Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giacomo Tommei

Monitoraggio di impatti di NEAs: risultati teorici e computazionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 363–366.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_363_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 363-366

Monitoraggio di impatti di NEAs: risultati teorici e computazionali

GIACOMO TOMMEI

1. – Introduzione.

La tesi tratta lo sviluppo di metodi analitici, geometrici e numerici per la determinazione orbitale e la valutazione del rischio di impatto di Near-Earth Asteroids (NEAs) con la Terra. I NEAs sono corpi minori del Sistema Solare che hanno una distanza del perielio inferiore a 1.3 UA (Unità Astronomiche). Fin dalla sua formazione, il nostro pianeta è stato colpito numerose volte da asteroidi, ma solo negli ultimi decenni la comunità scientifica ha preso coscienza del potenziale pericolo e si è impegnata nel migliorare sia le capacità osservative che gli algoritmi di determinazione orbitale per valutare il rischio di una collisione.

Quando si scopre un asteroide, la sua orbita è fortemente incerta. Sebbene in molti casi una *soluzione nominale* (ottenuta con il metodo dei minimi quadrati) esista, altre orbite, aventi RMS dei residui osservativi non significativamente sopra il minimo, sono accettabili come soluzioni. È possibile descrivere la situazione definendo una *regione di confidenza* nello spazio di dimensione sei degli elementi orbitali. Per escludere eventuali impatti si deve prendere in considerazione l'intero insieme di orbite appartenenti alla regione di confidenza: il modello dinamico da utilizzare, essenzialmente il problema degli N-corpi, non è integrabile, quindi non c'è modo di ottenere tutte le soluzioni per un dato intervallo di tempo. L'unica cosa possibile è calcolare un certo numero di orbite attraverso un'integrazione numerica. La regione di confidenza viene quindi campionata con un numero finito di *Asteroidi Virtuali* (VAs, Virtual Asteroids): ciascuno di essi rappresenta una condizione iniziale più o meno "vicina" a quella reale. Lo scopo è stabilire se la regione di confidenza contiene *Impattori Virtuali* (VIs, Virtual Impactors), sottoinsiemi di condizioni iniziali che portano ad una collisione con la Terra. Il problema principale è come garantire completezza a tale ricerca, tenendo conto dei costi computazionali. I metodi descritti nella tesi utilizzano un campionamento della regione di confidenza con varietà differenziabili. Nel caso che l'incertezza sia essenzialmente lungo una direzione viene utilizzata la *Linea Delle Variazioni* (LOV, Line Of Variations, [1]), una curva differenziabile, che può rappresentare, in alcuni casi, la spina della regione di confidenza: la LOV è campionata uniformemente in modo da poter interpolare tra VAs consecutivi. Questa è la base degli algoritmi ([2]) utilizzati dai sistemi automatici CLOMON2 (Università di Pisa e Valladolid) e Sentry (JPL). Quando però l'arco osservativo è corto, la regione di confidenza appare come un disco e la definizione di LOV è fortemente dipendente dalle coordinate e dalle unità usate per la determinazione orbitale preliminare: la LOV è solo una corda di questo disco ed il suo campionamento non è rappresentativo dell'intera regione. Per questo motivo si è deciso di cambiare l'oggetto geometrico utilizzato per il campionamento: non più una curva, ma una superficie. L'idea è stata quella di costruire una *ragnatela* che ricoprisse la regione di confidenza, calcolata nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ (ρ è la distanza geocentrica dell'oggetto, si veda anche la definizione di "regione ammissibile", [3]), con le curve di livello della funzione costo usata per minimizzare l'RMS dei residui. Per ogni curva di livello si selezionano poi alcuni punti, corrispondenti a direzioni fissate, da usare come VAs. Sono allo studio algoritmi per l'identificazione di VIs a partire da questo campionamento.

2. – Problemi studiati.

I principali problemi studiati riguardano la definizione di LOV e i metodi per campionare la regione di confidenza, gli algoritmi per l'individuazione di VIs, lo studio dell'incertezza della distanza orbitale e l'analisi degli incontri ravvicinati con la teoria di Öpik. Non potendo qui descrivere tutte le ricerche effettuate ci concentreremo sugli ultimi due aspetti.

2.1 – *Incertezza della distanza orbitale tra due orbite Kepleriane confocali.*

La *distanza orbitale* tra due orbite Kepleriane confocali è utile per sapere se due corpi celesti che si muovono lungo queste orbite possono collidere o sperimentare un incontro ravvicinato. Una semplice considerazione geometrica suggerisce che due orbite confocali possono essere vicine in più di una coppia di punti, quindi è necessario calcolare non solo il minimo assoluto (chiamato MOID, Minimal Orbit Intersection Distance) della funzione distanza d tra due punti lungo le orbite, ma tutti i minimi locali. È possibile ottenere facilmente questi valori calcolando i punti critici della funzione d^2 (si usa la distanza al quadrato per avere una funzione liscia anche nei punti di incrocio orbitale). L'incertezza della distanza orbitale può essere calcolata da una formula di propagazione dell'incertezza, ma la possibilità di incrocio orbitale produce una singolarità in questo calcolo. Una prima difficoltà, infatti, è la presenza in tale formula delle derivate parziali della distanza rispetto agli elementi orbitali, le quali, in generale, non esistono quando le due orbite si intersecano. Una difficoltà addizionale è che l'incertezza di una distanza orbitale piccola, ma non nulla, può dar luogo a valori negativi della distanza, privi di significato. Entrambi questi problemi sono particolarmente spiacevoli perché si vorrebbe conoscere l'incertezza proprio quando la distanza orbitale può essere piccola o nulla, cioé quando può verificarsi una collisione o un incontro ravvicinato. Per risolvere questi problemi si è pensato di definire mappe regolari, funzioni dei parametri che definiscono la configurazione a due orbite, che esprimono i minimi locali di d senza approssimazioni e che ammettono valori negativi; usando queste mappe è possibile calcolare un'incertezza della distanza orbitale dotata di senso. La configurazione a due orbite è l'insieme $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$ di 10 elementi, composto da due sottoinsiemi di 5 elementi ciascuno, tali che E_i definisce la configurazione geometrica della i-esima orbita ($i = 1, 2$). Utilizzando questa notazione ed indicando con $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1(E_1, v_1)$, $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_2(E_2, v_2) \in \boldsymbol{R}^3$ le coordinate cartesiane dei due corpi sulle due orbite la funzione distanza può essere così espressa:

DEFINIZIONE 1. – *Per ogni scelta dei parametri orbitali $\mathcal{E}$ si definisce funzione distanza Kepleriana d la mappa*

$$\mathcal{V} \ni V \mapsto d(\mathcal{E}, V) \stackrel{def}{=} \sqrt{\langle \mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_2 \rangle} \in \boldsymbol{R}^+ \ ,$$

dove $\mathcal{V} = \boldsymbol{T}^2 = S^1 \times S^1$ (un toro bidimensionale) se entrambe le orbite sono limitate, $\mathcal{V} = S^1 \times \boldsymbol{R}$ (un cilindro infinito) se solo una delle due è limitata, $\mathcal{V} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ se sono entrambe illimitate, e $V = (v_1, v_2)$ è il vettore dei parametri che identificano i due oggetti lungo le orbite.

L'idea principale messa in atto è quella di operare un "taglio" del dominio della configurazione a due orbite in modo da poter cambiare il segno della distanza su opportuni sottoinsiemi del dominio rimanente; lo scopo è ottenere una mappa analitica che ci permetta di utilizzare la formula di propagazione dell'incertezza ([5]).

2.2 – *Elementi canonici per la teoria di Öpik.*

La teoria di Öpik (1976) tratta incontri ravvicinati di corpi minori con pianeti e si basa su di un approccio a 2 corpi. Si suppone che l'oggetto in esame si muova su di un'ellisse eliocentrica sino al tempo di incontro con il pianeta, mentre durante l'incontro risenta solo della presenza del pianeta muovendosi su di un ramo di iperbole planetocentrica. Le formule originali di Öpik mettono in relazione le componenti del vettore velocità planetocentrica imperturbata, $\boldsymbol{U}$, con gli elementi orbitali eliocentrici a_h, e_h, i_h. Le formule di Öpik sono esatte solo a collisione (MOID=0). In un articolo del 2003 Valsecchi et al. hanno introdotto delle correzioni al primo ordine nella distanza per estendere tali relazioni agli incontri ravvicinati ed hanno calcolato le espressioni delle coordinate ξ e ζ sul piano bersaglio (TP). Il piano bersaglio è il piano contenente il centro del pianeta e perpendicolare all'asintoto entrante dell'iperbole planetocentrica. Nello stesso articolo è stato introdotto un insieme di elementi non canonici $(U, \theta, \phi, \xi, \zeta, t_0)$, che gli autori hanno utilizzato per analizzare l'incontro ravvicinato e la dinamica generata da tale incontro. In questo contesto $U = |\boldsymbol{U}|$ è la velocità planetocentrica imperturbata, θ e ϕ sono gli angoli che definiscono la direzione di $\boldsymbol{U}$ in un sistema di riferimento planetocentrico, mentre t_0 è il tempo di incrocio del piccolo corpo con il piano dell'eclittica. Un'idea sviluppata nella tesi è stata quella di cercare un insieme di elementi canonici che rimanessero ben definiti a collisione e potessero aiutare nello studio della dinamica degli incontri ravvicinati. Partendo dagli elementi iperbolici di Delaunay $\mathcal{D}_{hyp} = (\mathcal{D}^5_{hyp}, h) = (L, G, H, l, g, h)$ siamo arrivati a provare, utilizzando un'opportuna funzione generatrice, che il seguente insieme è composto da elementi canonici ben definiti a collisione:

$$\mathcal{C}_{hyp} = (L, \Theta, H, l, \theta_C, \phi_C) \ ,$$

dove θ_C e ϕ_C sono gli angoli che definiscono la direzione del centro dell'iperbole (che è definito anche a collisione) e il momento coniugato a θ_C è la componente del momento angolare lungo una direzione fissata. Per avere a disposizione degli elementi da utilizzare all'interno del formalismo di Öpik, abbiamo poi sostituito gli elementi L e l

con U e η (la distanza percorsa lungo l'asintoto, partendo da un tempo di riferimento e supponendo costante la velocità) ottenendo un nuovo insieme di elementi canonici:

$$\mathcal{C}_{opik} = (U, \Theta, H, \eta, \theta_C, \phi_C)$$

La posizione dell'oggetto sul TP è un'informazione essenziale per capire la dinamica dei successivi incontri: è per questo che ci siamo chiesti se esistessero elementi canonici contenenti le due coordinate (o funzioni di esse) sul piano bersaglio; la risposta è negativa ([4]) ed è stata provata grazie alla seguente proposizione ed al successivo teorema (con $\{,\}$ sono indicate le parentesi di Poisson).

PROPOSIZIONE 1. – *È possibile trovare due funzioni*

$$\xi : \mathcal{D}^5_{hyp} \to \boldsymbol{R}$$
$$\zeta : \mathcal{D}^5_{hyp} \to \boldsymbol{R}$$

che caratterizzano la posizione dell'oggetto sul TP in un qualche sistema di riferimento e tali che

$$\{\xi, \zeta\} = 0 \ .$$

TEOREMA 1. – *Se ξ e ζ sono due funzioni come nella Proposizione 1, allora non è possibile trovare una funzione*

$$\eta : \mathcal{D}_{hyp} \to \boldsymbol{R}$$

tale che

$$\{\xi, \eta\} = 0 \qquad \{\zeta, \eta\} = 0 \ .$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] MILANI A., SANSATURIO E., TOMMEI G., ARRATIA O. e CHESLEY S.R., *Multiple solutions for asteroid orbits: Computational procedure and applications*, Astron. & Astroph., **431** (2005), 729-746.

[2] MILANI A., CHESLEY S.R., SANSATURIO E., TOMMEI G. e VALSECCHI G.B., *Nonlinear impact monitoring: line of variations searches for impactors*, ICARUS, **173** (2005), 362-384.

[3] TOMMEI G., *Nonlinear impact monitoring: 2-dimensional sampling*, Dynamics of Population of Planetary Sytems, **IAUC 197** (2005), 259-264.

[4] TOMMEI G., *Canonical elements for Öpik theory*, Cel. Mech. & Dyn. Astr., **94** (2006), 173-195.

[5] GRONCHI G. F. e TOMMEI G., *On the uncertainty of the minimal distance between two confocal keplerian orbits*, Discr. Cont. Dyn. Syst. B, **7** (2007), 755-778.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
e-mail: tommei@dm.unipi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Pisa) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. A. Milani Comparetti, Università di Pisa