio dettagliato di essa furono i punti di partenza per ottenere classificazioni più generali e più dettagliate di varietà aventi piccoli invarianti proiettivi, come il genere sezionale o il grado. In tutti questi lavori, le ipotesi di liscezza di X, o della sua sezione iperpiana, erano spesso opportunamente indebolite, ma l'irriducibilità della sezione iperpiana di X rimaneva necessaria. Lo studio di varietà proiettive lisce $X \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ in termini di una sezione iperpiana riducibile le cui componenti sono tutte di tipo speciale, è iniziato solo alla fine degli anni '90. In particolare, Chandler, Howard e Sommese hanno incominciato a considerare in ([2]) il seguente

Problema A. Descrivere $X \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ quando l'intersezione di X con qualche iperpiano sia un'unione di $r \geq 2$ ipersuperfici lisce ad incroci trasversi $A_1, \dots, A_r$ tali che il genere di una curva sezione di A_i sia piccolo per ogni $i = 1, \dots, r$.

Più precisamente, i suddetti autori prendono in esame principalmente varietà X come sopra di dimensione $n \geq 4$ (per brevità *n-fold*) polarizzate da un fibrato lineare L ampio e globalmente generato (molto ampio per $n = 4$) il cui sistema lineare completo $|L|$ contenga un elemento riducibile della forma $A = A_1 + \dots + A_r, r \geq 2$, e tale che ogni componente liscia e irriducibile A_i abbia genere sezionale minimo $g(A_i, L_{A_i}) = h^1(\mathcal{O}_{A_i})$ per $i = 1, \dots, r$. Essi provano in [2], (4.6), che se X ha dimensione $n \geq 5$, allora (X, L) è uno scroll su una curva liscia, una componente di A interseca ogni fibra lungo un iperpiano e tutte le altre componenti sono fibre. Per $n = 4$ la situazione risulta invece più ricca. In realtà, restringendosi al caso $n = 4$ e $r = 2$, essi ottengono in [2], (4.8), una lista di possibili coppie (X, L) tali che $g(A_i, L_{A_i}) = 0$ per $i = 1, 2$.

Nella tesi si è continuato questo studio per fornire ulteriori risultati a supporto dell'idea (esplicitamente asserita in [2]) che se tutte le componenti A_i dovessero avere piccoli invarianti proiettivi, allora (X, L) sarebbe di tipo speciale. Lavorando sul Problema A, si è sviluppata inizialmente una teoria attorno ad alcuni invarianti della coppia (X, L), come il grado, il genere sezionale e il Δ-genere. Successivamente si è studiata la mappa di aggiunzione e si sono descritte alcune decomposizioni standard per varietà speciali provenienti dalla teoria dell'aggiunzione nel caso di sezioni iperpiane riducibili. Infine, si sono ottenuti alcuni risultati generali di finitezza che, sotto opportune ipotesi sulle componenti A_i, mostrano che il processo di aggiunzione sulla coppia (X, L) termina. Tale materiale di base, insieme a risultati di Fujita sulla semi-positività dei fibrati aggiunti, trovano applicazione in dimensioni più alte in una seconda parte della tesi, dove l'obiettivo principale è di estendere per quanto possibile i risultati di [2], aumentando il valore degli invarianti per ogni componente A_i di $A \in |L|$. Prima di tutto, la lista data in [2], (4.8), viene raffinata e resa effettiva eliminando il caso in cui (X, L) sia una varietà di Mukai di dimensione quattro, $r = 2$ e $g(A_i, L_{A_i}) = 0$ per $i = 1, 2$ ([3]). Successivamente, continuando lungo questa linea, si sono studiati piccoli ma più alti valori di $g(A_i, L_{A_i})$ dipendenti da n e da r. Tra gli altri risultati ([5]), si riporta qui, a titolo di esempio, il seguente

TEOREMA 1. – *Sia L un fibrato lineare ampio e globalmente generato su una n-fold con $n \geq 5$. Supponiamo che esista un divisore ad incroci normali trasversi $A = A_1 + \ldots + A_r \in |L|$ con gli A_i lisci per $i = 1, \ldots, r, r \geq 2$. Sia $g_{\max} := \max_{1 \leq k \leq r} \{g(A_k, L_{A_k})\}$. Se $g_{\max} \leq 2$, allora (X, L) è una delle seguenti coppie:*

(1) *uno scroll su una curva liscia C con $g(C) = g_{\max}$ e a meno di un riordinamento delle componenti, A_1 interseca ogni fibra in un iperpiano e $(A_i, L_{A_i}) \cong (\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1))$ per $i = 2, \ldots, r$;*

(2) *$n = 5$ e $(X, L) \cong (\mathbb{P}(\mathcal{E}), \xi_{\mathcal{E}})$ è uno scroll su $\mathbb{P}^2$, dove $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\left(\sum_{j=2}^{r} a_j\right) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 3}$ e $\xi_{\mathcal{E}}$ è il fibrato lineare tautologico di $\mathcal{E}$; inoltre, a meno di rinominare le componenti, $(A_1, L_{A_1}) \cong (\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}(1, 1))$ e $[A_j] \cong \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a_j)$ per $j = 2, \ldots, r$ con $a_j = 1, 2, 3$, dove $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ è la mappa di proiezione;*

(3) *$n = 5$ e (X, L) è una fibrazione in iperquadriche su $\mathbb{P}^1$; inoltre, a meno di un riordinamento delle componenti, $(A_1, L_{A_1}) \cong (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^3}(1, 1))$ e $(A_k, L_{A_k}) \cong (\mathbb{Q}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^4}(1))$ per $k = 2, \ldots, r$.*

Tuttavia, quando la dimensione di X decresce, il Problema A diventa più difficile da trattare ed ipotesi più restrittive sono rese necessarie. Per ottenere ulteriori risultati, è stato conveniente considerare il caso $r = 2$ e porre l'attenzione principalmente su coppie (A_i, L_{A_i}) aventi piccoli valori del Δ-genere, dove per Δ-genere della coppia (A_i, L_{A_i}) si intende il numero intero non negativo $\Delta(A_i, L_{A_i}) := \dim A_i + L_{A_i}^{n-1} - h^0(L_{A_i})$. In tal modo, sotto la condizione $\Delta(A_i, L_{A_i}) \leq 1$ si è potuto facilmente procedere con la classificazione di coppie (X, L) come sopra (per il caso $\Delta(A_i, L_{A_i}) = 0, i = 1, 2$, si veda [1]), ottenendo ad esempio la seguente

PROPOSIZIONE 1. – *Sia L un fibrato lineare molto ampio su una 3-fold X. Supponiamo che esista un divisore ad incroci normali trasversi del tipo $A = A_1 + A_2 \in |L|$ con gli A_i lisci e tali che, a meno di un riordinamento, $\Delta(A_1, L_{A_1}) = 0$ e $\Delta(A_2, L_{A_2}) = 1$. Allora (X, L) è una delle seguenti coppie:*

1. *una fibrazione in quadriche su* $\mathbb{P}^1$ *con* $g(X, L) = 2$, *dove* $(A_1, L_{A_1}) \cong (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,1))$ *è una fibra della mappa di proiezione* $X \to \mathbb{P}^1$;
2. $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \xi_{\mathcal{E}})$ *con mappa di proiezione* $\pi : X \to S$, *dove* $\mathcal{E}$ *è un fibrato vettoriale molto ampio di rango due su una superficie liscia* S *e* $\xi_{\mathcal{E}}$ *è il fibrato lineare tautologico di* $\mathcal{E}$; *inoltre, si hanno le seguenti possibilità:*
   - (a) $S = \mathbb{P}^2$, $(A_1, L_{A_1}) \cong (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))$, $A_2 = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(u)$ *e* $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(u) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$ *con* $u = 1, 2$;
   - (b) $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $(A_1, L_{A_1}) \cong (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(2,2))$, $A_2 = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,t)$ *e* $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,t) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(2,2)$ *con* $t \geq 1$;
   - (c) $S = \mathbb{F}_1$, $(A_1, L_{A_1}) \cong (\mathbb{F}_1, [2C_0 + 3f])$, $A_2 = \pi^*[C_0 + \beta f]$ *e* $\mathcal{E} \cong [C_0 + \beta f] \oplus [2C_0 + 3f]$ *con* $\beta \geq 2$, *dove* C_0 *e* f *sono rispettivamente la sezione di minima auto-intersezione e una fibra di* $\mathbb{F}_1$.

Le tecniche usate nei precedenti risultati sono tipiche della teoria dell'aggiunzione. Nonostante ciò, l'uso della mappa di aggiunzione non risulta uno strumento significativo in dimensioni basse. Per questa ragione, si sono considerati anche i casi in cui ogni componente abbia (a) numero di Picard uguale a uno ($n \geq 3, r = 2$ e L ampio) e (b) codimensione ≤ 1 dopo essere stata immersa in $\mathbb{P}^N$ ($n \geq 2, r = 2$ e L molto ampio). In queste situazioni l'approccio è stato differente. Nel caso (a), un lemma tecnico ha permesso di ricondurre il problema a risultati classici per sezioni iperpiane irriducibili di tipo speciale, ottenendo per esempio la seguente

PROPOSIZIONE 2. – *Sia* L *un fibrato lineare ampio su una* n*-fold con* $n \geq 3$. *Assumiamo che ci sia un divisore ad incroci normali trasversi del tipo* $A = A_1 + \ldots + A_r \in |L|$ *con gli* A_i *lisci e* $r \geq 1$. *Si supponga inoltre che* $Pic(A_i) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{O}_{A_i}(1)]$ *per ogni* $i = 1, \ldots, r$. *Se almeno una componente di* A *è isomorfa ad uno spazio lineare* $\mathbb{P}^{n-1}$, *allora* $(X, L) = (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ *e* $A_i \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a_i)|$ *per opportuni interi positivi* a_i *tali che* $\sum_{i=1}^{r} a_i = d$. *Inoltre, se* $n \geq 4$ *ed almeno una componente di* A *è isomorfa ad una iperquadrica* $\mathbb{Q}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$, *allora* (X, L) *è* $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ *oppure* $(\mathbb{Q}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^n}(d))$, *e* $A_i \in |\mathcal{O}_X(a_i)|$ *per opportuni interi positivi* a_i *tali che* $\sum_{i=1}^{r} a_i = d$.

Per quanto concerne invece il caso (b), si è considerato l'embedding $X \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^N$ dato da un sistema lineare molto ampio $|V|$ non necessariamente completo (dove $V \subseteq H^0(X, \mathcal{O}_X(L))$), assumendo che $|V|$ contenga un divisore della forma $A_1 + A_2$, dove A_1 e A_2 (immersi da V) abbiano entrambi codimensione ≤ 1 nei loro span lineari. Per mezzo di questa ipotesi geometrica, si è potuto lavorare in un contesto più generale del Problema A (vedasi [4]), ottenendo il seguente

TEOREMA 2. – *Sia* $X \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^N$ *una varietà complessa liscia di dimensione* $n \geq 2$ *avente un divisore riducibile* $A_1 + A_2 \in |V|$. *Se* $A_i \subset \mathbb{P}^n$ *per* $i = 1, 2$, *allora*

$n \leq 3$ e si ha uno dei seguenti casi:

i) *$X \subset \mathbb{P}^5$ è la superficie di Veronese o una sua proiezione in $\mathbb{P}^4$;*

ii) *$n = 2$ e $X \subset \mathbb{P}^4$ è una intersezione completa (i.c.) oppure è legata ad un piano tramite una i.c. di un cono quadrico di rango quattro e un'altra ipersuperficie di $\mathbb{P}^4$;*

iii) *$n = 2$ e $X \subset \mathbb{P}^4$ è legata ad un piano mediante una i.c. di un cono quadrico di rango tre e un'altra ipersuperficie di $\mathbb{P}^4$;*

iv) *$n = 3$ e $X \subset \mathbb{P}^5$ è legata ad un $\mathbb{P}^3$ per mezzo di una i.c. di un cono quadrico di rango quattro e un'altra ipersuperficie di $\mathbb{P}^5$;*

v) *$n = 2$ e $X \subset \mathbb{P}^3$.*

Infine, il fatto che il Problema A diventi progressivamente più semplice da trattare quando la dimensione di X aumenta, ha condotto a considerare anche la seguente sua generalizzazione:

Problema A′. Siano $H_1, ..., H_r \in$Pic(X) fibrati lineari ampi su X. Descrivere $X \subset \mathbb{P}^N$ quando l'intersezione di X con qualche iperpiano sia un'unione di $r \geq 1$ divisori primi lisci $A_1, ..., A_r$ ad incroci trasversi, tali che le coppie (A_i, H_{iA_i}) abbiano piccoli invarianti per ogni i.

Nella suddetta formulazione non si assume a priori alcuna relazione tra gli H_i ed $L = [A_1 + ... + A_r]$. Inoltre, persino nel caso $r = 1$, il Problema A′ ha presentato alcuni nuovi ed interessanti aspetti (ad esempio, quando L è nef e $n \geq 3$). Un primo approccio a tale problema, a parte alcune situazioni particolari studiate separatamente, ha suggerito di iniziare con il caso $n \geq 5$ e $H_1 = ... = H_r = H$ per qualche fibrato lineare ampio H su X. Così, essendo H e L due fibrati lineari non correlati, un altro obiettivo della tesi è stato quello di estendere in tale contesto alcuni risultati ottenuti nell'ambito del Problema A, studiando i casi in cui tutte le componenti A_i di $A \in |L|$ ammettano piccoli valori del grado $H_{A_i}^{n-1}$, del genere sezionale $g(A_i, H_{A_i})$ e del Δ-genere $\Delta(A_i, H_{A_i})$ per $i = 1, ..., r$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] M. C. Beltrametti, K.A. Chandler e A. J. Sommese, *Reducible hyperplane sections, II*, Kodai Math. J., **25** (2002), 139-150.

[2] K. A. Chandler, A. Howard e A. J. Sommese, *Reducible hyperplane sections, I*, J. Math. Soc. Japan, **51** (1999), 887-910.

[3] A. Lanteri e A.L. Tironi, *On reducible hyperplane sections of 4-folds*, J. Math. Soc. Japan, **53** (2001), 559-563.

[4] J. C. Sierra e A. L. Tironi, *Varieties with a reducible hyperplane section whose two components are hypersurfaces*, Proc. of A.M.S., **135** (2007), 1263-1269.

[5] A. L. Tironi, *High dimensional reducible hyperplane sections with multigenera ≤ 1*, Arch. Math. (Basel), **81** (2003), 397-401.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano
e-mail: atironi@mat.unimi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Antonio Lanteri, Università degli Studi di Milano