Bollettino
Unione Matematica Italiana

Enrico Jabara

Sugli automorfismi uniformi e privi di coincidenze dei gruppi infiniti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-B** (2007), n.2, p. 501–510.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10B_2_501_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
(8) **10**-B (2007), 501-510

Sugli automorfismi uniformi e privi di coincidenze dei gruppi infiniti.

Enrico Jabara

Sunto. – *Sia Φ un gruppo di automorfismi del gruppo $(N, +)$ tale che per ogni $\varphi \in \Phi \setminus \{1\}$ la mappa $T_\varphi : N \to N \ \ x \mapsto -x + \varphi(x)$ sia biiettiva. In questo lavoro si prova che se N è infinito ed è unione di un numero finito di Φ-orbite, allora N è abeliano.*

Summary. – *Let Φ be a group of automorphisms of the group $(N, +)$ such that for every $\varphi \in \Phi \setminus \{1\}$ the map $T_\varphi : N \to N \ \ x \mapsto -x + \varphi(x)$ is bijective. In this paper we prove that if N is infinite and it is union of a finite number of Φ-orbits, then N is abelian.*

1. Introduzione.

Una coppia di Ferrero è una coppia (N, Φ) costituita da un gruppo N scritto addittivamente (ma non necessariamente abeliano) e da un sottogruppo Φ di automorfismi di N tale che per ogni $\varphi \in \Phi^\sharp = \Phi \setminus \{1\}$ la mappa

$$T_\varphi : \ N \longrightarrow N \qquad x \mapsto -x + \varphi(x)$$

associata a φ sia una biiezione.

Preso un elemento $x \in N$ l'insieme $\Phi(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in \Phi\}$ si dice la Φ-orbita di x in N; una coppia di Ferrero (N, Φ) si dice infinita se l'insieme N ha cardinalità infinita. In questo lavoro faremo vedere che sussiste il seguente

Teorema 1. – *Sia (N, Φ) una coppia di Ferrero infinita. Se il gruppo N è unione di un numero finito di Φ-orbite allora N è abeliano e si possono dare solamente i seguenti casi:*

(a) *N è di torsione; in tal caso N è un p-gruppo abeliano elementare per qualche numero primo p.*

(b) *N non è di torsione; in tal caso N è senza torsione e divisibile.* $\square$

Le coppie di Ferrero sono state introdotte da Ferrero in alcuni lavori (si vedano, per esempio, [2] e [3]) allo scopo di studiare particolari strutture algebriche quali i quasi-anelli; per maggiori dettagli sull'argomento il riferimento è la monografia di Clay ([1], in particolare §4).

Un automorfismo φ del gruppo N si dice privo di coincidenze (*fixed-point-free* o, più brevemente FPF) se $\varphi(x) = x$ implica necessariamente $x = 0$. La proprietà di essere FPF è equivalente al fatto che l'applicazione T_φ è iniettiva; si tratta di una proprietà ereditata dai sottogruppi φ-invarianti di N. Un gruppo di automorfismi Φ si dice FPF se ogni elemento di $\Phi^\sharp$ è un automorfismo FPF.

Seguendo Zappa (si veda in particolare [9]) un automorfismo φ si dice *uniforme* se l'applicazione T_φ è suriettiva; tale proprietà è ereditata dai quozienti mediante sottogruppi normali φ-invarianti.

È ovvio che per un automorfismo di un gruppo finito le due condizioni di essere FPF e di essere uniforme sono equivalenti. Questo fatto è ben lontano dall'esser vero nel caso dei gruppi infiniti, come mostra il seguente

ESEMPIO 1. – Sia N un gruppo abeliano e sia $\varphi : N \longrightarrow N \;\; x \mapsto -x$ allora:

(a) se $N = \mathbb{Z}$ allora φ è FPF ma non uniforme;

(b) se $N = \langle x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n \ldots \mid x_n + x_n = x_{n-1} \rangle \simeq C_{2^\infty}$ allora φ è uniforme ma non FPF;

(c) se $N = \mathbb{Q}$ allora φ è uniforme e FPF. $\mathbb{Z}$ è un sottogruppo φ-invariante (e normale) di $\mathbb{Q}$; la restrizione di φ a $\mathbb{Z}$ non è uniforme e l'automorfismo indotto da φ su $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ non è FPF. $\square$

In molti casi l'uniformità di un automorfismo si rivela essere una proprietà più forte dell'essere FPF. Come vedremo ogni gruppo dotato di un automorfismo uniforme di ordine 2 risulta abeliano (e tale automorfismo è necessariamente l'inversione) mentre si ha

ESEMPIO 2. – Sia $N = \langle x, y \rangle$ il gruppo libero di rango 2. Allora l'automorfismo φ di N definito da $\varphi(x) = y$ e $\varphi(y) = x$ è FPF (ma non uniforme). $\square$

Dato un gruppo Γ si definisce l'FC-centro di Γ come l'insieme

$$\widehat{\zeta}(\Gamma) = \{g \in \Gamma \mid \; |\Gamma : C_\Gamma(g)| < \infty\};$$

si verifica facilmente che $\widehat{\zeta}(\Gamma)$ è un sottogruppo caratteristico di Γ. Se Γ coincide $\widehat{\zeta}(\Gamma)$ si dice che Γ è un FC-gruppo. Con tali notazioni si può enunciare il

TEOREMA 2. – *Sia Φ un gruppo di automorfismi del gruppo N e supponiamo che N sia unione di un numero finito di Φ-orbite. Allora un elemento di $\widehat{\zeta}(\Phi)$ è FPF se e solo se esso è uniforme.* $\square$

Da tale teorema discendono alcuni interessanti corollari.

COROLLARIO 1. – *Sia Φ un FC-gruppo di automorfismi del gruppo N. Se N è unione di un numero finito di Φ-orbite allora Φ è FPF se e solo se ogni elemento di $\Phi^\sharp$ è uniforme.* $\square$

Dal Corollario 1 discende la seguente generalizzazione del teorema di [6].

COROLLARIO 2. – *Sia Φ un FC-gruppo di automorfismi FPF di un gruppo infinito N. Se N è unione di un numero finito di Φ-orbite allora N soddisfa alle conclusioni del* Teorema 1. □

I due corollari seguenti sono correlati a due risultati di B. Neumann (dimostrati rispettivamente in [4] e in [5]) sugli automorfismi di ordine 2 e 3 nei gruppi infiniti.

COROLLARIO 3. – *Sia Φ un gruppo di automorfismi di un gruppo N e supponiamo che N sia unione di un numero finito di Φ-orbite. Se $\widehat{\zeta}(\Phi)$ contiene un elemento FPF φ di ordine* 2 allora φ induce l'inversione su N (che quindi risulta abeliano). □

COROLLARIO 4. – *Sia Φ un gruppo di automorfismi di un gruppo N e supponiamo che N sia unione di un numero finito di Φ-orbite. Se $\widehat{\zeta}(\Phi)$ contiene un elemento FPF φ di ordine* 3 allora N risulta nilpotente di classe al più 2. □

Se N e Φ sono gruppi che soddisfano alle ipotesi del Teorema 1 allora N si può considerare come spazio vettoriale nel caso (a) sul campo $\mathbb{k} = \mathbb{F}_p$ con p elementi e, nel caso (b), sul campo $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Si può formulare la

CONGETTURA A. – Se N e Φ soddisfano alle ipotesi del Teorema 1 e se Φ è abeliano si può costruire un'opportuna estensione $\mathbb{K}$ di $\mathbb{k}$ con $N \simeq \mathbb{K}^+$ e $\Phi \lesssim \mathbb{K}^\times$ (con $|\mathbb{K}^\times : \Phi| < \infty$) tale che il prodotto semidiretto $N \rtimes \Phi$ sia isomorfo ad un sottogruppo di indice finito di $\mathbb{K}^+ \rtimes \mathbb{K}^\times$ (dove $\mathbb{K}^\times$ agisce in modo naturale su $\mathbb{K}^+$ per moltiplicazione). □

La Congettura A si può esprimene in altro modo dicendo che, se Φ è abeliano, allora il prodotto semidiretto $N \rtimes \Phi$ è isomorfo ad un sottogruppo di indice finito di un gruppo sottilmente 2-transitivo (in cui lo stabilizzatore di un elemento è abeliano).

2. Dimostrazione degli enunciati.

LEMMA 1. – *Sia N un gruppo abeliano e Φ un gruppo infinito di automorfismi FPF di N. Se N è unione di un numero finito di Φ-orbite allora si può dare uno (solo) dei seguenti casi:*

(a) *N è di torsione; in tal caso esso risulta un p-gruppo abeliano elementare per qualche numero primo p.*

(b) *N non è di torsione; in tal caso esso è senza torsione e divisibile.*

DIMOSTRAZIONE. – Supponiamo che N contenga un elemento non banale di ordine finito. Esiste allora un numero primo p e un $y \in N \setminus \{0\}$ con $py = 0$. Sia $x \in N \setminus \{0\}$; siccome l'insieme $\{x + \varphi(y) \mid \varphi \in \Phi\}$ è infinito e N è unione di un numero finito di Φ-orbite, esistono $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ con $\varphi_1 \neq \varphi_2$ e $\psi \in \Phi^\sharp$ tali che $x + \varphi_1(y) = \psi(x + \varphi_2(y))$. Allora

$$px = p(x + \varphi_1(y)) = p\psi(x + \varphi_2(y)) = p\psi(x) = \psi(px)$$

e $px = 0$ poiché ψ è FPF, da cui si conclude che N è un p-gruppo abeliano elementare.

Supponiamo quindi che N sia un gruppo senza torsione. Per far vedere che N è divisibile è sufficiente far vedere che per ogni $x \in N \setminus \{0\}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > 0$ esiste un $y \in N$ tale che $ny = x$.

Siccome x ha ordine infinito l'insieme $\{n^i x \mid i \in \mathbb{N}\}$ contiene un numero infinito di elementi: esistono quindi due indici $i < j$ e un $\varphi \in \Phi^\sharp$ con $n^j x = \varphi(n^i x)$ da cui $\varphi(x) = n^{j-i}x$; posto $y = \varphi^{-1}(n^{j-i-1}x)$ è immediato verificare che $ny = x$. $\square$

Un gruppo Γ si dice BFC-gruppo se Γ è un FC-gruppo ed esiste una costante $k \in \mathbb{N}$ tale che $|\Gamma : C_\Gamma(x)| < k$ per ogni $x \in \Gamma$. Per un noto risultato dovuto a B. Neumann (si veda il Teorema 14.5.11 di [7]) Γ è un BFC-gruppo se e solo se il suo derivato $\Gamma' = [\Gamma, \Gamma]$ risulta finito.

Dimostrazione del Teorema 1. – Sia (N, Φ) una coppia di Ferrero in cui il gruppo N sia unione di un numero finito k di orbite. Sia $x \in N \setminus \{0\}$ e supponiamo che esista $y \in N$ tale che $x \neq -y + x + y \in \Phi(x)$, sia quindi $\varphi \in \Phi^\sharp$ con $\varphi(x) = -y + x + y$. Siccome, per ipotesi, φ è un automorfismo uniforme, esiste $z \in N$ con $y = -z + \varphi(z)$. Allora si dovrebbe avere

$$\varphi(x) = -\varphi(z) + z + x - z + \varphi(z) \qquad \text{e} \qquad \varphi(z + x - z) = z + x - z,$$

il che è impossibile perché $x \neq 0$ e φ è un automorfismo FPF di N. Dunque ogni classe di coniugio di N interseca una Φ-orbita in al più un elemento; dal fatto che le Φ-orbite non banali sono $k - 1$ si conclude che $|N : C_N(x)| < k$ per ogni $x \in N$ e che N è un BFC-gruppo. Il citato risultato di B. Neumann porge che N' è finito; ma N' è un sottogruppo caratteristico di N e quindi N' deve essere unione di Φ-orbite. Poiché Φ è FPF e infinito ogni Φ-orbita non banale è infinita: si ha quindi che $N' = \{0\}$ e che N è abeliano.

La seconda parte dell'asserto discende direttamente dal Lemma 1. $\square$

Dimostrazione del Teorema 2. – Siano N e Φ come nelle ipotesi del Teorema 2 e sia $\varphi \in \widehat{\zeta}(\Phi)$. Si ha $|\Phi : C_\Phi(\varphi)| < \infty$ quindi, posto $\Psi = C_\Phi(\varphi)$, N è unione di un numero finito di Ψ-orbite e $\varphi \in Z(\Psi)$.

Sia φ uniforme e supponiamo per assurdo che esista un $x \in N \setminus \{0\}$ con $\varphi(x) = x$. Definiamo induttivamente una successione di elementi di N ponendo

$x_0 = x$ e $x_n \in N$ tale che $x_{n-1} = -x_n + \varphi(x_n)$; siccome N è unione di un numero finito di Ψ-orbite esistono due indici $i < j$ con $\Psi(x_i) = \Psi(x_j)$. Sia dunque $\psi \in \Psi$ con $x_j = \psi(x_i)$, siccome $x_i = (-1+\varphi)^{j-i}(x_j)$ e φ commuta con ψ si deve avere

$$x_i = (-1+\varphi)^{j-i}(\psi(x_i)) = \psi[(-1+\varphi)^{j-i}(x_i)]$$

ma $(-1+\varphi)^{j-1}(x_i) = 0$ perché $j-1 \geq i$ e quindi

$$0 \neq x_1 = \psi[(-1+\varphi)^{j-1}(x_1)] = 0$$

che porge la contraddizione cercata.

Sia φ FPF e sia $x \in N$; per dimostrare che φ è uniforme è sufficiente esibire un $y \in N$ tale che $x = -y + \varphi(y)$. Osserviamo che essendo $\varphi \in Z(\Psi)$ l'applicazione T_φ mappa Ψ-orbite in Ψ-orbite; mostriamo che tale applicazione è iniettiva. Siano $g, h \in N$ con $\Psi(T_\varphi(g)) = \Psi(T_\varphi(h))$, esiste allora un $\psi \in \Psi$ con $T_\varphi(g) = \psi(T_\varphi(h))$ da cui si ricava

$$-g + \varphi(g) = \psi(-h + \varphi(h)) = -\psi(h) + \varphi(\psi(h))$$

e

$$\psi(h) - g = \varphi(\psi(h)) - \varphi(g) = \varphi(\psi(h) - g),$$

per ipotesi φ è FPF e quindi $g = \psi(h)$ e $\Psi(g) = \Psi(h)$. Dunque T_φ è iniettiva sull'insieme delle Ψ-orbite; siccome queste ultime sono in numero finito ne segue che T_φ deve essere anche suriettiva. Esiste perció un $z \in N$ tale che $\Psi(x) = T_\varphi(\Psi(z)) = \Psi(T_\varphi(z))$. Sia $\psi \in \Psi$ con $x = \psi(T_\varphi(z))$; posto $y = \psi(z)$ è immediato verificare che $x = -y + \varphi(y)$. □

I Corollari 1 e 2 sono una conseguenza diretta del teorema appena dimostrato.

DEFINIZIONE 1. – *Un automorfismo φ di un gruppo N si dice n-spezzante ($n \geq 1$ numero naturale) se si ha*

$$x + \varphi(x) + \ldots + \varphi^{n-1}(x) = 0$$

per ogni $x \in N$. □

Osserviamo che se φ è un automorfismo n-spezzante del gruppo N allora $\varphi^n = 1$, infatti si ha

$$x + \varphi(x) + \ldots + \varphi^{n-1}(x) = 0 = \varphi(x) + \varphi^2(x) + \ldots + \varphi^n(x)$$

da cui $\varphi^n(x) = x$ per ogni $x \in N$.

LEMMA 2. – *Sia φ un automorfismo uniforme di un gruppo N. Se $\varphi^n = 1$ ($n \geq 1$) allora φ è n-spezzante.*

DIMOSTRAZIONE. – Sia $x \in N$; allora esiste $y \in N$ con $x = -y + \varphi(y)$ da cui

$$\begin{aligned} & x + \varphi(x) + \ldots + \varphi^{n-1}(x) \\ & = (-y + \varphi(y)) + \varphi(-y + \varphi(y)) + \ldots + \varphi^{n-1}(-y + \varphi(y)) \\ & = -y + \varphi(y) - \varphi(y) + \varphi^2(y) - \ldots - \varphi^{n-1}(y) + y = 0. \end{aligned}$$ □

DIMOSTRAZIONE DEL COROLLARIO 3. – Per il Teorema 2 l'automorfismo φ è uniforme; dal fatto che $\varphi^2 = 1$ e dal Lemma 2 si ricava $x + \varphi(x) = 0$ per ogni $x \in N$ e dunque φ induce l'inversione su N. È ben noto che un gruppo ammette l'inversione come automorfismo se (e solo se) tale gruppo è abeliano. □

Ricordiamo che se x e y sono due elementi di un gruppo N (scritto addittivamente) si definisce il commutatore tra x e y ponendo

$$[x, y] = -x - y + x + y;$$

si ha $[x, y] = 0$ se e solo se x e y commutano tra loro: $x + y = y + x$.

La dimostrazione del Corollario 4 si serve dei risultati ottenuti in [5] tramite semplici calcoli sui commutatori.

DIMOSTRAZIONE DEL COROLLARIO 4. – Per il Teorema 2 l'automorfismo φ è uniforme e dal Lemma 2 si ricava che esso è 3-spezzante. Si ha quindi:

$$x + \varphi(x) + \varphi^2(x) = 0$$

e (sostituendo a x il suo opposto e cambiando di segno)

$$\varphi^2(x) + \varphi(x) + x = 0$$

da cui

$$x + \varphi(x) = -\varphi^2(x) = \varphi(x) + x$$

e perció $[x, \varphi(x)] = 0$ per ogni $x \in N$. Il teorema di [5] porge allora la conclusione. □

3. Quasi-anelli.

Ricordiamo la

DEFINIZIONE 2. – *Un quasi-anello è un insieme N dotato di due operazioni binarie $+$ e $\circ$ tali che $(N, +)$ sia un gruppo (non necessariamente abeliano) con elemento neutro 0, $(N, \circ)$ un semigruppo e valga la proprietà distributiva a sinistra:*

$$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c \quad \forall a, b, c \in N.$$

Inoltre se $(N, +)$ è un gruppo abeliano si dice che N è un quasi-anello abeliano *(bisogna prestare attenzione al fatto che questa nomenclatura si discosta da quella utilizzata per gli anelli, nei quali l'addizione è sempre commutativa).* □

Scriveremo sempre $ab + c$ in luogo di $(a \circ b) + c$.

Preso un elemento a di un quasi-anello N si può considerare l'applicazione

$$\varphi_a : N \longrightarrow N \qquad x \mapsto ax$$

che risulta essere un endomorfismo del gruppo additivo N; si definisce quindi l'annullatore di a come l'insieme $\mathrm{Ann}_N(a) = \{x \in N \mid ax = 0\}$. Con le notazioni introdotte si ha ovviamente $\mathrm{Ann}_N(a) = \mathrm{Ker}(\varphi_a)$.

Ferrero nei suoi lavori (si veda per esempio [2]) definisce un quasi-anello N *fortemente monogeno* se per ogni $a \in N$ si ha $\mathrm{Ann}_N(a) = \{0\}$ oppure $\mathrm{Ann}_N(a) = N$ ed inoltre esiste un $a \in N$ con $\mathrm{Ann}_N(a) = \{0\}$. Si dimostra facilmente che se un quasi-anello finito è fortemente monogeno allora l'insieme $\Phi_N = \{\varphi_a \mid \mathrm{Ann}_N(a) = \{0\}\}$ è un gruppo di automorfismi di $(N, +)$. Noi assumeremo quest'ultima proprietà come definizione:

DEFINIZIONE 3. – *Un quasi-anello N si dice fortemente monogeno se l'insieme*

$$\Phi_N = \{\varphi_a \mid a \in N, \ \ \mathrm{Ann}_N(a) \neq N\}$$

costituisce un gruppo di automorfismi di $(N, +)$. □

Osserviamo che se N è un quasi-anello fortemente monogeno e se Φ_N è FPF allora presi due elementi distinti x, y di N appartenenti alla stessa Φ_N-orbita si ha che esiste un unico $\varphi \in \Phi_N$ tale che $y = \varphi(x)$ (questo fatto si esprime dicendo che le Φ_N-orbite sono *principali*). Infatti se $x = 0$ l'asserto è ovvio, altrimenti se $\varphi_1(x) = y = \varphi_2(x)$ si ha $\varphi_1^{-1}(\varphi_2(x)) = x$ e siccome $\varphi_1^{-1}\varphi_2 \in \Phi_N$ che, per ipotesi, è FPF, si deve avere $\varphi_1^{-1}\varphi_2 = 1$ e quindi $\varphi_1 = \varphi_2$.

Dato un quasi-anello N in esso si definisce una relazione di equivalenza $\equiv$ ponendo $a \equiv b$ se e solo se $ax = bx$ per ogni $x \in N$.

DEFINIZIONE 4. – *Un quasi-anello N si dice planare se presi comunque $a, b, c \in N$ con $a \not\equiv b$ esiste sempre uno ed un solo elemento $t \in N$ tale che $at = bt + c$.* □

In [8] viene dimostrato che un quasi-anello planare è fortemente monogeno e tale che Φ_N è FPF; inoltre per i quasi-anelli finiti vale anche l'implicazione inversa (Teorema 1 di [3]).

Sia (N, Φ) una coppia di Ferrero e sia $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ un insieme di rappresentanti delle Φ-orbite di N. Scelto un sottoinsieme non vuoto Λ_1 di Λ e posto

$$\Lambda_0 = \Lambda \setminus \Lambda_1, \quad N_0 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} \Phi(x_\lambda) \quad \text{e} \quad N_1 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} \Phi(x_\lambda),$$

in N si può definire un'operazione $\circ$ ponendo:

$$a \circ x = \begin{cases} 0 & \text{se } a \in N_0 \\ \varphi(x) & \text{se } a \in \Phi(x_\lambda) \subseteq N_1 \text{ e } \varphi(x_\lambda) = a\,. \end{cases}$$

Si verifica che $(N, +, \circ)$ è un quasi-anello planare e, cosa più importante, ogni quasi-anello planare si può ottenere tramite questa costruzione (si veda il Teorema 4.14 di [1]).

Il Teorema 1 si può cosí riformulare.

TEOREMA 1′. – *Sia N un quasi-anello planare infinito. Se N è unione di un numero finito di Φ_N-orbite allora N è abeliano.* □

Non è difficile costruire quasi-anelli planari finiti in cui l'addizione non sia commutativa.

ESEMPIO 3. – Sia p un numero primo $p \equiv 1 \bmod 3$, $k \in \{2, 3, \ldots, p-1\}$ tale che $k^3 \equiv 1 \bmod 3$ e sia

$$N = \langle x, y \mid px = 0 = py,\ [x, y] = z,\ [x, z] = 0 = [y, z] \rangle$$

il gruppo extraspeciale di ordine p^3 ed esponente p. Allora l'automorfismo φ di N definito da $\varphi(x) = kx$, $\varphi(y) = ky$ (e quindi $\varphi(z) = k^2 z$) è FPF su N ed ha ordine 3. Posto $\Phi = \langle \varphi \rangle$ si può costruire, utilizzando il procedimento sopra descritto, un quasi-anello $(N, +, \circ)$ il cui gruppo additivo non sia abeliano. □

Il Corollario 3 fornisce il

COROLLARIO 3′. – *Sia N un quasi-anello fortemente monogeno tale che N sia unione di un numero finito di Φ_N-orbite. Se in $Z(\Phi_N)$ esiste un elemento φ FPF e di ordine 2 allora φ induce l'inversione su N (che quindi risulta abeliano).* □

Ricordiamo la

DEFINIZIONE 5. – *Un quasi-corpo è un quasi-anello $(F, +, \circ)$ in cui l'insieme $F^\times = F \setminus \{0\}$ con l'operazione $\circ$ risulta essere un gruppo.* □

La classificazione dei quasi-corpi finiti è dovuta a Zassenhaus ([10]) il quale ha anche dimostrato che il gruppo additivo di un quasi-corpo finito risulta sempre abeliano (che un quasi-corpo finito sia planare discende direttamente dalle definizioni). Quest'ultimo risultato è stato esteso da B. Neumann in [4] al caso dei quasi-corpi infiniti (ma quasi-corpi infiniti non planari sono stati costruiti, per esempio, in [11]). Il Corollario 3′ permette di dare di questo fatto una dimostrazione alternativa.

La caratteristica $\mathrm{char}(F)$ di un quasi-corpo F è definita nel solito modo; si dimostra che $\mathrm{char}(F)$ è o un numero primo oppure 0.

Se F è un quasi-corpo e se $\mathrm{char}\,(F) = 2$ allora ogni elemento non banale del gruppo additivo $(F, +)$ ha ordine 2 e quindi tale gruppo risulta abeliano; se invece $\mathrm{char}\,(F) \neq 2$ allora l'automorfismo $\varphi_{(-1)}$ soddisfa alle ipotesi del Corollario $3'$ e quindi anche in questo caso $(F, +)$ risulta essere un gruppo abeliano.

Osserviamo che la dimostrazione di B. Neumann sfrutta proprietà *globali* dell'addizione; infatti in [4] (in cui il caso $\mathrm{char}(F) = 2$ è trattato a parte) si dimostra che se G è un gruppo (scritto additivamente) e se sono soddisfatte le seguenti ipotesi:

$^{+}$A. In G l'equazione $x + x = a$ ha una soluzione per ogni $a \in G$;

$^{+}$B. La soluzione di cui al punto $^{+}$A è unica;

$^{+}$C. G è dotato di un automorfismo φ di ordine 2;

$^{+}$D. L'automorfismo di cui al punto $^{+}$C è FPF.

Allora G è abeliano (in quanto φ è l'inversione su G).

L'approccio seguito in questo lavoro porta invece a sfruttare proprietà *globali* della moltiplicazione; infatti si perviene alla stessa conclusione considerando le seguenti ipotesi:

$^{\circ}$A. G è dotato di un gruppo di automorfismi Φ;

$^{\circ}$B. G è unione di un numero finito di Φ-orbite;

$^{\circ}$C. Esiste un *unico* automorfismo $\varphi \in \Phi$ di ordine 2;

$^{\circ}$D. L'automorfismo di cui al punto $^{\circ}$C è FPF.

Una dimostrazione di questo tipo è fornita in [12] e sfrutta il fatto che il gruppo delle trasformazioni affini

$$\mathbf{A}(F) = \{F \longrightarrow F \quad x \mapsto ax + b \ \mid a \in F^{\times}, b \in F\}$$

è sottilmente 2-transitivo sull'insieme F.

Alla luce di quanto detto, la Congettura A si può rinforzare nel seguente modo:

CONGETTURA B. – Se N e Φ soddisfano alle ipotesi del Teorema 1 allora esiste un opportuno quasi-corpo F tale che il prodotto semidiretto $N \rtimes \Phi$ sia isomorfo a un sottogruppo di indice finito di $\mathbf{A}(F)$. □

È appena il caso di osservare che se un quasi-corpo soddisfa anche alla proprietà distributiva a destra (e quindi è un corpo) allora la proprietà commutativa dell'addizione segue facilmente, si ha infatti:

$$(1 + 1)(a + b) = (1 + 1)a + (1 + 1)b = a + a + b + b$$

$$(1 + 1)(a + b) = (a + b)1 + (a + b)1 = a + b + a + b$$

da cui $a + a + b + b = a + b + a + b$ e quindi $a + b = b + a$.

La proprietà distributiva a destra è sicuramente verificata se vale quella a sinistra e se la moltiplicazione risulta commutativa. È quindi naturale chiedersi se il Corollario 2 continui in qualche modo a sussistere se si omette l'ipotesi che Φ sia FPF; più esattamente appare plausibile la seguente:

CONGETTURA C. – Se un gruppo N ammette un gruppo di automorfismi abeliano Φ e se N è unione di un numero finito di Φ-orbite allora N è un gruppo {finito per abeliano per finito} (cioè esistono due sottogruppi normali $N_1 \leq N_2$ di N con N_1 e N/N_2 finiti e N_2/N_1 abeliano). $\square$

La congettura precedente è particolarmente soddisfacente in quanto essa non richiede l'ipotesi che il gruppo N sia infinito.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. R. CLAY, *Nearrings. Geneses and Applications*, Oxford University Press, Oxford-New York-Tokyo (1992).
[2] G. FERRERO, *Struttura degli stems p-singolari*, Riv. Mat. Univ. Parma, **7** (1966), 243-254.
[3] G. FERRERO, *Stems planari e BIB-disegni*, Riv. Mat. Univ. Parma, **11** (1970), 79-96.
[4] B. H. NEUMANN, *On the commutativity of addition*, J. London Math. Soc. **15** (1940) 203-208.
[5] B. H. NEUMANN, *Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed*, Arch. Math. **7** (1956) 1-5.
[6] P. M. NEUMANN – P. J. ROWLEY, *Free actions of abelian groups in groups*, In "Geometry and Cohomology in Group Theory" (P. H. Kropholler, G. A. Niblo, R. Sthor editors) London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **252** Cambridge University Press, Cambridge (1998), 291-295.
[7] D. S. J. ROBINSON, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1982).
[8] G. Szeto, *Planar and strongly uniform near-rings*, Proc. Am. Math. Soc. **44** (1974) 269-274.
[9] G. ZAPPA, *Sugli automorfismi uniformi nei gruppi di Hirsch*, Ricerche di Mat. **7** (1958), 3-13.
[10] H. ZASSENHAUS, *Über endliche Fastkörper* Abh. Math. Sem. Hamburg, **11** (1936), 187-220.
[11] J. L. ZEMMER, *Near-field, planar and non planar*, Math. Student **35** (1964) 145-150.
[12] J. L. ZEMMER, *The addittive group of an infinite near-field is abelian*, J. London Math. Soc. **44** (1969) 65-67.

Dipartimento di Matematica Applicata
Università di Ca' Foscari-Venezia, Dorsoduro 3825/E - 30122 Venezia
e-mail: jabara@unive.it

Pervenuta in Redazione
il 13 novembre 2004 e in forma rivista il 13 febbraio 2006