Bollettino Unione Matematica Italiana

Rachid Benabidallah, Lynda Taleb, Hisao Fujita Yashima

Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-B** (2007), n.3, p. 1101–1124.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10B_3_1101_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
(8) **10**-B (2007), 1101-1124

Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection.

Rachid Benabidallah - Lynda Taleb - Hisao Fujita Yashima

Sunto. – *Si considera il sistema di equazioni per il moto convettivo stazionario di un fluido comprimibile viscoso e termoconducibile con la condizione al contorno per la temperatura vicina alla distribuzione idrostatica. Utilizzando il teorema del punto fisso di Schauder in un opportuno spazio di Sobolev si dimostra l'esistenza di una soluzione di questo sistema di equazioni nella vicinanza dello stato idrostatico.*

Summary. – *We consider the equation system for the stationary convective motion of a viscous and heat-conductive compressible fluid with the boundary condition of the temperature near the hydrostatic distribution. By using Schauder's fixed point theorem in a suitable Sobolev space we prove the existence of a solution of this equation system in the neighbourhood of the hydrostatic state.*

1. – Introduction.

Comme on le sait bien, la convection de l'air joue un des rôles essentiels pour des phénomènes atmosphériques et météorologiques. Mais il reste difficile à décrire de manière satisfaisante la convection de l'atmosphère (voir par exemple [8], [13]). Même si nous considérons le mouvement d'un gaz renfermé entre deux plans horizontaux, si la température comme la densité y varie sensiblement, l'analyse de l'équation du mouvement du gaz présente de sérieuses difficultés.

Le présent travail a pour but de contribuer à la modélisation mathématique de la convection atmosphérique, en analysant un système d'équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement d'un gaz visqueux et calorifère, soumis à la force gravitationnelle en présence d'une distribution non-homogène de la température. Plus précisément nous considérons le système d'équations

$$\rho(v\cdot\nabla)v-\eta\Delta v-\lambda\nabla(\nabla\cdot v)=-R\nabla(\rho T)-g\rho\vec{e}_3, \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot(\rho v)=0, \tag{1.2}$$

$$\text{(1.3)}\quad C_V\rho v\cdot\nabla T-\kappa\Delta T+R\rho T\,\nabla\cdot v=\eta\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot v\Big)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\zeta(\nabla\cdot v)^2$$

dans le domaine

$$\Omega_\infty=\{\,x\in\mathbb{R}^3\,|\,0<x_3<h\,\},$$

où $v=(v_1,v_2,v_3)$ représente le vecteur vitesse, ρ la densité, T la température, p la pression, η et ζ les coefficients de viscosité, κ la conductibilité thermique, g l'accélération gravitationnelle, $\vec{e}_3=(0,0,1)$, C_V la capacité calorifique à volume constant et R la constante universelle du gaz, tandis que λ est donné par $\lambda=\frac{1}{3}\eta+\zeta$; dans (1.1)–(1.3) nous avons supposé que la pression p est donnée par la loi valable pour le gaz parfait

$$\text{(1.4)}\qquad p=R\,\rho\,T.$$

Pour la construction de ce système d'équations, on peut consulter par exemple [7].

Pour faciliter l'obtention d'un premier résultat sur la convection, nous supposons que toutes les fonctions, données ou inconnues, sont périodiques de période 2π par rapport aux coordonnées x_1 et x_2, de sorte que, dans le traitement mathématique, le domaine se réduit à un domaine relativement compact

$$\Omega=\Omega'_\tau\times\,]0,h[,$$

où Ω'_τ est le tore de dimension 2. On désignera, là où il n'y a pas de risque d'équivoque, par x' le point générique de Ω'_τ, de sorte que $x=(x',x_3)\in\Omega$ si $0<x_3<h$.

Pour le système d'équations (1.1)–(1.3) nous considérons les conditions aux limites

$$\text{(1.5)}\qquad v\big|_{x_3=0}=0,\qquad v_3\big|_{x_3=h}=\frac{\partial v_i}{\partial x_3}\Big|_{x_3=h}=0\qquad(i=1,2),$$

$$\text{(1.6)}\qquad T(x',0)=T_0(x')=\overline{T}_0+\varepsilon(x'),\qquad T(x',h)=\overline{T}_0-\frac{gh}{R+C_V},$$

où $\varepsilon(x')$ est une fonction définie sur Ω'_τ. Le problème doit être complété par la condition

$$\text{(1.7)}\qquad \int_\Omega\rho(x)dx=M_\rho,$$

où M_ρ est une constante positive. Nous supposerons que $\overline{T}_0$ et M_ρ sont suffisamment grands et que $\varepsilon(x')$ est suffisamment petit.

Le résultat principal de notre travail, énoncé dans la forme d'un théorème d'existence, nous montre qu'une distribution non-homogène de la température autour de $\overline{T}_0$ sur le fond $\{x_3 = 0\}$ peut engendrer un mouvement de convection stationnaire dans un état proche de l'état hydrostatique (relatif à la température $\overline{T}_0$ sur $\{x_3 = 0\}$) caractérisé par la distribution de la densité $\overline{\rho}_{hs}(x_3)$ et de la température $\overline{T}_{hs}(x_3)$ données par

$$\overline{\rho}_{hs}(x_3) = \overline{\rho}_{hs}(0)\big(1 - \frac{gx_3}{\overline{T}_0(R + C_V)}\big)^{\frac{C_V}{R}}, \qquad \overline{T}_{hs}(x_3) = \overline{T}_0 - \frac{gx_3}{R + C_V} \tag{1.8}$$

(avec $\overline{\rho}_{hs}(0)$ déterminé par $\int_\Omega \overline{\rho}_{hs}(x)dx = M_\rho$).

Cette relation est étroitement liée à la transformation adiabatique. Si on utilise l'exposant de l'adiabatique

$$\gamma = \frac{R}{C_V} + 1, \tag{1.9}$$

qui peut être exprimé également par $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$ avec la capacité calorifique à pression constante C_P, les fonctions $\overline{\rho}_{hs}(x_3)$ et $\overline{T}_{hs}(x_3)$ sont exprimées par

$$\overline{\rho}_{hs}(x_3) = \overline{\rho}_{hs}(0)\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma R\overline{T}_0}gx_3\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \qquad \overline{T}_{hs}(x_3) = \overline{T}_0 - \frac{\gamma - 1}{\gamma R}gx_3. \tag{1.8bis}$$

Il est bien connu que la valeur de γ est $\frac{5}{3}$ pour les gaz monoatomiques, $\frac{7}{5}$ pour les gaz biatomiques, $\frac{4}{3}$ pour les gaz triatomiques (pour les relations entre R, C_P, C_V et γ et la transformation adiabatique, voir par exemple [5]). Dans le présent travail nous allons démontrer notre résultat mathématique dans la condition

$$1 < \gamma < 2. \tag{1.10}$$

2. – Résultat principal et préliminaires à la démonstration.

Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. – *Si $\overline{T}_0$ et M_ρ sont suffisamment grands et si $\|\varepsilon\|_{H^3(\Omega'_\tau)}$ est suffisamment petit, alors le problème* (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.7) *admet au moins une solution $(v, T, \rho) \in H^3(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$.*

La solution (v, T, ρ) dont l'existence est énoncée dans le théorème 2.1 sera trouvée dans un voisinage de $(0, \overline{T}_{hs}, \overline{\rho}_{hs})$ (voir (1.8) ou (1.8)bis), ou, du point du vue technique, dans un voisinage de $(0,\overline{T},\overline{\rho})$, $\overline{T}$ et $\overline{\rho}$ étant des fonctions de référence définies à leur tour dans un voisinage de $\overline{T}_{hs}$ et de $\overline{\rho}_{hs}$. Nous posons en effet

$$\overline{T}(x',x_3)=\overline{T}_{hs}(x_3)+\big(1-\frac{x_3}{h}\big)\varepsilon(x'), \tag{2.2}$$

$$\overline{\rho}(x',x_3)=C_{M_\rho}\frac{(\overline{T}_{hs}(x_3))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\overline{T}(x',x_3)}, \tag{2.3}$$

où

$$C_{M_\rho}=M_\rho\Big[\int_\Omega\frac{(\overline{T}_{hs}(x_3))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\overline{T}(x',x_3)}dx\Big]^{-1}. \tag{2.4}$$

Comme on peut constater facilement par des calculs élémentaires, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(R\overline{\rho}\overline{T})=0\quad i=1,2,\qquad -\frac{\partial}{\partial x_3}(R\overline{\rho}\overline{T})-\overline{\rho}g=g\overline{\rho}\frac{(1-\frac{x_3}{h})\varepsilon(x')}{\overline{T}_{hs}(x_3)}, \tag{2.5}$$

$$C_V\overline{\rho}\nabla\overline{T}-R\overline{T}\nabla\overline{\rho}=(R+C_V)\overline{\rho}\nabla\Big(\Big(1-\frac{x_3}{h}\Big)\varepsilon\Big)+\vec{e}_3\frac{g\overline{\rho}}{\overline{T}_{hs}}\Big(1-\frac{x_3}{h}\Big)\varepsilon. \tag{2.6}$$

Posons maintenant

$$\vartheta(x)=T(x)-\overline{T}(x),\qquad \sigma(x)=\rho(x)-\overline{\rho}(x). \tag{2.7}$$

On remarque que, en vertu de (1.2) et de (2.6), on a

$$\begin{aligned}C_V\rho v\cdot\nabla T+R\rho T\nabla\cdot v&=v\cdot[C_V\rho\nabla T-RT\nabla\rho]\\&=(R+C_V)\overline{\rho}v\cdot\nabla((1-\frac{x_3}{h})\varepsilon)+v_3\frac{g\overline{\rho}}{\overline{T}_{hs}}\Big(1-\frac{x_3}{h}\Big)\varepsilon\\&+v\cdot(C_V[\sigma\nabla\overline{T}+\overline{\rho}\nabla\vartheta+\sigma\nabla\vartheta]-R[\vartheta\nabla\overline{\rho}+\overline{T}\nabla\sigma+\vartheta\nabla\sigma]).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Compte tenu de (2.5) et (2.8), le système d'équations (1.1)–(1.3) pour les inconnues (v,T,ρ) se transforme en le système d'équations pour les inconnues (v,ϑ,σ)

$$-\eta\Delta v-\lambda\nabla(\nabla\cdot v)+R\nabla(\sigma\overline{T}+\overline{\rho}\vartheta)+g\sigma\vec{e}_3=F(v,\vartheta,\sigma), \tag{2.9}$$

$$\nabla\cdot(\sigma v)=-\nabla\cdot(\overline{\rho}v), \tag{2.10}$$

$$-\kappa\Delta\vartheta=G(v,\vartheta,\sigma), \tag{2.11}$$

où

$$F(v,\vartheta,\sigma)=-(\overline{\rho}+\sigma)(v\cdot\nabla)v-R\nabla(\sigma\vartheta)+g\,\frac{\overline{\rho}}{\overline{T}_{hs}(x_3)}\Big(1-\frac{x_3}{h}\Big)\varepsilon(x')\,\vec{e}_3, \tag{2.12}$$

$$G(v,\vartheta,\sigma) = \eta \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot v\Big)\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \zeta(\nabla\cdot v)^2 \tag{2.13}$$
$$+\kappa\Delta\Big(\Big(1-\frac{x_3}{h}\Big)\varepsilon\Big) - (R+C_V)\overline{\rho}v\cdot\nabla\Big(\Big(1-\frac{x_3}{h}\Big)\varepsilon\Big) - v_3 g\,\frac{\overline{\rho}}{\overline{T}_{hs}(x_3)}\Big(1-\frac{x_3}{h}\Big)\varepsilon(x')$$
$$+ v\cdot(R[\vartheta\nabla\overline{\rho} + \overline{T}\nabla\sigma + \vartheta\nabla\sigma] - C_V[\sigma\nabla\overline{T} + \overline{\rho}\nabla\vartheta + \sigma\nabla\vartheta]).$$

D'autre part, il est clair que ϑ et σ doivent satisfaire aux conditions

$$\vartheta\big|_{x_3=0} = \vartheta\big|_{x_3=h} = 0, \tag{2.14}$$

$$\int_\Omega \sigma(x)dx = 0, \tag{2.15}$$

tandis que v doit satisfaire à la condition (1.5). De cette manière le problème (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.7) est transformé en le problème (2.9)–(2.11), (1.5), (2.14)–(2.15).

Du point de vue mathématique, la démonstration du théorème 2.1 s'appuie sur les techniques développées dans l'étude des équations d'un gaz visqueux, en particulier celles du travail [11], qui a démontré l'existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations analogue à (1.1)–(1.3) avec la pression p donnée par une forme assez générale (au lieu de (1.4)) mais avec les données de la température sur la frontière proches d'une constante (au lieu des données proches d'une distribution hydrostatique) (pour les problèmes connexes, voir aussi [12]).

3. – Position des équations linéarisés et estimation de ϑ.

L'existence d'une solution du problème (2.9)–(2.11), (1.5), (2.14)–(2.15) sera démontrée par l'application du théorème du point fixe de Schauder appliqué à un opératuer non-linéaire Φ donné par la résolution d'équations linéarisées. Pour définir l'opérateur Φ on pose

$$H^3_a(\Omega) = \{v \in H^3(\Omega;\mathbb{R}^3)\,|\,v \text{ satisfait à (1.5)}\},$$
$$H^2_b(\Omega) = \{\vartheta \in H^2(\Omega;\mathbb{R})\,|\ \vartheta \quad \text{satisfait à (2.14)}\},$$
$$H^2_c(\Omega) = \{\sigma \in H^2(\Omega;\mathbb{R})\,|\ \sigma \quad \text{satisfait à (2.15)}\}.$$

On a alors les lemmes suivants.

LEMME 3.1. – *Soit* $(v',\vartheta',\sigma') \in H^3_a(\Omega)\times H^2_b(\Omega)\times H^2_c(\Omega)$. *L'équation*

$$-\kappa\Delta\vartheta = G(v',\vartheta',\sigma') \tag{3.1}$$

admet une solution ϑ *et une seule dans* $H^2_b(\Omega)$.

LEMME 3.2. – *Soit* $(v', \vartheta', \sigma') \in H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega)$. *Soit* $\vartheta \in H^2_b(\Omega)$ *la solution de* (3.1) *obtenue dans le lemme* 3.1. *Alors l'équation*

$$-\eta\Delta v - \lambda\nabla(\nabla\cdot v) = -R\nabla(\sigma'\overline{T} + \overline{p}\vartheta) - g\sigma'\vec{e}_3 + F(v', \vartheta', \sigma') \tag{3.2}$$

admet une solution v *et une seule dans* $H^3_a(\Omega)$.

LEMME 3.3. – *Soit* $(v', \vartheta', \sigma') \in H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega)$. *Soit* $v \in H^3_a(\Omega)$ *la solution de l'équation* (3.2) *obtenue dans le lemme* 3.2. *Si* k *est un nombre suffisamment grand, l'équation*

$$k(\sigma - \sigma') + \nabla\cdot(\sigma v) = -\nabla\cdot(\overline{p}v) \tag{3.3}$$

admet une solution σ *et une seule dans* $H^2_c(\Omega)$.

Les lemmes 3.1 et 3.2 sont des résultats classiques bien connus. Pour la démonstration du lemme 3.3 on consultera par exemple [1].

Grâce aux lemmes 3.1–3.3 on peut définir l'opérateur $\Phi : H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega) \to H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega)$, en posant pour $(v', \vartheta', \sigma') \in H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega)$

$$\Phi(v', \vartheta', \sigma') = (v, \vartheta, \sigma) \in H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega), \tag{3.4}$$

où v, ϑ, σ sont les solutions des équations (3.1)–(3.3) obtenues dans les lemmes 3.1–3.3.

Pour que le théorème du point fixe de Schauder puisse être appliqué à Φ, il faut établir des estimations adéquates des solutions ϑ, v, σ des équations (3.1)–(3.3). Nous nous limitons ici à établir l'estimation de ϑ, en renvoyant au paragraphe suivant les estimations de v et de σ, qui exigent un traitement plutôt complexe.

LEMME 3.4. – *Soit* $(v', \vartheta', \sigma') \in H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega)$. *Alors la solution* $\vartheta \in H^2_b(\Omega)$ *de l'équation* (3.1) *obtenue dans le lemme* 3.1 *vérifie l'inégalité*

$$\begin{aligned} \|\vartheta\|_{H^2(\Omega)} &\leq c_1(\|v'\|_{H^2(\Omega)} + \|\vartheta'\|_{H^2(\Omega)} + \|\sigma'\|_{H^2(\Omega)})^2 \\ &\quad + c_1\|v'\|_{H^2(\Omega)}\|\vartheta'\|_{H^2(\Omega)}\|\sigma'\|_{H^2(\Omega)} + c_1(1 + \|v'\|_{H^2(\Omega)})\|\varepsilon\|_{H^2(T^2)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec une constante positive c_1.

DÉMOSTRATION. – Lemme résulte immédiatement de la théorie classique des équations du type elliptique (voir par exemple [6], [10]) et de l'expression de $G(v', \vartheta', \sigma')$ (voir (2.13)). □

4. – Estimations de la solution v, σ des équations linéarisées.

Dans ce paragraphe nous allons établir des estimations des solutions v et σ des équations (3.2) et (3.3). Ces estimations, obtenues en utilisant des idées de [4] et [11], constituent le point crucial de la démonstration de notre résultat. En effet, nous en déduirons qu'il existe un sous-ensemble borné B de $H^3(\Omega) \times H^2(\Omega) \times \in H^2(\Omega)$ tel que $\Phi(B) \subset B$.

Il est bon de rappeler que les lemmes 4.1–4.9 seront démontrés sous l'hypothèse

(4.1) $\overline{T}_0$ et M_ρ sont suffisamment grands et $\|\varepsilon\|_{H^3(\Omega'_\tau)}$ est suffisament petit.

C'est-à-dire, il existe trois constantes positives $\overline{c}_T$, $\overline{c}_\rho$, $\overline{c}_\varepsilon$ telles que, si

$$\overline{T}_0 \geq \overline{c}_T, \qquad M_\rho \geq \overline{c}_\rho, \qquad \|\varepsilon\|_{H^3(\Omega'_\tau)} \leq \overline{c}_\varepsilon, \tag{4.2}$$

alors les inégalités énoncées dans les lemmes 4.1–4.9 soient vérifiées. Or, pour ne pas alourdir l'exposition, on ne répétera pas cette mention dans l'énoncé des lemmes et on le rappelle dans la démonstration quand il est nécessaire. En outre, on utilisera les inégalités

$$\overline{T}_0^a + c \leq c'_1 \overline{T}_0^a, \qquad \|\varepsilon\|_{H^k(\Omega'_\tau)} + c \leq c'_2$$

pour $a > 0$, $k = 0, 1, 2, 3$, valables pour $\overline{T}_0$ suffisamment grand et $\|\varepsilon\|_{H^3(\Omega'_\tau)}$ suffisament petit, sans les citer explicitement; il ne sera en effet pas difficile de comprendre leur utilisation sous-entendue.

Quant au nombre k qui figure dans (3.3), comme on a vu dans le lemme 3.3, il peut être choisi à notre gré pourvu qu'il soit suffisamment grand. Il nous conviendra de poser

$$k = \frac{\overline{\kappa}\delta_1}{2}, \qquad \delta_1 = \frac{R}{\eta + \lambda} C_{M_\rho} \left(\overline{T}_0 - \frac{\gamma - 1}{\gamma R} gh \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{4.3}$$

où $\overline{\kappa}$ est un nombre convenablement grand, vérifiant en particulier l'inégalité

$$\overline{\kappa} \geq 16 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\overline{T}_0 \gamma R} gh \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}. \tag{4.4}$$

Dans l'énoncé des lemmes 4.1–4.9 on désignera par C'_k $(k = 1, \cdots, 9)$ les constantes qui dépendent de Ω mais ne dépendent ni de $\overline{T}_0$ ni de M_ρ (pourvu que $\overline{T}_0$ et M_ρ soient plus grands qu'une certaine constante) et par $\tilde{C}_k$ $(k = 1, \cdots, 9)$ les constantes qui dépendent de Ω, de $\overline{T}_0$ et de M_ρ. D'autre part, dans la démonstration de chaque lemme, si on n'a pas besoin de les préciser, on désignera par C_Ω les constantes qui ne dépendent ni de $\overline{T}_0$ ni de M_ρ et par $\tilde{C}(\overline{p})$ les constantes qui dépendent de $\overline{T}_0$ et/ou de M_ρ.

Pour faciliter le calcul avec lequel on tirera des lemmes 4.1–4.9 une estimation globale de v et de σ, dans l'énoncé des lemmes 4.1–4.9 on écrira les normes de v et de σ au carré dans le premier membre de l'inégalité et les normes de v' et de σ' au carré dans le second membre. Les termes contenant ϑ et les termes à une puissance plus élevée, y compris $\|F\|^2_{L^2(\Omega)}$ et $\|F\|^2_{H^1(\Omega)}$, seront écrits dans le second membre.

Finalement, pour simplifier la notation, on notera $\|\cdot\|_{L^2}$ et $\|\cdot\|_{H^m}$ $(m = 1, 2, 3)$ au lieu de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$.

LEMME 4.1. – *Soit* $(v', \vartheta', \sigma') \in H^3_a(\Omega) \times H^2_b(\Omega) \times H^2_c(\Omega)$. *Soient v et σ la solution de l'équation* (3.2) *et celle de* (3.3) *obtenues dans les lemmes* 3.2 *et* 3.3 avec k satisfaisant à (4.3)–(4.4). Alors on a

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla v\|^2_{L^2} + \frac{\lambda}{R}\|\nabla\cdot v\|^2_{L^2} + k\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma\Big\|^2_{L^2} \tag{4.5}$$

$$\leq k\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma'\Big\|^2_{L^2} - C_1'(\overline{T}_0^2 - 1)\|\sigma'\|^2_{L^2} + C_1'(\|F\|^2_{L^2} + \|v\|_{H^3}\|\sigma\|^2_{L^2}) + \tilde{C}_1\|\vartheta\|^2_{H^1}.$$

DÉMOSTRATION. – Si on multiplie (3.2) par $R^{-1}v$ et (3.3) par $\overline{T}\,\overline{\rho}^{-1}\sigma$ et si on les intègre sur Ω, on obtient

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla v\|^2_{L^2} + \frac{\lambda}{R}\|\nabla\cdot v\|^2_{L^2} + \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(\sigma - \sigma')\Big\|^2_{L^2} + \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma\Big\|^2_{L^2} \tag{4.6}$$

$$= \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma'\Big\|^2_{L^2} + \sum_{q=1}^{4} I_q,$$

où

$$I_1 = -\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\sigma - \sigma')\nabla\cdot(\overline{\rho}v)dx, \qquad I_2 = -\int_\Omega \overline{T}(\nabla\log\overline{\rho}\cdot v)\sigma' dx - \frac{g}{R}\int_\Omega \sigma' v_3 dx$$

$$I_3 = \frac{1}{R}\int_\Omega F\cdot v dx + \int_\Omega \overline{\rho}\vartheta\nabla\cdot v dx, \qquad I_4 = -\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\,\sigma\nabla\cdot(\sigma v)dx.$$

En rappelant (4.1) et les expressions de $\overline{T}$ et de $\overline{\rho}$, on voit que $\|\nabla\log\overline{\rho}\|_{L^\infty}$ est assez petite de sorte que

$$\|v\cdot\nabla\log\overline{\rho}\|^2_{L^2} \leq \|\nabla v\|^2_{L^2};$$

donc, compte tenu aussi de (4.3)–(4.4), on a

$$I_1 \leq \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(\sigma - \sigma')\Big\|^2_{L^2} + \frac{2}{\overline{\kappa}\delta_1}\|\overline{T}\,\overline{\rho}\|_{L^\infty}\|\nabla\cdot v\|^2_{L^2} + \frac{2}{\overline{\kappa}\delta_1}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(v\cdot\nabla\overline{\rho})\Big\|^2_{L^2}$$

$$\leq \frac{k}{2}\left\|\left(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}}(\sigma-\sigma')\right\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{8R}\|\nabla\cdot v\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{8R}\|\nabla v\|_{L^2}^2,$$

$$I_2 \leq \frac{\eta}{16R}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + C_\Omega\|\sigma'\|_{L^2}^2,$$

$$I_3 \leq C_\Omega(\|F\|_{L^2}^2+\tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2)+\frac{\eta}{16R}\|\nabla v\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{8R}\|\nabla\cdot v\|_{L^2}^2.$$

Quant au terme I_4, on a

$$I_4 = -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}|\sigma|^2(\nabla\cdot v)dx+\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\left(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\right)\cdot v|\sigma|^2dx \leq C_\Omega\|v\|_{H^3}\|\sigma\|_{L^2}^2$$

Si on adjoint ces estimations des termes I_q $(q=1,2,3,4)$ à (4.6), on obtient

$$\frac{3\eta}{4R}\|\nabla v\|_{L^2}^2+\frac{3\lambda}{4R}\|\nabla\cdot v\|_{L^2}^2+\frac{k}{2}\left\|\left(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{4.7}$$

$$\leq \frac{k}{2}\left\|\left(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma'\right\|_{L^2}^2+C_\Omega(\|\sigma'\|_{L^2}^2+\|F\|_{L^2}+\|v\|_{H^3}\|\sigma\|_{L^2}^2)+\tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2.$$

Ceci étant, on considère l'équation

$$\nabla\cdot\varphi=\sigma',\qquad \varphi|_{x_3=0}=\varphi|_{x_3=h}=0$$

avec σ' vérifiant (2.15). D'après le théorème de Bogovskij ([2]) il y a une solution φ telle que

$$\|\varphi\|_{H^1}\leq C_\Omega\|\sigma'\|_{L^2}. \tag{4.8}$$

Si on multiplie (3.2) par φ et si on l'intègre sur Ω, il n'est pas difficile de voir, grâce à (4.1) et (4.8), que

$$\overline{T}_0^2\|\sigma'\|_{L^2}^2 \leq C_\Omega^*(\eta\|\nabla v\|_{L^2}^2+\lambda\|\nabla\cdot v\|_{L^2}^2+\|F\|_{L^2}^2)+\tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2, \tag{4.9}$$

C_Ω^* étant une constante.

Si on adjoint (4.9) multipliée par $(4RC_\Omega^*)^{-1}$ à (4.7), on obtient (4.5). □

LEMME 4.2. – *Soient v', ϑ', σ', v et σ comme dans le lemme* 4.1. *Alors pour* $i=1,2$ *on a*

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{R}\|\partial_{x_i}\nabla\cdot v\|_{L^2}^2+k\left\|\left(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\sigma\right\|_{L^2}^2 \tag{4.10}$$

$$\leq k\left\|\left(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\sigma'\right\|_{L^2}^2+C_2'(\|\sigma'\|_{L^2}^2+\|F\|_{L^2}^2+\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2)+\tilde{C}_2\|\vartheta\|_{H^1}^2.$$

DÉMOSTRATION. – On applique l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1,2)$ aux équations (3.2) et

(3.3), on les multiplie par $R^{-1}\partial_{x_i}v$ et $\overline{T}\overline{\rho}^{-1}\partial_{x_i}\sigma$ respectivement et on les intègre sur Ω. Puisque $\partial_{x_i}v$ satisfait aux conditions aux limites (1.5), en les intégrant par parties et en utilisant la relation

$$\int_\Omega \Big[(\partial_{x_i}\nabla\cdot v)\partial_{x_i}(\overline{T}\sigma') - \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\nabla\cdot(\overline{\rho}v))\partial_{x_i}\sigma\Big]dx = -\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\nabla\cdot(\overline{\rho}v))(\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_i}\sigma')\,dx$$

$$+\int_\Omega (\partial_{x_i}\overline{T})\sigma'\partial_{x_i}\nabla\cdot v dx + \int_\Omega \overline{T}\Big[(\partial_{x_i}\log\overline{\rho})\nabla\cdot v + \frac{1}{\overline{\rho}}\partial_{x_i}(v\cdot\nabla\overline{\rho})\Big]\partial_{x_i}\sigma' dx,$$

on obtient

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{R}\|\nabla\cdot(\partial_{x_i}v)\|_{L^2}^2 + \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_i}\sigma')\Big\|_{L^2}^2 \tag{4.11}$$

$$+\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\sigma\Big\|_{L^2}^2 = \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\sigma'\Big\|_{L^2}^2 + \sum_{q=1}^{4} I_q\,,$$

où

$$I_1 = -\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_i}\sigma')\partial_{x_i}\nabla\cdot(\overline{\rho}v)dx,$$

$$I_2 = \int_\Omega \sigma'\Big[\partial_{x_i}\Big(\overline{T}\Big[(\partial_{x_i}\log\overline{\rho})\nabla\cdot v + \frac{1}{\overline{\rho}}\partial_{x_i}(v\cdot\nabla\overline{\rho})\Big]\Big) + (\partial_{x_i}\overline{T})\partial_{x_i}\nabla\cdot v + \frac{g}{R}\partial_{x_i}\partial_{x_i}v_3\Big]dx,$$

$$I_3 = \int_\Omega \Big[(\partial_{x_i}\nabla\cdot v)\partial_{x_i}(\overline{\rho}\vartheta) - \frac{1}{R}F\cdot\partial_{x_i}\partial_{x_i}v\Big]dx, \qquad I_4 = -\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\sigma)\partial_{x_i}\nabla\cdot(\sigma v)dx.$$

Compte tenu des expressions de $\overline{\rho}$, $\overline{T}$ et k et de (4.4), sous l'hypothèse (4.1), de manière analogue à la démonstration du lemme 4.1 (en particulier pour I_1), on a

$$I_1 \le \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_i}\sigma')\Big\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2R}\|\nabla\cdot(\partial_{x_i}v)\|_{L^2}^2 + \frac{\eta}{6R}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2,$$

$$I_2 \le \frac{\eta}{6R}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2 + C_\Omega\|\sigma'\|_{L^2}^2, \qquad I_3 \le \frac{\eta}{6R}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2 + C_\Omega\|F\|_{L^2}^2 + \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2.$$

Quant au terme I_4, on a

$$I_4 = -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}|\partial_{x_i}\sigma|^2(\nabla\cdot v)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\nabla\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)\cdot v|\partial_{x_i}\sigma|^2 dx - \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\sigma)\nabla\cdot(\sigma\partial_{x_i}v)dx$$

$$\le C_\Omega\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2.$$

Donc de ces inégalités pour I_q ($q = 1,2,3,4$) et de (4.11) on déduit (4.10). $\square$

LEMME 4.3. – *Soient v', ϑ', σ', v et σ comme dans le lemme* 4.1. *Alors on a*

$$(\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^{\,2}\|\partial_{x_3}\sigma\|^2_{L^2} - C'_3\sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_i}v\|^2_{L^2} - C'_3\overline{T}_0^{\,-2}\|v\|^2_{H^1} \tag{4.12}$$

$$\leq (\overline{\kappa}-1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^{\,2}\|\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2} + C'_3\|\nabla\sigma'\|^2_{L^2} + \tilde{C}_3(\|F\|^2_{L^2} + \|\vartheta\|^2_{H^1}) + C'_3\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|^2_{L^2},$$

où

$$C'_{(\overline{T}_0)} = \frac{R}{\eta+\lambda}\left(\frac{\overline{T}_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma R}gh}{\overline{T}_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{4.13}$$

DÉMOSTRATION. – A l'aide de l'identité

$$\Delta v_3 = \partial_{x_3}\nabla\cdot v + \partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_3 - \partial_{x_3}v_1) + \partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_3 - \partial_{x_3}v_2),$$

de (3.2) on tire

$$\partial_{x_3}\nabla\cdot v = -\frac{\eta}{\eta+\lambda}(\partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_3 - \partial_{x_3}v_1) + \partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_3 - \partial_{x_3}v_2)) \tag{4.14}$$

$$+\frac{R}{\eta+\lambda}\partial_{x_3}(\overline{\rho}\vartheta) + \frac{R}{\eta+\lambda}\overline{T}\partial_{x_3}\sigma' + \frac{R}{\eta+\lambda}\sigma'\partial_{x_3}\overline{T} + \frac{g}{\eta+\lambda}\sigma' - \frac{1}{\eta+\lambda}F_3.$$

Si on applique l'opérateur différentiel $\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ aux deux membres de (3.3) et y substitue l'expression de $\partial_{x_3}\nabla\cdot v$ donnée ci-dessus et si, en les multipliant par $\partial_{x_3}\sigma$, on les intègre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \Big[k(\partial_{x_3}\sigma - \partial_{x_3}\sigma')(\partial_{x_3}\sigma) + \frac{R}{\eta+\lambda}\overline{\rho}\,\overline{T}(\partial_{x_3}\sigma')(\partial_{x_3}\sigma)\Big]dx = \sum_{q=1}^{5} I_q, \tag{4.15}$$

où

$$I_1 = -\frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega \overline{\rho}(R\sigma'\partial_{x_3}\overline{T} + g\sigma')(\partial_{x_3}\sigma)dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega \overline{\rho}(F_3 - R\partial_{x_3}(\overline{\rho}\vartheta))(\partial_{x_3}\sigma)dx,$$

$$I_3 = \frac{\eta}{\eta+\lambda}\int_\Omega \overline{\rho}(\partial_{x_3}\sigma)(\partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_3 - \partial_{x_3}v_1) + \partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_3 - \partial_{x_3}v_2))dx$$

$$I_4 = -\int_\Omega (\partial_{x_3}(v\cdot\nabla\overline{\rho}) + (\partial_{x_3}\overline{\rho})\nabla\cdot v))(\partial_{x_3}\sigma)dx$$

$$I_5 = -\int_\Omega (\partial_{x_3}\sigma)\nabla\cdot(\partial_{x_3}(\sigma v))dx.$$

En utilisant l'identité

$$(a-b)a + aab = \frac{1+a}{2}a^2 + \frac{1-a}{2}(a-b)^2 - \frac{1-a}{2}b^2$$

et en tenant compte de (2.2), (2.3) et (4.1), on a

$$\int_\Omega \left[k(\partial_{x_3}\sigma - \partial_{x_3}\sigma')(\partial_{x_3}\sigma) + \frac{R}{\eta+\lambda}\overline{\rho}\,\overline{T}(\partial_{x_3}\sigma')(\partial_{x_3}\sigma)\right]dx$$

$$\geq \frac{k+\delta_1}{2}\|\partial_{x_3}\sigma\|_{L^2}^2 - \frac{k-\delta_1}{2}\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + \frac{k-\delta_1'}{2}\|\partial_{x_3}\sigma - \partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2,$$

où δ_1 est le nombre donné dans (4.3) et

$$\delta_1' = \frac{R}{\eta+\lambda}C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

En outre, si on rappelle les expressions de $\overline{\rho}$ et de $\overline{T}$ (voir (2.2), (2.3) et (1.8)bis), on voit que

$$I_1 \leq \frac{k-\delta_1'}{6}\|\partial_{x_3}\sigma - \partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + \frac{\delta_1}{12}\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2$$

$$I_2 \leq \tilde{C}(\overline{\rho})\|F\|_{L^2}^2 + \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2 + \frac{\delta_1}{4}\|\partial_{x_3}\sigma\|_{L^2}^2,$$

$$I_3 \leq \frac{k-\delta_1'}{6}\|\partial_{x_3}\sigma - \partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + \frac{\delta_1}{12}\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2$$

$$I_4 \leq \frac{k-\delta_1'}{6}\|\partial_{x_3}\sigma - \partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + \frac{\delta_1}{12}\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}}\|v\|_{H^1}^2$$

Quant au dernier terme I_5, on a

$$I_5 = -\frac{1}{2}\int_\Omega(\nabla\cdot v)|\partial_{x_3}\sigma|^2dx - \sum_{j=1}^{3}\int_\Omega(\partial_{x_3}\sigma)(\partial_{x_j}(\partial_{x_3}v_j)\sigma)dx \leq C_\Omega\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2.$$

Si on adjoint ces inégalités à (4.15), on obtient

$$(k+\frac{\delta_1}{2})\|\partial_{x_3}\sigma\|_{L^2}^2 \leq (k-\frac{\delta_1}{2})\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2$$

$$+ C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2 + C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}}\|v\|_{H^1}^2$$

$$+ C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \tilde{C}(\overline{\rho})\|F\|_{L^2}^2 + \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2 + C_\Omega\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2.$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par

$$\left(C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\right)^{-1}=\overline{T}_0^2\left(C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)^{-1}$$

et tenant compte de (4.3), on obtient (4.12). □

LEMME 4.4. – *Soient v', ϑ', σ', v et σ comme dans le lemme* 4.1. *Alors on a*

$$\|v\|_{H^2}^2-C_4'\sum_{i=1}^2\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2 \tag{4.16}$$

$$\leq -C_4'(\overline{T}_0^2-1)\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2+C_4'\overline{T}_0^2\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2+C_4'\|F\|_{L^2}^2+\tilde{C}_4\|\vartheta\|_{H^1}^2.$$

DÉMOSTRATION. – On réécrit (3.2) dans la forme d'un problème de Stokes

$$-\eta\Delta v+R\nabla(\overline{T}\sigma')=\lambda\nabla(\nabla\cdot v)-R\nabla(\overline{\rho}\vartheta)-g\sigma'\vec{e}_3+F, \tag{4.17}$$

$$\nabla\cdot v=\nabla\cdot v. \tag{4.18}$$

On peut appliquer à ce problème de Stokes la théorie classique de Cattabriga ([3]) avec une modification consistant à remplacer dans sa démonstration la fonction de Green correspondante à la condition de Dirichlet par la fonction de Green correspondante à notre condition aux limites (1.5). Or, cette dernière est donnée et examinée dans [9] et, comme on peut aisément vérifer, toute la démonstration de Cattabriga reste valable même avec cette substitution. De la sorte on obtient

$$\|v\|_{H^2}^2+\|\nabla(\overline{T}\sigma')\|_{L^2}^2\leq\tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2+C_\Omega(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2+\|\nabla\cdot v\|_{H^1}^2+\|F\|_{L^2}^2). \tag{4.19}$$

Puisque de (4.14) on obtient

$$\|\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|_{L^2}^2\leq C_\Omega\left(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2+\sum_{i=1}^2\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2+\|F\|_{L^2}^2\right)$$
$$+C_\Omega T_0^2\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2+\tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2$$

et que l'on a

$$\|\nabla(\overline{T}\sigma')\|_{L^2}^2\geq C_\Omega(\overline{T}_0^2-1)\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2,$$

on déduit de (4.19) l'inégalité (4.16). □

LEMME 4.5. – *Soient v', ϑ', σ', v et σ comme dans le lemme* 4.1. *Soient $i,j=1,2$. Alors on a*

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{R}\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\|_{L^2}^2+k\left\|\left(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma\right\|_{L^2}^2-C_5'\|v\|_{H^2}^2 \tag{4.20}$$

$$\leq k\left\|\left(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma'\right\|_{L^2}^2+C_5'(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2+\|F\|_{H^1}^2+\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{H^1}^2)+\tilde{C}_5\|\vartheta\|_{H^2}^2.$$

DÉMOSTRATION. – On applique l'opérateur différentiel $\partial_{x_i}\partial_{x_j}$ $(i,j=1,2)$ aux deux membres de (3.2) et de (3.3) et on les multiplie par $R^{-1}\partial_{x_i}\partial_{x_j}v$ et $\overline{T}\overline{\rho}^{-1}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma$ respectivement. Si on les intègre sur Ω en utilsant l'intégration par parties compte tenu de la condition (1.5), on obtient

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\|^2_{L^2}+\frac{\lambda}{R}\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\|^2_{L^2}+\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma-\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma')\Big\|^2_{L^2}$$
$$+\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma\Big\|^2_{L^2}=\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma'\Big\|^2_{L^2}+\sum_{q=1}^{7}I_q, \tag{4.21}$$

où

$$I_1=-\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma-\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma')\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot(\overline{\rho}v)dx,$$

$$I_2=\int_\Omega((\partial_{x_i}\overline{T})\partial_{x_j}\sigma'+(\partial_{x_j}\overline{T})\partial_{x_i}\sigma'+\sigma'\partial_{x_i}\partial_{x_j}\overline{T})\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot vdx,$$

$$I_3=\int_\Omega\partial_{x_i}\Big[\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}[\partial_{x_i}\partial_{x_j}(v\cdot\nabla\overline{\rho})+(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\overline{\rho})\nabla\cdot v+(\partial_{x_i}\overline{\rho})\partial_{x_j}\nabla\cdot v+(\partial_{x_j}\overline{\rho})\partial_{x_i}\nabla\cdot v]\Big]\partial_{x_j}\sigma'dx,$$

$$I_4=\frac{g}{R}\int_\Omega(\partial_{x_j}\sigma')\partial^2_{x_i}\partial_{x_j}v_3dx,$$

$$I_5=\int_\Omega(\partial_{x_i}\partial_{x_j}(\overline{\rho}\vartheta))\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot vdx,\qquad I_6=-\frac{1}{R}\int_\Omega(\partial^2_{x_i}\partial_{x_j}v)\cdot\partial_{x_j}Fdx,$$

$$I_7=-\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot(\sigma v)dx.$$

Compte tenu des expressions de $\overline{\rho}$ et de $\overline{T}$, on a

$$I_1\le\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma-\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma')\Big\|^2_{L^2}+\frac{\eta+\lambda}{16R}\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\|^2_{L^2}+C_\Omega\|v\|^2_{H^2}.$$

où on a utilisé la relation $\frac{1}{2k}C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\le\frac{\eta+\lambda}{16R}$ due à (4.3)–(4.4). D'autre part, on a évidemment

$$I_2+I_3+I_4\le\frac{\eta}{6R}\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\|^2_{L^2}+C_\Omega\|\nabla\sigma'\|^2_{L^2},$$

$$I_5\le\tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|^2_{H^2}+\frac{\lambda}{4R}\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\|^2_{L^2},\qquad I_6\le C_\Omega\|F\|^2_{H^1}+\frac{\eta}{6R}\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\|^2_{L^2}.$$

Quant au terme I_7, en utilisant la relation

$$-\int_\Omega v\,\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\,\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma\cdot\nabla\partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma dx=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\nabla\cdot\left(v\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\right)\right)|\partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma|^2dx,$$

on obtient

$$I_7\le C_\Omega\|v\|_{H^3(\Omega)}\|\nabla\sigma\|^2_{H^1}.$$

Si on adjoint les estimations citées ci-dessus des termes I_q $(q=1,\cdots,7)$ à (4.21), on obtient (4.20). □

LEMME 4.6. – *Soient v', ϑ', σ', v et σ comme dans le lemme* 4.1. *Soit* $i=1,2$. *Alors on a*

$$(4.22)\qquad (\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^{\,2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma\|^2_{L^2}-C'_6\sum_{j=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_j}\partial_{x_i}v\|^2_{L^2}-C'_6\overline{T}_0^{\,-2}\|v\|^2_{H^2}$$

$$\le(\overline{\kappa}-1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^{\,2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|^2_{L^2}+C'_6(\|\nabla\sigma'\|^2_{L^2}+\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|^2_{H^1})+\tilde{C}_6(\|\vartheta\|^2_{H^2}+\|F\|^2_{H^1}),$$

où $C'_{(\overline{T}_0)}$ est la constante donnée dans (4.13).

DÉMOSTRATION. – On applique l'opérateur différentiel $\partial_{x_i}\partial_{x_3}$ $(i=1,2)$ aux deux membres de (3.3) et y substitue l'expression $\partial_{x_3}\nabla\cdot v$ donnée dans (4.14). En les multipliant par $\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma$ et en les intégrant sur Ω, on obtient

$$(4.23)\quad \int_\Omega\left[k(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma-\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma')(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)+\frac{R}{\eta+\lambda}\overline{\rho}\,\overline{T}(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma')(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)\right]dx=\sum_{q=1}^{5}I_q,$$

où

$$I_1=-\frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega(R\partial_{x_i}(\overline{\rho}\sigma'\partial_{x_3}\overline{T})+R(\partial_{x_i}(\overline{\rho}\,\overline{T}))\partial_{x_3}\sigma'+g(\partial_{x_i}(\overline{\rho}\sigma'))(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)dx,$$

$$I_2=\frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega(\partial_{x_i}(\overline{\rho}F_3-R\overline{\rho}\partial_{x_3}(\overline{\rho}\vartheta)))(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)dx,$$

$$I_3=\frac{\eta}{\eta+\lambda}\int_\Omega(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_i}(\overline{\rho}(\partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_3-\partial_{x_3}v_1)+\partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_3-\partial_{x_3}v_2)))dx,$$

$$I_4=-\int_\Omega(\partial_{x_i}\partial_{x_3}(v\cdot\nabla\overline{\rho})+\partial_{x_i}((\partial_{x_3}\overline{\rho})\nabla\cdot v))(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)dx,$$

$$I_5=-\int_\Omega(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)\nabla\cdot(\partial_{x_i}\partial_{x_3}(\sigma v))dx.$$

De manière tout analogue à la démonstration du lemme 4.3, en utilsant l'inégalité

$$\int_\Omega \Big[k(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma')(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma) + \frac{R}{\eta+\lambda}\bar{\rho}\overline{T}(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma')(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)\Big]dx$$

$$\geq \frac{k+\delta_1}{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma\|_{L^2}^2 - \frac{k-\delta_1}{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 + \frac{k-\delta_1'}{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2$$

et en estimant les termes I_i, $i = 1, \cdots, 5$, on déduit de (4.23) que

$$\Big(k+\frac{\delta_1}{2}\Big)\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma\|_{L^2}^2 \leq \Big(k-\frac{\delta_1}{2}\Big)\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 + C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\|\nabla\partial_{x_j}\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2$$

$$+ C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}}\|v\|_{H^2}^2 + \tilde{C}(\bar{\rho})(\|\vartheta\|_{H^2}^2 + \|F\|_{H^1}^2) + C_\Omega\big(C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{H^1}^2\big).$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par

$$\big(C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\big)^{-1} = \overline{T}_0^2\big(C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\big)^{-1}$$

et tenant compte de (4.3), on obtient (4.22). □

LEMME 4.7. – *Soient v', ϑ', σ', v et σ comme dans le lemme* 4.1. *Soit* $i = 1, 2$. *Alors on a*

$$\|\partial_{x_i}v\|_{H^2}^2 - C_7'(\|v\|_{H^2}^2 + \sum_{j=1}^2 \|\nabla\partial_{x_j}\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2) \tag{4.24}$$

$$\leq -\overline{T}_0^2\|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 + C_7'(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \overline{T}_0^2\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 + \|F\|_{H^1}^2) + \tilde{C}_7\|\vartheta\|_{H^2}^2.$$

DÉMOSTRATION. – On applique à (3.2) l'opérateur differéntiel ∂_{x_i} $(i = 1, 2)$ et on écrit le système obetnu sous la forme

$$-\eta\Delta(\partial_{x_i}v) + \nabla(R\partial_{x_i}(\overline{T}\sigma')) = \lambda\partial_{x_i}\nabla(\nabla\cdot v) - R\nabla\partial_{x_i}(\bar{\rho}\vartheta) + \partial_{x_i}F - \vec{e}_3 g\partial_{x_i}\sigma',$$

$$\nabla\cdot(\partial_{x_i}v) = \partial_{x_i}\nabla\cdot v,$$

$$\partial_{x_i}v|_{x_3=0} = 0, \quad \partial_{x_i}v_3|_{x_3=h} = \partial_{x_3}\partial_{x_i}v_j\big|_{x_3=h} = 0, \quad j = 1, 2.$$

En considérant ce système comme problème de Stokes, de manière analogue à la démonstration du lemme 4.4 on a

$$\|\partial_{x_i}v\|_{H^2}^2 + R^2\|\nabla\partial_{x_i}(\overline{T}\sigma')\|_{L^2}^2 \tag{4.25}$$

$$\leq C_\Omega(\|F\|_{H^1}^2 + \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \|\partial_{x_i}\nabla\cdot v\|_{H^1}^2) + \tilde{C}(\bar{\rho})\|\vartheta\|_{H^2}^2.$$

Par ailleurs, notons que

$$\|\partial_{x_i}\nabla\cdot v\|_{H^1}^2 \leq C_\Omega\Big(\|v\|_{H^2}^2 + \|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{2}\|\partial_{x_j}\partial_{x_i}\nabla\cdot v\|_{L^2}^2\Big) \tag{4.26}$$

et, en appliquant l'opérateur ∂_{x_i} $(i = 1, 2)$ aux deux membres de (4.14), on en tire

$$\begin{aligned}\|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|_{L^2}^2 \leq C_\Omega\Big(&\sum_{j=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_j}\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2 + \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 \\ &+ \overline{T}_0^2\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 + \|F\|_{H^1}^2\Big) + \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^2}^2.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Si on substitue (4.26) et (4.27) dans (4.25), compte tenu de l'inégalité évidente

$$\|\nabla\partial_{x_i}(\overline{T}\sigma')\|_{L^2}^2 \geq C_\Omega(\overline{T}_0^2\|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 - \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2),$$

on obtient (4.24). □

LEMME 4.8. – *Soient v', ϑ', σ', v et σ comme dans le lemme* 4.1. *Alors on a*

$$\begin{aligned}(\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^{\,2}\|\varDelta\sigma\|_{L^2}^2 - C'_8\overline{T}_0^{\,-2}\|v\|_{H^2}^2 &\leq (\overline{\kappa}-1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^{\,2}\|\varDelta\sigma'\|_{L^2}^2 \\ &+ C'_8(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{H^1}^2) + \tilde{C}_8(\|\vartheta\|_{H^2}^2 + \|F\|_{H^1}^2),\end{aligned} \tag{4.28}$$

où $C'_{(\overline{T}_0)}$ est la constante donnée dans (4.13).

DÉMOSTRATION. – On applique l'opérateur laplacien à l'équation (3.3) et on y sbstitue l'expression de $\nabla\cdot\varDelta v$ obtenue de l'équation (3.2), de sorte que, en multipliant l'équation ainsi obtenue par $\varDelta\sigma$ et en l'intégrant sur Ω, on a

$$\int_\Omega (k(\varDelta\sigma - \varDelta\sigma')\varDelta\sigma + \frac{R}{\eta+\lambda}\overline{T}\overline{\rho}\varDelta\sigma'\varDelta\sigma)dx = \sum_{q=1}^{4} I_q,$$

où

$$I_1 = -\frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega (2R\overline{\rho}\nabla\overline{T}\cdot\nabla\sigma' + R\overline{\rho}\sigma'\varDelta\overline{T} + g\overline{\rho}\partial_{x_3}\sigma')\varDelta\sigma dx,$$

$$I_2 = -\frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega \overline{\rho}(R\varDelta(\overline{\rho}\vartheta) - \nabla\cdot F)\varDelta\sigma dx,$$

$$I_3 = -\int_\Omega (\varDelta(v\cdot\nabla\overline{\rho}) + (\nabla\cdot v)\varDelta\overline{\rho} + 2(\nabla\overline{\rho})\cdot\nabla(\nabla\cdot v))\varDelta\sigma dx,$$

$$I_4 = -\int_\Omega (\varDelta\nabla\cdot(\sigma v))\varDelta\sigma dx.$$

De manière analogue à la démonstration des lemmes 4.3 et 4.6, on a

$$\int_\Omega (k(\Delta\sigma - \Delta\sigma')\Delta\sigma + \frac{R}{\eta+\lambda}\overline{T}\overline{\rho}\Delta\sigma'\Delta\sigma)dx$$

$$\geq \frac{k+\delta_1}{2}\|\Delta\sigma\|_{L^2}^2 - \frac{k-\delta_1}{2}\|\Delta\sigma'\|_{L^2}^2 + \frac{k-\delta_1'}{2}\|\Delta\sigma - \Delta\sigma'\|_{L^2}^2.$$

D'autre part, il n'est pas difficile d'établir l'inégalité

$$\sum_{q=1}^4 I_q \leq \frac{\delta_1}{4}\|\Delta\sigma\|_{L^2}^2 + C_\Omega C_{M_\rho}\Big(\overline{T}_0^{\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}}\|v\|_{H^2}^2 + \overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2\Big)$$

$$+ C_\Omega\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{H^1}^2 + \tilde{C}(\rho)(\|\vartheta\|_{H^2}^2 + \|F\|_{H^1}^2).$$

Donc, de manière analogue à la démonstration des lemme 4.3 et 4.6, on en déduit (4.28). □

LEMME 4.9. – *Soient v', ϑ', σ', v et σ comme dans le lemme* 4.1. *Alors on a*

$$\|v\|_{H^3}^2 - C_9'\Big(\sum_{i=1}^2\|\partial_{x_i}v\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^1}^2\Big) \leq -\overline{T}_0^2\|\nabla\sigma'\|_{H^1}^2 \tag{4.29}$$

$$+ C_9'\overline{T}_0^2\Big(\|\Delta\sigma'\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^2\|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2\Big) + C_9'(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \|F\|_{H^1}^2) + \tilde{C}_9\|\vartheta\|_{H^2}^2.$$

DÉMOSTRATION. – Comme dans le lemme 4.4, en vertu de la théorie bien connue de Cattabriga ([3]) et de la considération de [9] sur le problème avec la condition du type (1.5), on déduit du problème de Stokes (4.17)–(4.18) l'inégalité

$$\|v\|_{H^3}^2 + \|\nabla(\overline{T}\sigma')\|_{H^1}^2 \leq C_\Omega(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \|\nabla\cdot v\|_{H^2}^2 + \|F\|_{H^1}^2) + \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^2}^2. \tag{4.30}$$

On remarque que

$$\|\nabla(\overline{T}\sigma')\|_{H^1}^2 \geq C_\Omega(\overline{T}_0^2\|\nabla\sigma'\|_{H^1}^2 - \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2),$$

$$\|\nabla\cdot v\|_{H^2}^2 \leq \|\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|_{H^1}^2 + \sum_{i=1}^2\|\partial_{x_i}v\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^1}^2,$$

$$\|\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|_{H^1}^2 \leq C_\Omega\Big(\overline{T}_0^2\|\nabla\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^2\|\partial_{x_i}v\|_{H^2}^2 + \|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \|F\|_{H^1(\Omega)}^2\Big) + \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^2}^2,$$

$$\|\partial_{x_3}\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 \leq \|\Delta\sigma'\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^2\|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2,$$

où la troisième inégalité est une conséquence immédiate de (4.14). En adjoignat ces inégalités à (4.30), on obtient (4.29). □

5. – Application du théorème du point fixe de Schauder.

Pour démontrer le théorème 2.1 par l'application du principe du point fixe de Schauder, on démontre d'abord le lemme suivant pour l'opérateur Φ défini dans le paragraphe 3 (voir (3.4)).

LEMME 5.1. – *Si $\overline{T}_0$ est assez grand et si $\|\varepsilon\|_{H^3}$ est assez petit, alors il existe une constante positive a et une norme $\|\cdot\|_{\Sigma^2}$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ telles que, si on pose*

$$B = \{\,(v,\vartheta,\sigma) \in H^3_a(\Omega)\times H^2_b(\Omega)\times H^2_c(\Omega)\,|\, \|v\|^2_{H^3} + \|\vartheta\|^2_{H^2} + \|\sigma\|^2_{\Sigma^2} \le a^2\,\}, \tag{5.1}$$

alors on ait

$$\Phi(B) \subset B. \tag{5.2}$$

DÉMOSTRATION. – Soient Λ_k, $k = 1,\cdots,9$, des nombres positifs à déterminer. En multipliant les deux membres des inégalités (4.5), (4.10), (4.12), (4.16), (4.20), (4.22), (4.24), (4.28), (4.29), obtenues dans les lemmes 4.1–4.9, par $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_9$ respectivement, en posant $\Lambda_9 = 1$ et en les adjoignant, on obtient

$$\begin{aligned}
(5.3)\quad & \|v\|^2_{H^3} + \sum_{i=1}^{2}\|\partial_{x_i}v\|^2_{H^2}(-C'_9+\Lambda_7) + \sum_{i,j=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_j}\partial_{x_i}v\|^2_{L^2}\Big(-C'_7\Lambda_7 - C'_6\Lambda_6 + \Lambda_5\frac{\eta}{R}\Big)\\
&+\|v\|^2_{H^2}(-C'_9 - C'_8\overline{T}_0^{-2}\Lambda_8 - 2C'_7\Lambda_7 - 2C'_6\overline{T}_0^{-2}\Lambda_6 - 4C'_5\Lambda_5 + \Lambda_4)\\
&+\sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_i}v\|^2_{L^2}(-C'_4\Lambda_4 - C'_3\Lambda_3 + \Lambda_2\frac{\eta}{R}) + \|v\|^2_{H^1}\Big(-C'_3\overline{T}_0^{-2}\Lambda_3 + \Lambda_1\frac{\eta}{R}\Big)\\
&+\|\Delta\sigma\|^2_{L^2}(\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\Lambda_8 + \sum_{i=1}^{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma\|^2_{L^2}(\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\Lambda_6\\
&+\sum_{i,j=1}^{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma\Big\|^2_{L^2}k\Lambda_5 + \|\partial_{x_3}\sigma\|^2_{L^2}(\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\Lambda_3\\
&+\sum_{i=1}^{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\sigma\Big\|^2_{L^2}k\Lambda_2 + \Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\sigma\Big\|^2_{L^2}k\Lambda_1\\
\le\ & \|\nabla\sigma'\|^2_{H^1}(-\overline{T}_0^2) + \|\Delta\sigma'\|^2_{L^2}(C'_9 + \Lambda_8(\overline{\kappa}-1)C'_{(\overline{T}_0)})\overline{T}_0^2 + \sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\|^2_{L^2}(C'_9-\Lambda_7)\overline{T}_0^2
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2(C_7'\Lambda_7+(\overline{\kappa}-1)C'_{(\overline{T}_0)}\Lambda_6)\overline{T}_0^2+\sum_{i,j=1}^{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma'\Big\|_{L^2}^2k\Lambda_5$$

$$+\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2(C_9'+C_8'\Lambda_8+2C_7'\Lambda_7+2C_6'\Lambda_6+4C_5'\Lambda_5+C_3'\Lambda_3-\Lambda_4(\overline{T}_0^2-1))$$

$$+\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2(C_4'\Lambda_4+\Lambda_3(\overline{\kappa}-1)C'_{(\overline{T}_0)})\overline{T}_0^2+\sum_{i=1}^{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\sigma'\Big\|_{L^2}^2k\Lambda_2$$

$$+\|\sigma'\|_{L^2}^2(2C_2'\Lambda_2-C_1'(\overline{T}_0^2-1)\Lambda_1)+\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\sigma'\Big\|_{L^2}^2k\Lambda_1+\mathcal{E},$$

où

$$\mathcal{E}=\sum_{k=1}^{9}d_k[(C_k'+\tilde{C}_k)\|F\|_{H^1}^2+\tilde{C}_k\|\vartheta\|_{H^2}^2+C_k'\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{H^1}^2], \tag{5.4}$$

$$d_5=4,\quad d_2=d_6=d_7=2,\quad d_1=d_3=d_4=d_8=d_9=1.$$

En faisant la comparaison des coefficients par lesquels les normes figurant dans le premier et dans le second membre de l'inégalité (5.3) sont multipliées, on voit aisément que, si $\overline{T}_0$ est assez grand, il est possible de choisir $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_8$ de telle sorte que les deux conditions suivantes (A) et (B) soient vérifiées:

(A)
$$-C_9'+\Lambda_7>0,\qquad -C_7'\Lambda_7-C_6'\Lambda_6+\Lambda_5\frac{\eta}{R}>0,$$

$$-C_9'-C_8'\overline{T}_0^{-2}\Lambda_8-2C_7'\Lambda_7-2C_6'\overline{T}_0^{-2}\Lambda_6-4C_5'\Lambda_5+\Lambda_4>0,$$

$$-C_4'\Lambda_4-C_3'\Lambda_3+\Lambda_2\frac{\eta}{R}>0,\qquad -C_3'\overline{T}_0^{-2}\Lambda_3+\Lambda_1\frac{\eta}{R}>0,$$

(B) le second membre de (5.3) soit majoré par

$$(1-\delta)\Bigg[\nu_1\|\Delta\sigma'\|_{L^2}^2+\nu_2\sum_{i=1}^{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2+\nu_3\sum_{i,j=1}^{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma'\Big\|_{L^2}^2$$

$$+\nu_4\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2+\nu_5\sum_{i=1}^{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\sigma'\Big\|_{L^2}^2+\nu_6\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\sigma'\Big\|_{L^2}^2\Bigg],$$

où δ est une constante positive et

$$\nu_1=(\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\Lambda_8,\quad \nu_2=(\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\Lambda_6,\quad \nu_3=k\Lambda_5,$$

$$\nu_4=(\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\Lambda_3,\quad \nu_5=k\Lambda_2,\quad \nu_6=k\Lambda_1.$$

On voit aisément qu'un tel choix de Λ_j $(j=1,\cdots,8)$ est possible; en effet, pour les contraintes citées dans (A) et (B), si $\Lambda_{j'}$ avec $j'=j+1,\cdots,8$ sont donnés, comme on le constate facilement, on peut choisir un Λ_j assez grand de sorte que les inégalités contenant seulement Λ_j et $\Lambda_{j'}$ avec $j' = j+1, \cdots, 8$ soient vérifiées (et donc on peut procéder le choix de Λ_j en partant de Λ_8 et puis en choisissant successivement Λ_j pour $j = 7, 6, \cdots, 1$).

Donc, en posant

$$\|\sigma\|_{\Sigma^2}^2 = \nu_1 \|\Delta\sigma\|_{L^2}^2 + \nu_2 \sum_{i=1}^{2} \|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma\|_{L^2}^2 + \nu_3 \sum_{i,j=1}^{2} \left\| \left(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}} \partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma \right\|_{L^2}^2$$
$$+ \nu_4 \|\partial_{x_3}\sigma\|_{L^2}^2 + \nu_5 \sum_{i=1}^{2} \left\| \left(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}} \partial_{x_i}\sigma \right\|_{L^2}^2 + \nu_6 \left\| \left(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma \right\|_{L^2}^2, \tag{5.5}$$

on a

$$\|v\|_{H^3}^2 + \|\sigma\|_{\Sigma^2}^2 \leq (1-\delta)\|\sigma'\|_{\Sigma^2}^2 + \mathcal{E}. \tag{5.6}$$

On remarque que la norme $\|\cdot\|_{\Sigma^2}$ introduite dans (5.5) est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$. Or, compte tenu du comportement bien connu des termes non-linéaires de $F(v, \vartheta, \sigma)$ et de $\mathcal{E}$ pour

$$\|v\|_{H^3}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2 + \|\sigma\|_{H^2}^2 \to 0,$$

de l'expression de $\mathcal{E}$ et de F (voir (5.4), (2.12)) et du lemme 3.4, on déduit de (5.6) que, si $\|\varepsilon\|_{H^3}$ est assez petit, il existe une constante positive a telle que, si on définit B comme dans (5.1), alors (5.2) soit vérifiée. Le lemme est démontré. □

Maintenant on va prouver la continuité de l'opérateur $\Phi(\,\cdot\,)$ dans l'ensemble B (donné dans (5.1)) par rapport à la topologie de $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

LEMME 5.2. – *Il existe une constante C_B telle que, quels que soient deux élements $(v'_{[1]}, \vartheta'_{[1]}, \sigma'_{[1]})$ et $(v'_{[2]}, \vartheta'_{[2]}, \sigma'_{[2]})$ de B, on ait*

$$\|v_{[1]} - v_{[2]}\|_{H^2} + \|\vartheta_{[1]} - \vartheta_{[2]}\|_{H^1} + \|\sigma_{[1]} - \sigma_{[2]}\|_{H^1}$$
$$\leq C_B(\|v'_{[1]} - v'_{[2]}\|_{H^2} + \|\vartheta'_{[1]} - \vartheta'_{[2]}\|_{H^1} + \|\sigma'_{[1]} - \sigma'_{[2]}\|_{H^1}), \tag{5.7}$$

où $(v_{[i]}, \vartheta_{[i]}, \sigma_{[i]}) = \Phi(v'_{[i]}, \vartheta'_{[i]}, \sigma'_{[i]})$ $(i = 1, 2)$.

DÉMOSTRATION. – Rappelons d'abord que $(v'_{[i]}, \vartheta'_{[i]}, \sigma'_{[i]})$ et $(v_{[i]}, \vartheta_{[i]}, \sigma_{[i]})$ appartiennent à B et que donc en vertu de (5.1) on a

$$\|v'_{[i]}\|_{H^3}, \|\vartheta'_{[i]}\|_{H^2}, \|\sigma'_{[i]}\|_{H^2}, \|v_{[i]}\|_{H^3}, \|\vartheta_{[i]}\|_{H^2}, \|\sigma_{[i]}\|_{H^2} \leq a \qquad (i = 1, 2). \tag{5.8}$$

Posons

$$V' = v'_{[1]} - v'_{[2]}, \quad \Theta' = \vartheta'_{[1]} - \vartheta'_{[2]}, \quad S' = \sigma'_{[1]} - \sigma'_{[2]},$$
$$V = v_{[1]} - v_{[2]}, \quad \Theta = \vartheta_{[1]} - \vartheta_{[2]}, \quad S = \sigma_{[1]} - \sigma_{[2]}.$$

Comme $\vartheta_{[i]}$, $v_{[i]}$ et $\sigma_{[i]}$ ($i = 1, 2$) sont définies par les équations (3.1)–(3.3), pour Θ, V, S, S' on a

$$-\kappa\Delta\Theta = G(v'_{[1]}, \vartheta'_{[1]}, \sigma'_{[1]}) - G(v'_{[2]}, \vartheta'_{[2]}, \sigma'_{[2]}), \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} -\eta\Delta V - \lambda\nabla(\nabla\cdot V) = & -R\nabla(S'\overline{T} + \overline{\rho}\Theta) - gS'\vec{e}_3 \\ & + F(v'_{[1]}, \vartheta'_{[1]}, \sigma'_{[1]}) - F(v'_{[2]}, \vartheta'_{[2]}, \sigma'_{[2]}), \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$kS + \nabla\cdot(Sv_{[1]}) = kS' - \nabla\cdot(\sigma_{[2]}V) - \nabla\cdot(\overline{\rho}V), \tag{5.11}$$

où $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ et $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ sont les fonctions données dans (2.13) et (2.12) respectivement. En estimant la norme dans $H^{-1}(\Omega)$ du second membre de (5.9), de l'expression (2.13) de $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ et de la théorie classique des équations elliptiques on déduit

$$\|\Theta\|_{H^1} \le C(\|V'\|_{H^2} + \|\Theta'\|_{H^1} + \|S'\|_{H^1})$$
$$\times\Big(1 + \sum_{i=1}^{2}(\|v'_{[i]}\|_{H^2} + \|\vartheta'_{[i]}\|_{H^1} + \|\sigma'_{[i]}\|_{H^1}) + \sum_{i=1}^{2}(\|v'_{[i]}\|_{H^2} + \|\vartheta'_{[i]}\|_{H^1} + \|\sigma'_{[i]}\|_{H^1})^2\Big)$$

avec une constante C. Donc, compte tenu de (5.8), on a

$$\|\Theta\|_{H^1} \le C_{a,1}(\|V'\|_{H^2} + \|\Theta'\|_{H^1} + \|S'\|_{H^1}) \tag{5.12}$$

avec une constante $C_{a,1}$.

De manière analogue, en estimant la norme dans $L^2(\Omega)$ du second membre de (5.10) et en utilisant (5.12), on obtient

$$\|V\|_{H^2} \le C_{a,2}(\|V'\|_{H^2} + \|\Theta'\|_{H^1} + \|S'\|_{H^1}) \tag{5.13}$$

avec une constante $C_{a,2}$.

Quant à l'équation (5.11), en premier lieu on la multiplie scalairement par S et en second lieu on lui applique l'opérateur ∇ et la multiplie scalairement par ∇S. Si on rappelle les relations

$$\int_\Omega (v\cdot\nabla S)S\,dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega(\nabla\cdot v)S^2dx, \quad \int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3} v_i\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j}dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega(\nabla\cdot v)\|\nabla S\|^2dx,$$

on en déduit aisément, grâce aussi à (5.8) et (5.13), que

$$\|S\|_{H^1} \le C_{a,3}(\|V'\|_{H^2} + \|\Theta'\|_{H^1} + \|S'\|_{H^1}) \tag{5.14}$$

avec une constante $C_{a,3}$.

En adjoignant les inégalités (5.12)–(5.14) on obtient (5.7). □

Maintenant on peut conclure la démonstration du théorème 2.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1. – Il est évident que l'ensemble B défini dans (5.1) est convexe et compact dans l'espace $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$. Comme en outre en vertù du lemme 5.2 l'opérateur Φ est continu dans B par rapport à la topologie de $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$, on déduit de (5.2) et du théorème du point fixe de Schauder qu'il existe un élément $(v^*, \vartheta^*, \sigma^*)$ appartenant à B tel que

$$\Phi(v^*, \vartheta^*, \sigma^*) = (v^*, \vartheta^*, \sigma^*).$$

En rappelant la définition de Φ (voir le paragraphe 3) et en posant

$$T^* = \overline{T} + \vartheta^*, \qquad \rho^* = \overline{\rho} + \sigma^*$$

(voir (2.7)), on voit que $(v, T, \rho) = (v^*, T^*, \rho^*)$ satisfait aux équations (1.1)–(1.3) avec les conditions (1.5)–(1.7), ce qu'il fallait démontrer. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BEIRÃO DA VEIGA, *Boundary value problems for a class of first order partial differential equations in Sobolev spaces and applications to the Euler flow*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **97** (1988), 247-273.

[2] M. E. BOGOVSKIJ, *Solution de quelques problèmes d'analyse vectorielle connexes aux opérateurs* div *et* grad (en russe). Trudy Sem. Sovoleva (Akad. Nauk, Inst. Mat., Novosibirsk), **1** (1980), 5-40.

[3] L. CATTABRIGA, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*. Rend. Se. Mat. Univ. Padova, **31** (1961), 308-340.

[4] R. FARWIG, *Stationary solutions of compressible Navier-Stokes equations with slip boundary condition*. Commun. Part. Diff. Eq., **14** (1989), 1579-1606.

[5] A. K. KIKOÏNE - I. K. KIKOÏNE, *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, 1979.

[6] O. A. LADYZHENSKAYA (Ladyženskaja) - N. N. URAL'TSEVA (Ural'ceva), *Equations de type elliptique linéaires et quasi-linéaires* (en russe), II^e éd., Nauka, 1973; traduction française de la I^e éd. avec le titre *Equations aux dérivées partielles de type elliptique*, Dunod, 1968.

[7] L. L. LANDAU - E. M. LIFCHITZ, *Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, 1989.

[8] G. I. MARTCHOUK - V. P. DYMNIKOV - V. B. ZALESNIJ - V. N. LYKOSOV - V. YA. GALII, *Modélisation mathématique des circulations générales de l'atmosphère et de l'océan* (en russe). Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984.

[9] V. G. MAZ'YA - B. A. PLAMENEVSKIJ - L. I. STUPYALIS, *The three-dimensional problem of steady-state motion of a fluid with a free surface*. Original in Russian: Diff. Urav. i Prim. - Trudy Sem. Prots. Optimal. Upr., Sekt. I, No. 23 (1979), Inst. Fiz. Mat. Akad. Nauk Litov. SSR. English translation: Amer. Math. Soc. Transl., **123** (1984), 171-268.

[10] J. NEČAS, *Méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, 1967.

[11] A. NOVOTNÝ - M. PADULA, *Existence et unicité de la solution stationnaire des équations d'un fluide compressible visqueux et calorifère en présence d'une grande force extérieure potentielles et d'une petite non-potentielle* (en russe). Sibir. Mat. Zhurnal, **34** (1993), 120-146.

[12] A. Novotný - I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*. Oxford Univ. Press, 2004.
[13] R. Kh. Zeytounian, *Modélisation asymptotique en mécanique des fluides newtoniens*. Springer, 1994.

Rachid Benabidallah, Lynda Taleb: Département de Mathématiques
Université de Tizi-Ouzou M. Mammeri, 15000 Tizi-Ouzou, Algérie
e-mail: rbenabi@yahoo.it, lytaleb@yahoo.fr

Hisao Fujita Yashima: Dipartimento di Matematica
Università di Torino, 10123 Torino, Italia
e-mail: hisao.fujitayashima@unito.it

Pervenuta in Redazione
il 20 giugno 2006 e in forma rivista il 16 gennaio 2008