

---

# BOLLETTINO

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

CHRISTIAN VERGARA

## **Modellazione numerica di problemi con condizioni al contorno deficitarie in fluidodinamica incomprimibile**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 10-A—La  
Matematica nella Società e nella Cultura (2007), n.2, p. 371–374.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2007\\_8\\_10A\\_2\\_371\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_371_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Modellazione numerica di problemi con condizioni al contorno deficitarie in fluidodinamica incompressibile

CHRISTIAN VERGARA

### 1. – Il problema a flussi imposti.

Nell'ambito di vari problemi in fluidodinamica modellati dalle equazioni di Navier-Stokes (NS), si presenta il problema di voler trattare delle condizioni al bordo integrali su superfici artificiali  $\Gamma_i$  del tipo

$$(1) \quad \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = Q_i,$$

dove  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  è il campo di velocità,  $\mathbf{n}$  la normale uscente da  $\Gamma_i$  e  $Q_i(t)$  un dato.

Ovviamente il problema differenziale così ottenuto non è ben posto. Nella letteratura ingegneristica questo problema è stato comunemente aggirato prescrivendo un profilo arbitrario di velocità tale per cui il flusso fosse pari a  $Q_i$ . Per superare l'ambiguità del precedente approccio ingegneristico, in [1] è stato proposto, per il problema di Stokes stazionario, di introdurre un moltiplicatore di Lagrange per ogni condizione di flusso (1) e di trattare perciò queste ultime come vincoli che la soluzione deve rispettare. In questo lavoro si è estesa tale idea al problema non lineare e non stazionario, introducendo una opportuna funzione Lagrangiana da minimizzare. Si è ottenuta la seguente *formulazione aumentata* (si veda [3]):

**PROBLEMA 1.** – *Dati  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{f}(t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  e  $\mathbf{Q}(t) \in (C^0([0, T]))^m$ , trovare  $\mathbf{u}(t) \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $p \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  e  $\lambda \in (L^2(0, T))^m$  tali che*

$$(2) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \int_{\Gamma_j} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \\ b(q, \mathbf{u}) = 0, \\ \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = Q_i \quad \forall i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

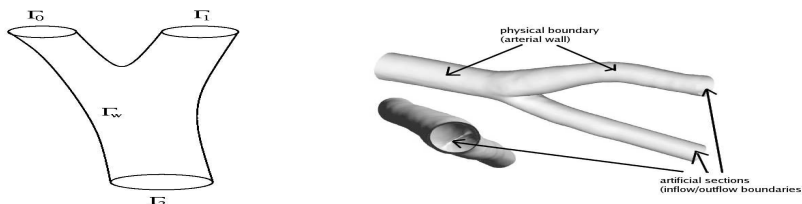


Figura 1. – Esempio di dominio  $\Omega$  troncato artificialmente: distretto vascolare. Si distingue il bordo “fisico”  $\Gamma_w$  e le sezioni “artificiali”  $\Gamma_i$ .

per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  e  $q \in L^2(\Omega)$ , dove  $\mathbf{V}$  è un opportuno sottospazio di  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ,  $p$  è la pressione e  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$  le classiche forme bilineari associate al problema NS.

Abbiamo inoltre la seguente

PROPOSIZIONE 1. – Per dati  $Q_i$  sufficientemente regolari e con  $\sum_i |Q_i|$  e  $|\mathbf{u}_0|_{\mathbf{V}}$  abbastanza piccoli, Problema 1 è localmente (in tempo) ben posto, cioè esiste un  $T^* > 0$  tale per cui una soluzione  $(\mathbf{u}, p, \{\lambda_i\}_{i=1,\dots,m})$  esiste  $[0, T^*]$ .

Per la dimostrazione si è usato il classico Teorema di Brezzi, mostrando che vale una condizione *inf-sup* per il problema aumentato (2).

**2. – Discretizzazione numerica.**

Per la risoluzione numerica del Problema 1 sono state proposte 3 strategie. La prima (schema I) è basata su delle iterazioni di punto fisso e si è rivelata molto costosa. La seconda (schema II) è basata su uno splitting algebrico della matrice aumentata ottenuta dalla formulazione debole, in cui il calcolo di velocità e pressione è separato da quello dei moltiplicatori di Lagrange. In questo modo, è stato dimostrato che il problema a flussi imposti può essere risolto con  $m + 1$  problemi NS con condizioni al bordo “classiche”, in particolare di Neumann. Quindi, questo algoritmo permette di utilizzare dei codici di calcolo pre-esistenti e di non implementare *ex-novo* il problema aumentato. Con tale strategia si sono ritrovate le soluzioni analitiche di Poiseuille e di Womersley (si veda Fig. 2)

Tuttavia, la precedente strategia presenta l’inconveniente degli alti costi computazionali. Perciò è stato proposto un terzo algoritmo (schema III), basato su uno splitting differenziale inesatto del problema aumentato (2), che viene in questo modo decomposto in  $m$  problemi stazionari (e quindi risolti *una tantum*) e un problema non stazionario a flusso nullo. L’inesattezza di tale algoritmo consiste nel risolvere quest’ultimo problema imponendo un profilo di velocità nullo. Così, stiamo utilizzando a tutti gli effetti l’approccio ingegneristico. Il vantaggio risiede nella seguente stima *a priori* (si veda [4]):

TEOREMA 1. – Sia  $\Omega' \subset\subset \Omega$  tale che  $dist(\Omega', \Gamma) \geq \bar{d}$ . Se il dominio  $\Omega$  è sufficientemente regolare, la seguente stima vale per l’errore  $\mathbf{E}$

$$\int_0^T \|\mathbf{E}(s)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega')}^2 ds \leq C(t, Re)e^{-\bar{d}}$$

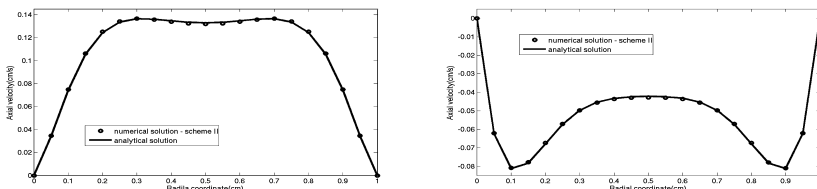


Figura 2. – Soluzione di Womersley -  $t = 2.1$  s (sinistra) e  $t = 2.3$  s (destra).

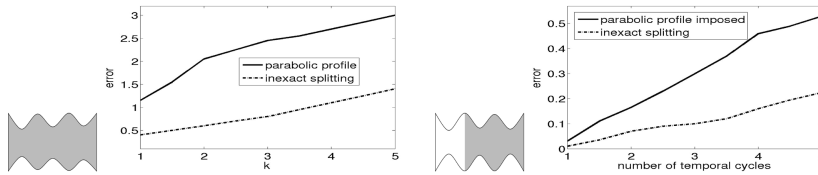


Figura 3. – Errore in norma  $L^2(L^2)$  in tutto il dominio (sinistra) e in una porzione interna (destra), usando schema III e l’approccio ingegneristico.

La costante  $C$  cresce con il numero di Reynolds  $Re$ , confermando quanto era già empiricamente noto dalla letteratura ingegneristica. Di conseguenza si aspettano piccoli errori da schema III poichè  $Re$  è prossimo a zero vicino alle sezioni artificiali (si veda Fig. (3)). Di conseguenza, schema III ha il vantaggio di richiedere la risoluzione di un solo problema differenziale ad ogni passo temporale (contro gli  $m + 1$  di schema II) introducendo un errore che è il più piccolo fra tutti quelli possibili imponendo un profilo di velocità. In Fig. 4 si sono riportate le soluzioni in un dominio ottenuto da immagini biomediche rappresentante la carotide. Si nota come l’errore commesso con schema III sia confinato in una piccolissima regione vicino ai bordi, mentre quello commesso con l’approccio ingegneristico sia presente anche all’interno.

### 3. – Un approccio duale basato sulla teoria del controllo.

Un secondo tipo di condizione al bordo integrale spesso presente in emodinamica computazionale è quella che prescrive la pressione media:

$$(3) \quad \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} p \, d\gamma = P_i.$$

Si può mostrare che un approccio aumentato per trattare tali condizioni porta e delle condizioni al bordo fisicamente incompatibili. Di conseguenza, si è studiato un approccio alternativo che permettesse di trattare allo stesso tempo le condizioni deficitarie (1) e (3). In particolare, per il problema a pressione media imposta, si è introdotto il funzionale

$$J_P(\mathbf{u}, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m \left( \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} p \, d\gamma - P_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m \int_{\Gamma_i} \|\nabla \mathbf{u} \mathbf{a}_i\|_a^2 \, d\gamma,$$

e si è considerata una minimizzazione vincolata dalle equazioni di NS, in cui le variabili

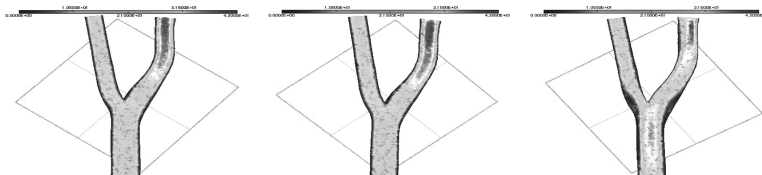


Figura 4. – Soluzione 3D in un dominio rappresentante la carotide. Schema II (sinistra), schema III (centro) e approccio ingegneristico (destra).

controllo sono le condizioni di Neumann  $\mathbf{k}_j$  da imporre su  $\Gamma_j$ . Si fa notare come il secondo addendo del funzionale sia stato introdotto per tenere in conto di eventuali domini in cui la direzione assiale  $\mathbf{a}_i$  non sia parallela alla normale uscente (si veda [2]). Nel caso lineare e stazionario si ottiene il seguente sistema (per gli altri casi si veda [2]):

PROBLEMA 2. – *Dati  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  e  $P_j \in R, j = 0, \dots, m$ , trovare  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}, p \in H^1(\Omega), \mathbf{l}_u \in \mathbf{V}, l_p \in L^2(\Omega)$  e  $\mathbf{k}_j \in \mathbf{L}^2(\Gamma_j), j = 0, \dots, m$ , tali che, per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}, q \in L^2(\Omega)$  and  $\mathbf{t} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_i), i = 0, \dots, m$ :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (P) \left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}(\mathbf{k}_j), \mathbf{v}) + b(p(\mathbf{k}_j), \mathbf{v}) + \sum_{i=0}^m \int_{\Gamma_i} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v} \, d\gamma - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = 0, \\ b(q, \mathbf{u}(\mathbf{k}_j)) = 0, \end{array} \right. \\ \\ (A) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^m \int_{\Gamma_i} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{k}_j) \mathbf{a}_i) \cdot (\nabla \mathbf{v} \mathbf{a}_i) \, d\gamma + a(\mathbf{l}_u, \mathbf{v}) + b(l_p, \mathbf{v}) = 0, \\ \sum_{i=0}^m \left( \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} p(\mathbf{k}_j) \, d\gamma - P_i \right) \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} q \, d\gamma + b(q, \mathbf{l}_u) = 0, \end{array} \right. \\ \\ (C_i) \int_{\Gamma_i} \mathbf{t} \cdot \mathbf{l}_u \, d\gamma = 0, \quad i = 0, \dots, m \end{array} \right.$$

Per la risoluzione numerica del Problema 2, si è introdotto un approccio iterativo che disaccoppia i due problemi di Stokes (P) e (A) e usa le condizioni di ottimalità (C) per aggiornare le variabili di controllo. Sulla base di questo algoritmo è stata inoltre dimostrata la buona posizione del Problema 2 utilizzando una tecnica di punto fisso (si veda [2]). Anche in questo caso si è ritrovata la soluzione di Womersley (si veda [2]).

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] FORMAGGIA L., GERBEAU J. F., NOBILE F., QUARTERONI A., *Numerical treatment of Defective Boundary Conditions for the Navier-Stokes equation*, SIAM J. Num. Anal., **40** (1) (2001), 376-401.
- [2] FORMAGGIA L., VENEZIANI A., VERGARA C., *A new approach to the numerical solution of defective boundary problems in incompressible fluid dynamics*, MOX Report n. 89, also submitted.
- [3] VENEZIANI A., VERGARA C., *Flow rate defective boundary conditions in haemodynamics simulations*, Int. Journ. Num. Meth. Fluids, **47** (2005), 803-816.
- [4] VENEZIANI A., VERGARA C., *An approximate method for solving incompressible Navier-Stokes problem with flow rate conditions*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., **196** (9-12) (2007), 1685-1700.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano  
 e-mail: christian.vergara@polimi.it  
 Dottorato in Ingegneria Matematica  
 (sede amministrativa: Politecnico di Milano) - Ciclo XVIII  
 Direttore di ricerca: Prof. A. Veneziani, Politecnico di Milano