Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Bruno Volzone

Operatori parabolici con termine di ordine zero: risultati di confronto

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 375–378.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_375_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 375-378

Operatori parabolici con termine di ordine zero: risultati di confronto

BRUNO VOLZONE

L'obiettivo di questa tesi consiste nel mostrare alcuni risultati di confronto tra soluzioni di problemi di Cauchy-Dirichlet relativi ad equazioni paraboliche lineari del secondo ordine, mediante metodi di simmetrizzazione secondo Schwarz.

Per *riordinamento sferico decrescente* (detto anche *riordinamento secondo Schwarz*) di una funzione misurabile u su un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ si intende una funzione a simmetria radiale decrescente $u^\#(x) = u^\#(|x|)$, definita sulla palla $\Omega^\#$ centrata nell'origine ed avente la stessa misura di Ω, che ha come principale caratteristica quella di possedere insiemi di livello che abbiano la stessa misura dei corrispondenti insiemi di livello di u.

Per quanto concerne le equazioni paraboliche, è dovuto a C. Bandle (cfr. [3]) il primo lavoro nel quale si utilizzano i metodi di simmetrizzazione di Schwarz, al fine di ottenere un tipo di *confronto* tra la soluzione u di un fissato problema ai valori al contorno e la soluzione v di un opportuno problema a simmetria radiale. Allo scopo di descrivere il risultato principale che si può ottenere in questo contesto, consideriamo un operatore differenziale del secondo ordine, dipendente dal tempo, con parte principale in forma di divergenza, del tipo

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}(x,t)u_{x_i}\right)_{x_j} + c(x,t)u,$$

ove i coefficienti a_{ij} e c siano definiti su un cilindroide del tipo $Q_T := \Omega \times (0,T)$, con $T > 0$. Si supponga che l'operatore $\frac{\partial}{\partial t} + L$ sia *uniformemente parabolico*, cioè

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq |\xi|^2 \text{ per q.o. } (x,t) \in Q_T \ , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \ , \tag{1}$$

ed inoltre sia

$$c(x,t) \geq 0 \ \text{ in } Q_T. \tag{2}$$

Si consideri la soluzione *classica* u del problema di *Cauchy-Dirichlet*

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \textit{in } Q_T \\ u = 0 & \textit{su } S_T \\ u(x,0) = u_0(x) & \textit{in } \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

dove $S_T := \partial\Omega \times (0,T)$, e siano i dati f, u_0 ed i coefficienti del problema (3) sufficientemente regolari. Allora, posto $Q_T^\# := \Omega^\# \times(0,T)$ e $S_T^\# := \partial\Omega \times (0,T)$, se v la soluzione del problema

$$
\begin{cases} v_t - \Delta v = f^\# & in\ Q_T^\# \\ v = 0 & su\ S_T^\# \\ v(x,0) = u_0^\#(x) & in\ \Omega^\#, \end{cases} \tag{4}
$$

si riesce a mostrare che (cfr. [3]) per ogni $t \in [0,T]$ vale il *confronto integrale* (detto anche *confronto tra le concentrazioni*)

$$
\int\limits_{|y|<|x|} u^\#(y,t)dy \le \int\limits_{|y|<|x|} v(y,t)dy, \quad \forall x \in \Omega^\#. \tag{5}
$$

In quest'ultima (così come il riordinamento di f nel problema (83)) i riordinamenti si intendono calcolati rispetto ad x, per ogni t *fissato*. La (5) fu successivamente ottenuta in [5] nel contesto delle soluzioni deboli per un problema del tipo (3).

Si noti che il problema a simmetria radiale (83) non risente dell'influenza del coefficiente di ordine zero c, poichè di esso, sostanzialmente, ce ne si libera mediante la condizione di segno (3). Ci si chiede se si possa ottenere la (5) nel caso in cui $c \in L^\infty(Q_T)$ e v sia soluzione di un problema a simmetria radiale che abbia reale memoriadel termine di ordine zero, che in tal caso assume la forma

$$
\begin{cases} v_t - \Delta v + \left[(c^+)_\# - (c^-)^\#\right] v = f^\# & in\ Q_T^\# \\ v = 0 & su\ S_T^\# \\ v(x,0) = u_0^\#(x) & in\ \Omega^\#, \end{cases} \tag{6}
$$

ove $(c^+)_\#$ è una particolare funzione a simmetria radiale crescente, chiamata *riordinamento sferico crescente* di c.

L'obiettivo principale che si prefigge questa tesi è allora quello di mostrare dei risultati di confronto per un operatore parabolico con coefficiente del termine di ordine zero non necessariamente limitato. In particolare viene considerato il caso in cui tale coefficiente abbia una singolarità del tipo $1/|x|^2$, che si presenta come un caso *critico*, dal momento che tale coefficiente appartiene ad $L^r(\Omega)$ per $r < N/2$. Poichè nessuna delle tecniche utilizzate nei lavori noti in letteratura si adatta a questa specifica situazione, in questa tesi sono illustrati i dettagli di una metodologia che fornisca dei risultati di carattere generale, che comprendano, come caso particolare, anche quelli riguardanti l'ipotesi in cui il coefficiente c sia limitato.

Nell'ipotesi in cui $c \in L^\infty(Q_T)$, si seguono in primo luogo le linee principali di [5], per l'ottenimento di una disuguaglianza di tipo integro-differenziale, alla quale poi applicare il metodo esibito in [2], allo scopo di ricavare, mediante ragionamenti classici del principio del massimo, il confronto tra le concentrazioni delle soluzioni.

In questa tesi viene altresì contemplata l'ipotesi in cui il coefficiente c abbia una singolarità del tipo $\lambda/|x|^2$, ove $\lambda > 0$: evidentemente, la presenza di un tale tipo di singolarità nell'origine non consente, come nel caso in cui c sia limitato, di ricondurre il problema (3) ad uno con coefficiente del termine di ordine zero non negativo. Vengono allora analizzati principalmente due casi.

Il primo caso contemplato è quello in cui c presenti una esponente di sommabilità superiore alla soglia critica$N/2$. A tal proposito, il risultato di maggiore rilevo, per la cui dimostrazione si rimanda a [2], è il seguente:

TEOREMA 1. – *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, supponiamo che i coefficienti $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$ soddisfino la* (1) *e supponiamo*

$$c \in L^r(\Omega) \textit{ con } r > N/2 \textit{ se } N \geq 2,\ r \geq 1 \textit{ se } N = 1,$$

$f \in L^2(Q_T)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Se u e v le soluzioni deboli rispettivamente dei problemi (3) *and* (6)*, allora per q.o. $t \in [0, T]$, vale la disuguaglianza* (5).

Nell'ultima parte della tesi viene studiato il caso in cui c abbia una singolarità del tipo $\lambda/|x|^2$ con $\lambda \leq \lambda_N$, dove $\lambda_N = (N-2)^2/4$ $(N > 2)$ è la miglior costante della classica disuguaglianza di Hardy-Sobolev. Più precisamente, si suppone che $c \in L(N/2, \infty)$ e che

$$c^\#(x) \leq \frac{\lambda}{|x|^2},\ \forall x \in \Omega^\# \backslash \{0\}, \text{con } \lambda \leq \lambda_N. \tag{7}$$

In questo caso, il problema simmetrizzato associato al problema (3) è

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = \dfrac{\lambda}{|x|^2} v + f^\# & \textit{in } Q_T^\# \\ v = 0 & \textit{su } S_T^\# \\ v(x,0) = u_0^\#(x) & \textit{in } \Omega^\#. \end{cases} \tag{8}$$

Molti autori si sono interessati di questioni di esistenza delle soluzioni per un problema del tipo (8): qui ci limitiamo a citare i lavori [4] e [6].

Per quanto concerne la deteminazione del risultato di confronto (5), si dimostra il seguente teorema (vedi anche [7]):

TEOREMA 2. – *Supponiamo che $\lambda \leq \lambda_N$ e che valgano la* (1) *e la* (7)*. Siano u e v le soluzioni deboli rispettivamente dei problemi* (3) *e* (8)*. Allora, per q.o. $t \in [0, T]$ vale la disuguaglianza* (5).

Il caso *sottocritico* $\lambda < \lambda_N$ viene affrontato approssimando le soluzioni u, v mediante le soluzioni dei rispettivi problemi che si ottengono sostituendo i potenziali c, $\lambda/|x|^2$ con le loro troncature a livello $n \in \mathbb{N}$, per poi passare a limite nella (5).

Il caso *critico* $\lambda = \lambda_N$ presenta un'ulteriore difficoltà, dovuta al fatto che l'operatore $Lu = -\Delta u - (\lambda/|x|^2)u$ non è coercivo su $H_0^1(\Omega)$, ma soltanto positivo. Viene allora introdotto, mediante un tipo di disuguaglianza di Hardy-Sobolev *migliorata* (cfr.[6]), un opportuno spazio funzionale H nel quale ambientare le soluzioni, per poi ottenerne il relativo confronto integrale (5).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] A. ALVINO, P. L. LIONS e G. TROMBETTI, *Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization,* Ann. Inst. Henri Poincaré, (2) **7** (1990), 37-65.

[2] A. ALVINO, R. VOLPICELLI e B. VOLZONE, *Sharp estimates for solutions of parabolic equations with a lower order term,* to appear on Journal of Applied Functional Analysis.

[3] C. BANDLE, *On symmetrizations in parabolic equations,* J.Anal. Math, **30** (1976), 98-112.

[4] P. BARAS e J. A. GOLDSTEIN, *The heat equation with asingular potential,* Trans. Amer. Math. Soc., **284** (1984), 121-139.

[5] J. MOSSINO e J. M. RAKOTOSON, *Isoperimetric inequalities in parabolic equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13** (1986), 51-73.

[6] J. L. VÁZQUEZ e E. ZUAZUA, *The Hardy Inequality and the Asymptotic Behaviour of the Heat Equation with an Inverse-Square Potential,* Journal of Functional Analysis, **173** (2000), 103-153.

[7] R. VOLPICELLI e B. VOLZONE, *Comparison results for solutions of parabolic equations with a singular potential,* preprint 2005 n. 29, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II".

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
email: bruno.volzone@dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XVI
Direttore di Ricerca: Prof. Angelo Alvino, Università degli Studi di Napoli "Federico II"