Bollettino
Unione Matematica Italiana

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

Francesca Vetro

**Irriducibilià di Spazi di Hurwitz**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 367–370.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_367_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 367-370

# Irriducibilità di Spazi di Hurwitz

FRANCESCA VETRO

## 1. – Presentazione del problema e risultati ottenuti.

Lo studio degli spazi di Hurwitz e, in particolare, della loro irriducibilità è un problema classico in geometria algebrica. Gli spazi di Hurwitz parametrizzano, infatti, classi di equivalenza di rivestimenti di grado $d$, di curve proiettive complesse connesse non singolari, con $n$ punti di diramazione ed è noto che i rivestimenti ramificati intervengono in modo naturale nello studio delle curve algebriche. È stato Hurwitz il primo a preoccuparsi di studiare l'irriducibilità degli spazi che da lui hanno preso il nome. Hurwitz, utilizzando un risultato di Clebsch e Lüroth, ha dimostrato l'irriducibilità degli spazi di Hurwitz che parametrizzano classi di equivalenza di rivestimenti semplici di grado $d$ della retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1$. Il risultato di Hurwitz, unitamente al fatto che ogni curva proiettiva complessa non singolare di genere $g$ può essere pensata come un rivestimento semplice di grado $d$ di $\mathbb{P}^1$ se $d \geq g + 1$, ha permesso a Severi di provare l'irriducibilità dello spazio dei moduli di curve proiettive complesse non singolari di genere $g$, $M_g$. Il risultato di Severi sottolinea come lo studio dell'irriducibilità degli spazi di Hurwitz, oltre ad essere interessante per se stesso in quanto permette di dare una classificazione topologica dei rivestimenti presi in esame, è di notevole interesse per le sue applicazioni.

Nel corso degli ultimi anni sono stati diversi i matematici che si sono accostati allo studio dell'irriducibilità degli spazi di Hurwitz. È ad Arbarello che si deve l'aver dimostrato l'irriducibilità degli spazi di Hurwitz che parametrizzano rivestimenti di grado $d$ di $\mathbb{P}^1$ con $n-1$ punti semplici ed un punto di ramificazione totale. Risultato questo che è stato generalizzato, al caso di rivestimenti di grado $d$ di $\mathbb{P}^1$ con $n-1$ punti semplici ed una fibra arbitraria, da Natanzon e Kluitmann. Spazi di Hurwitz parametrizzanti rivestimenti di $\mathbb{P}^1$ aventi due fibre speciali, sono stati studiati da Wajnryb. Quest'ultimo ha dimostrato che le componenti connesse di questi spazi sono individuate dalle monodromie locali delle fibre speciali e dal gruppo di monodromia. Wajnryb ha mostrato, inoltre, che questi parametri non sono sufficienti ad individuare le componenti connesse degli spazi di Hurwitz di rivestimenti di $\mathbb{P}^1$ con tre fibre speciali.

Fino a poco tempo fa, i risultati noti sull'irriducibilità di spazi di Hurwitz riguardavano esclusivamente rivestimenti di $\mathbb{P}^1$. Solo recentemente Graber, Harris e Starr hanno preso in esame gli spazi di Hurwitz $H^o_{d,n}(Y)$ parametrizzanti rivestimenti $f : X \to Y$ di grado $d$ di una curva proiettiva complessa non singolare $Y$ di genere $g \geq 1$, semplicemente ramificati in $n$ punti e con gruppo di monodromia $S_d$, dimostrandone l'irriducibilità per $n \geq 2d$. È stato Kanev a migliorare questo risultato e ad estenderlo a rivestimenti di grado $d$ che sono semplicemente ramificati in tutti i punti del discriminante eccetto uno. Fissando la ramificazione della fibra speciale, cioè una partizione $\underline{e} = (e_1, \dots, e_r)$ di $d$ dove $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_r$, ha ottenuto gli spazi di Hurwitz $H^o_{d,n,\underline{e}}(Y)$ parametrizzanti rivestimenti di $Y$ con gruppo di monodromia $S_d$, semplicemente ramificati in $n$ punti e ramificati con molteplicità $e_1, \dots, e_r$ su un punto aggiuntivo, dimostrandone l'irriducibilità per $n \geq 2d-2$.

Gli spazi $H^o_{d,n,\underline{e}}(Y)$ sono i primi spazi di Hurwitz che vengono presi in esame nella tesi. Si dimostra che per essi sussiste il seguente risultato.

TEOREMA 1 ([2], Teorema 1). – *Sia $Y$ una curva proiettiva complessa, connessa, non singolare di genere $g \geq 1$ e sia $|\underline{e}| = \sum_{i=1}^{r}(e_i - 1)$. Se $n + |\underline{e}| \geq 2d$ lo spazio di Hurwitz $H^o_{d,n,\underline{e}}(Y)$ è irriducibile.*

Il risultato del teorema precedente migliora quanto provato da Kanev e generalizza il risultato ottenuto da Graber, Harris e Starr. L'irriducibilità di $H^o_{d,n,\underline{e}}(Y)$ è, infatti, dimostrata per gli stessi valori del genere di $X$ e $Y$ per i quali Harris, Graber e Starr ottengono il loro risultato, ma in più si considerano rivestimenti con una fibra speciale.

È importante sottolineare che tutti i risultati di irriducibilità menzionati, finora, riguardano spazi di Hurwitz di rivestimenti il cui gruppo di monodromia è il gruppo simmetrico $S_d$. $S_d$ è il gruppo di Weyl del sistema di radici $A_{d-1}$, viene, dunque, spontaneo chiedersi cosa accade quando si sostituisce $S_d$ con un altro gruppo di Weyl. Rivestimenti ramificati con gruppo di monodromia un gruppo di Weyl sono di particolare interesse in quanto intervengono, ad esempio, nello studio delle curve spettrali e delle varietà modulari parametrizzanti varietà abeliane. Rivestimenti di questo tipo sono stati studiati da Biggers, Fried e Kanev. Ai primi due si deve l'aver verificato che gli spazi di Hurwitz, che parametrizzano rivestimenti di $\mathbb{P}^1$ con gruppo di monodromia un gruppo di Weyl di tipo $D_d$ e le cui monodromie locali sono tutte riflessioni, sono irriducibili. A Kanev si deve, invece, l'aver esteso quanto verificato da Biggers e Fried a rivestimenti di Galois di $\mathbb{P}^1$ il cui gruppo di Galois è un arbitrario gruppo di Weyl.

Nell'ultimo capitolo della tesi si fissa l'attenzione proprio su rivestimenti di questo tipo. Vengono studiati, infatti, spazi di Hurwitz di rivestimenti ramificati con una fibra speciale e gruppo di monodromia un gruppo di Weyl di tipo $B_d$. Un rivestimento $g: X \to Y$ di questo tipo ha grado $2d$ e monodromie locali che sono tutte riflessioni eccetto una. Il rivestimento $g$ può essere scomposto come segue $X \xrightarrow{\pi} X' \xrightarrow{f} Y$ dove $X, X', Y$ sono curve proiettive complesse connesse non singolari, $f$ è un rivestimento di grado $d$ con gruppo di monodromia $S_d$, semplicemente ramificato in $n_2$ punti e con un punto speciale $\tilde{x}$ mentre $\pi$ è un rivestimento ramificato di grado due. Siano $D_f$ e $D_\pi$ rispettivamente il luogo discriminante di $f$ e di $\pi$. Dal momento che $\pi$ è un rivestimento ramificato si possono presentare i seguenti casi:

(a) $f(D_\pi) \cap D_f = \emptyset$, (b) $D_\pi \cap f^{-1}(\tilde{x}) \neq \emptyset$ ma $D_\pi$ non è contenuto in $f^{-1}(\tilde{x})$ e (c) $D_\pi \subset f^{-1}(\tilde{x})$.

Gli spazi di Hurwitz parametrizzanti rivestimenti del tipo $(a), (b)$ e $(c)$ sono stati denotati rispettivamente con $H_{W(B_d),(n_1;n_2,\underline{e})}(Y)$, $H_{W(B_d),(n_1;n_2,[j_1,\dots,j_v])}(Y)$ e

$H_{W(B_d),(n_2,[j_1,\dots,j_{n_1}])}(Y)$. Lo studio della loro irriducibilità, quando la curva base $Y$ è isomorfa a $\mathbb{P}^1$, ha portato alla formulazione dei seguenti teoremi.

TEOREMA 2 ([3], Teorema 4). – *Gli spazi di Hurwitz* $H_{W(B_d),(n_1;n_2,\underline{e})}(\mathbb{P}^1)$ *e* $H_{W(B_d),(n_1;n_2,[j_1,\dots,j_v])}(\mathbb{P}^1)$ *sono irriducibili.*

TEOREMA 3 ([3], Teorema 8). – *Lo spazio di Hurwitz* $H_{W(B_d),(n_2,[j_1,\dots,j_{n_1}])}(\mathbb{P}^1)$ *è irriducibile.*

Lo studio dell'irriducibilità di $H_{W(B_d),(n_1;n_2,\underline{e})}(Y)$ e $H_{W(B_d),(n_1;n_2,[j_1,\dots,j_v])}(Y)$, quando $Y$ ha genere $g \geq 1$ ha permesso di ottenere il seguente risultato.

TEOREMA 4 ([3], Teorema 7). – *Sia Y una curva proiettiva complessa, connessa, non singolare di genere $g \geq 1$ e sia $|\underline{e}| = \sum_{i=1}^{r} (e_i - 1)$. Se $n_2 + |\underline{e}| \geq 2d$ gli spazi di Hurwitz $H_{W(B_d),(n_1;n_2,\underline{e})}(Y)$ e $H_{W(B_d),(n_1;n_2,[j_1,\dots,j_v])}(Y)$ sono irriducibili.*

## 2. – Lo studio dell'irriducibilità degli spazi di Hurwitz.

Siano $X$, $X'$ e $Y$ curve proiettive complesse, connesse, non singolari di genere $\geq 0$.

DEFINIZIONE 1. – *Due rivestimenti di grado d, $f_1 : X \to Y$ e $f_2 : X' \to Y$, sono equivalenti se esiste una mappa biolomorfa $h : X \to X'$ tale che $f_2 \circ h = f_1$.*

Sia $f : X \to Y$ un rivestimento ramificato di grado $d$ con luogo discriminante $D$, $b_0$ un punto di $Y - D$, $g$ il genere di $Y$ e $m : \pi_1(Y - D, b_0) \to S_d$ l'omomorfismo di monodromia associato a $f$. Se si sceglie un sistema standard di generatori, $(\gamma_1, \dots, \gamma_n; \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g)$, per $\pi_1(Y - D, b_0)$, si numera mediante una biiezione $\phi$ la fibra $f^{-1}(b_0)$ e si pone $t_i = m(\gamma_i)$, $\lambda_k = m(\alpha_k)$, $\mu_k = m(\beta_k)$, si ottiene una $(n + 2g)$-upla di permutazioni di $S_d$ $(t_1, \dots, t_n; \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_g, \mu_g)$ con le seguenti proprietà: $t_i \neq id$ per ogni $i$, $t_1 \cdots t_n = [\lambda_1, \mu_1] \cdots [\lambda_g, \mu_g]$ e il gruppo generato dalle permutazioni $t_i$, $\lambda_k$, $\mu_k$, con $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, g$, è transitivo.

DEFINIZIONE 2. – *Sia G un gruppo. Una successione ordinata di elementi di G, $(t_1, \dots, t_n; \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_g, \mu_g)$, tale che $t_i \neq id$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e*

$$t_1 \cdots t_n = [\lambda_1, \mu_1] \cdots [\lambda_g, \mu_g]$$

*è detta un sistema di Hurwitz con valori in G. Il sottogruppo di G generato da $t_i, \lambda_k, \mu_k$, con $i = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, g$, è detto il gruppo di monodromia del sistema di Hurwitz. Due sistemi di Hurwitz con valori in G, $(t_1, \dots, t_n; \lambda_1, \dots, \mu_g)$ e $(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n; \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\mu}_g)$, sono equivalenti se esiste $s \in G$ tale che*

$$\bar{t}_i = s^{-1} t_i s, \quad \bar{\lambda}_k = s^{-1} \lambda_k s, \quad \bar{\mu}_k = s^{-1} \mu_k s$$

*per ogni $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, g$.*

Un risultato classico (si veda [1], Propositione 1.2) assicura che l'insieme delle classi di equivalenza di rivestimenti ramificati di grado $d$ di $Y$ con luogo discriminante $D$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle classi di equivalenza di sistemi di Hurwitz con valori in $S_d$ e gruppo di monodromia transitivo. Sia $Y^{(n)}$ il prodotto simmetrico di $Y$ con se stesso $n$-volte, cioè lo spazio che si ottiene quozientando il prodotto cartesiano di $n$-copie di $Y$ con $S_d$. È ben noto che $Y^{(n)}$ è una varietà complessa i cui elementi, $n$-uple non ordinate di punti di $Y$, possono essere identificati con sottoinsiemi finiti di $Y$. Sia $\varDelta$ il sottoinsieme di $Y^{(n)}$ individuato dalle $n$-uple con meno di $n$ punti distinti e sia $H(d,n,Y)$ l'insieme delle classi di equivalenza di rivestimenti ramificati di grado $d$ di $Y$ con $n$ punti di diramazione. Associando ad ogni classe di equivalenza di rivestimenti ramificati $[f]$ il luogo discriminante di $f$ si determina una mappa tra insiemi

$$\delta : H(d,n,Y) \to Y^{(n)} - \varDelta.$$

È possibile definire su $H(d,n,Y)$ (si veda [1], paragrafo 1.3) una topologia che rende $\delta$ un rivestimento topologico. In tal modo gli spazi $H(d,n,Y)$ acquisiscono una naturale struttura di varietà complessa indotta dalla struttura di varietà di $Y^{(n)}$.

DEFINIZIONE 3. – *Le varietà complesse $H(d,n,Y)$ sono dette spazi di Hurwitz.*

Dal momento che gli spazi di Hurwitz sono varietà complesse, per provare che sono irriducibili è sufficiente dimostrare che sono connessi. Le componenti connesse di $H(d,n,Y)$ sono in corrispondenza biunivoca con le orbite dell'azione di $\pi_1(Y^{(n)} - \varDelta, D)$ sulla fibra $\delta^{-1}(D)$. Quindi il problema di determinare le componenti connesse di $H(d,n,Y)$ si riduce al calcolo delle orbite dell'azione di $\pi_1(Y^{(n)} - \varDelta, D)$ sull'insieme delle classi di equivalenza di sistemi di Hurwitz che corrispondono ai rivestimenti della fibra $\delta^{-1}(D)$. Lo studio dell'irriducibilità degli spazi di Hurwitz si riconduce, dunque, alla risoluzione di un problema di natura puramente combinatoria quello di determinare una forma normale alla quale ricondurre, agendo esclusivamente con elementi del gruppo delle trecce $\pi_1(Y^{(n)} - \varDelta, D)$, ogni altra classe di equivalenza di sistemi di Hurwitz dell'insieme considerato. È proprio questa la via che si è seguita per ottenere i risultati di irriducibilità presenti nella tesi.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] FULTON W., *Hurwitz Schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*, Ann. of Math. (2), **10** (1969), 542-575.

[2] VETRO F., *Irreducibility of Hurwitz spaces of coverings with one special fiber*, Indag. Mathem., **17**, no. 1 (2006), 115-127.

[3] VETRO F., *Irreducibility of Hurwitz spaces of coverings with monodromy groups Weyl groups of type $W(B_d)$*, Boll. Unione Mat. Ital. (in corso di stampa), Preprint N. 279, April 2005, Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università degli Studi di Palermo.

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università degli Studi di Palermo
e-mail: fvetro@math.unipa.it

Dottorato di ricerca in Matematica (sede amministrativa: Palermo) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Vassil Kanev, Università degli Studi di Palermo