Giuliano Bratti

Matrici differenziali (sistemi) "individuate" da ogni loro soluzione non nulla

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-B** (2007), n.3, p. 559–567.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10B_3_559_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
(8) **10**-B (2007), 559-567

Matrici differenziali (sistemi) "individuate" da ogni loro soluzione non nulla.

Giuliano Bratti

Sunto. – *L'operatore*

$$S = \partial_x + (1 + xy)\partial_y + x + y$$

(in due variabili) è individuato da ogni sua soluzione non nulla, i.e.: se M *è un* $A_2 = \mathbb{C}[x, y]\langle\partial_x, \partial_y\rangle$ *modulo (sx) unitario; se* $m \in M$ *soddisfa l'equazione* $Sm = 0$ *(*$m \neq 0$*), allora ogni* $T \in A_2$ *tale che* $Tm = 0$ *è del tipo* $T = RS$*. In modo equivalente, si può dir così:* A_2S *è un* A_2*-ideale (sx) massimale. In questo articolo studio le matrici differenziali* $M \in A_{(p,q)}$ *(p righe e q colonne, con elementi nell'algebra di Weyl* A_n*), tali che* $A_{(p,p)}M$ *sia massimale in* $A_{(p,p)}$*.*

Summary. – *A differential matrix has entries in the Weyl algebra* $A_n = A$*. For the sake of simplicity,* M *is also the canonical differential system associated with it.*
Let $A_{(p,q)}$ *be the* $A_{(p,p)} - \mathrm{mod}(sx)$ *of matrices,* p *arrows and* q *columns. Here, we will study the following problems.*

(P_1) *Is it true (as in the case of a single differential operator) that the maximality of* $A_{(p,p)}M$ *in* $A(p, q)$ *is equivalent to:* $\forall M' \in A(p, q)$ *such that* $M'(u) = M(u) = 0$, $u \neq 0$, *we have* $M' \in A_{(p,p)}M$*?*

(P_2) *Describe* $M \in A_{(p,q)}$ *such that* $A_{(p,p)}M$ *is maximal in* $A_{(p,q)}$*.*

0. – Introduzione.

Per ragioni di semplicità, nel seguito adotterò queste abbreviazioni:

l'algebra di Weyl $A_n = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]\langle\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}\rangle$ *è* A*; massimale (ideale o sottomodulo) è max;*

la frase "... individuato a meno di multipli sinistri" è raccolta nella sigla "ms";

$\mathrm{Mod}(A)$ *è la categoria degli* $A - \mathrm{mod}$ *sinistri ed unitari.*

$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $A_{(p,q)}$ è il gruppo delle matrici $M = (P_{i,j})$, p righe e q colonne, con elementi in A. Considerato $A_{(p,q)}$ come $A_{(p,p)}$ – mod, si noti che si ha

$$A_{(p,q)} = \sum_{1}^{q} A_{(p,p)} G_h,$$

dove $G_h = (G_{i,j})$ è così : $G_{i,j} = 0$, se $(i,j) \neq (1,h)$ e $G_{1,h} = 1$.

Una soluzione u della $M(u) = 0$ è così: $u = \{u_1, , u_q\} \in N^q$, $N \in \mathrm{Mod}(A)$, tale che

$$M(u) = \left\{ \sum_{j=1}^{q} P_{i,j} u_j = 0,\ 1 \leq i \leq p \right\}$$

È ben noto che esistono operatori $P \in A$ tali che AP è max in A: ovvio in A_1, con $P = d/dx$, risulta piuttosto difficile dimostrarlo in A_n, si veda [1] e [2].

Forse è meno nota questa equivalenza

(E) *AP è max in A se e solo se: $\forall Q \in A$ tale che $Qu = Pu = 0, u \neq 0$, si ha $Q \in AP$, cioè: P è individuato* "ms" *da ogni sua soluzione non nulla.*

Dimostrazione. – AP sia max in A e sia $Pu = 0$, $u \in N$ e $u \neq 0$. La $\varphi_u : A \longrightarrow N$, $\varphi_u(Q) = Qu$, non è nulla, $\varphi_u(1) = u$, e quindi $AP = \ker(\varphi_u)$.

Viceversa. – P sia individuato "ms" ecc. Se $Q \notin AP$ e se fosse $AP + AQ \subset A$, posto

$$u = 1 + (AP + AQ) \in \frac{A}{(AP + AQ)}$$

si avrebbe $Pu = Qu = 0$. □

Ora, in questa Nota è mio proposito illustrare i seguenti problemi.

(1) *Vale ancora l'equivalenza (E) per le $M \in A_{(p,q)}$ cioè: $A_{(p,p)}M$ è max in $A_{(p,q)}$ se e solo se M è individuata* "ms" *da ogni sua soluzione non nulla?*

(2) *Descrivere le $M \in A_{(p,q)}$ tali che $A_{(p.p)}M$ sia max in $A_{(p,q)}$.*

Si noti che in (1) si parla di $M \in A_{(p,q)}$, tali che $M(u) = 0$ abbia soluzioni non nulle. Il Teorema 1 del § 1 caratterizza le M che sono prive di soluzioni non nulle; ed il Teorema 2 dà risposta positiva al problema 1. Il successivo Teorema 4 caratterizza le M che generano sottomoduli max in $A_{(p,q)}$: essenzialmente, si associa alla $M \in A_{(p,q)}$, una certa $M' \in A_{(p,q-1)}$ e si dimostra che $A_{(p,p)}M$ max equivale ad $A_{(p,p)}M'$ max in $A_{(p,q-1)}$; così che: $A_{(p,p)}M$ max si potrà controllare, infine, sulla massimalità d'una certa M'' con una sola colonna. □

1. – Il problema 1.

Si consideri questo esempio: *sia* $M = (P_{i,1}) \in A_{(p,1)}$. $M(u) = 0$ *implica* $u = 0$ *se e solo se*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_{i,1} = 1.$$

Ovvio il "se", si abbia: $Mu = 0$ implica $u = 0$. Allora deve esser $A_{(1,p)}M = A$. Sennò, posto

$$u = 1 + (A_{(1,p)}M) \in \frac{A}{A_{(1,p)}M}$$

si avrebbe $M(u) = 0$ e $u \neq 0$. $\square$

L'esempio di sopra contiene in nuce questo

TEOREMA 1 (Caratterizzazione delle $M \in A_{(p,q)}$ prive di soluzioni non nulle). – *Sia* $M \in A_{(p,q)}$. $M(u) = 0$ *implica* $u = 0$ *se e solo se esiste* $\Lambda \in A_{(q,p)}$ *tale che*

$$\Lambda M = \mathrm{Id}$$

dove Id *è la matrice identità di* $A_{(q,q)}$.

DIMOSTRAZIONE. – Ovvio il "se", si abbia: $M(u) = 0$ implica $u = 0$, qualunque sia $u \in N$. Sia

$$\cdot M : A^q \longrightarrow A^p \ \text{cos} \ : \cdot M(Q_1, \ldots, Q_p) = (Q_1, \ldots, Q_p) \times M;$$

dall'esattezza di questa riga

$$A^p \xrightarrow{\cdot M} A^q \longrightarrow \mathrm{coker}\,(\,\cdot M) = \frac{A^q}{A^p M} \longrightarrow 0$$

segue l'esattezza di quest'altra

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\mathrm{coker}(\,\cdot M), N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^q, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^P, N)$$
$$N^P \xrightarrow{M} N^q$$

$\forall N \in \mathrm{Mod}(A)$, e di qui si ha

(k) $$\ker(M_{|N^q}) = \{u \in N^q : M(u) = 0\} \cong \mathrm{Hom}_A\left(\frac{A^q}{A^p M}, \frac{A^q}{A^p M}\right)$$

(i tre isomorfismi $\cong$ sono isomorfismi di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali). Se si pone $N = \mathrm{coker}(\,\cdot M)$ la (k) dà

$$\frac{A^q}{A^p M} = 0, \qquad \text{cioè } A_{(q,p)}M = A_{(q,q)}$$

TEOREMA 2. – *Il Problema* 1 *ha risposta affermativa.*

DIMOSTRAZIONE. – $A_{(p,p)}M$ sia max in $A_{(p,q)}$ e sia $M' \in A_{(p,q)}$ tale che $M'(u) = M(u) = 0$, $u = (u_1, \dots, u_n) \neq 0$. Sia $M' \notin A_{(p,p)}M$. Allora,

$$A_{(p,p)}M + A_{(p,p)}M' = A_{(p,q)}$$

e quindi esistono $(\Lambda_h, \Omega_h) \in A^2_{(p,p)}, 1 \leq h \leq q$, tali che

$$\Lambda_h M + \Omega_h M' = G_h$$

(G_h come nell'introduzione). Di qui

$$0 = \Lambda_h M(u) + \Omega_h M'(u) = G_h(u) = u_h.$$

VICEVERSA. – M sia individuata "ms" da ogni sua soluzione non nulla. Dimostro, per assurdo, che $A_{(p,p)}M$ è max in $A_{(p,q)}$.

Supponiamo che $M' \notin A_{(p,p)}M$ e che

$$L = A_{(p,p)}M + A_{(p,p)}M' \subset A_{(p,q)} :$$

sia, ad esempio, $G_1 \notin L$. Si consideri la matrice

$$T = \begin{pmatrix} M \\ M' \end{pmatrix} \in A_{(2p,q)}$$

costituita con le prime p righe della M e le altre p della M'. L'ipotesi implica che se $T(u) = 0$ allora $u = 0$. *In virtù del Teorema* 1 esiste $\Lambda \in A_{(q,2p)}$ tale che

$$\Lambda T = \mathrm{Id} \quad \text{in } A_{(q,q)}$$

e di qui, posto $M = (P_{i,j})$, $M' = (P'_{i,j})$ e $\Lambda = (\lambda_{i,j})$, si ha

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_{1,j} P_{j,1} + \sum_{j=p+1}^{2p} \lambda_{1,j} P'_{j,1} = 1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_{1,j} P_{j,h} + \sum_{j=p+1}^{2p} \lambda_{1,j} P'_{j,h} = 0, \quad 2 \leq h \leq q. \end{cases}$$

Ora, sia $\Lambda_1 \in A_{(p,p)}$ così: la prima riga di Λ_1 sia la $(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,p})$ e le altre sian righe di zeri; e sia $\Omega_1 \in A_{(p,p)}$ con la prima riga così: $(\lambda_{1,p+1}, \dots, \lambda_{1,2p})$ e le altre di zeri. Allora

$$\Lambda_1 M = \Omega_1 M' = G_1$$

contro $G_1 \notin L$. □

2. – Il Problema 2.

Sia $M = (P_{i,j}) \in A_{(p,q)}$ e si ponga

$$\mathcal{I}_i = \sum_{j=1}^{p} SP_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq q$$

TEOREMA 3. – *$A_{(p,p)}M$ sia max in $A_{(p,q)}$. Allora:*

(t_1) *se $\mathcal{I}_i$ è un ideale, $\mathcal{I}_i$ è max in A;*
(t_2) *se $\mathcal{I}_i$ è max in A, $\mathcal{I}_j = A$, $\forall j \neq i$; ed inoltre*
(t_3) *ogni $M' \in A_{(p,r)}$ estratta da M e che abbia soluzioni non nulle, genera in $A_{(p,r)}$ un sottomodulo max.*

DIMOSTRAZIONE. – (t_1): $\mathcal{I}_1 \subset A$ non sia max in A; allora esiste $R \in A \backslash \mathcal{I}_1$ tale che $\mathcal{I}_1 + AR \subset A$. Sia

$$R' = (R_{i,j}) \in A_{(p,q)} \text{ così } R_{i,j} = 0, \text{ se } (i,j) \neq (1,1), \text{ e } R_{1,1} = R;$$

allora $R' \notin A_{(p,p)}M$, altrimenti $1 \in \mathcal{I}_1$. Di qui, esiste $(\Lambda, \Omega) \in A^2_{(p,p)}$ tale che

$$\Lambda M + \Omega R' = G_1,$$

cioè

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_{1,j} P_{j,1} + \omega_{1,1} R = 1$$

($\Lambda = (\lambda_{i,j})$ e $\Omega = (\omega_{i,j})$). Assurdo.

(t_2): $\mathcal{I}_1$ sia max in A. Sia $h \geq 2$ e si ponga

$$R'_h = (R_{i,j}) \in A_{(p,q)} \text{ così } R_{i,j} = 0, \text{ se } (i,j) \neq (h,1), \text{ e } R_{h,1} = 1.$$

Visto che $\mathcal{I}_1$ è max in A, $R'_h \notin A_{(p,p)}M$, si ha

$$\Lambda M + \Omega R' = G_h$$

cioè

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_{1,j} P_{j,h} + \sum_{j=1}^{p} \omega_{1,j} R_{j,h} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{1,j} P_{j,h} = 1.$$

(t_3): la $M' \in A_{(p,r)}$ sia costituita dalle prime r colonne di M e $M'(u) = 0$ abbia qualche soluzione non nulla (e quindi $A_{(p,p)}M' \subset A_{(p,r)}$.) Se $N' \notin A_{(p,p)}M'$, la $N \in A_{(p,q)}$ ottenuta orlando la N' con $q - r$ colonne di zeri non sta in $A_{(p,p)}M$; di qui,

$$A_{(p,p)}M + A_{(p,p)}N = A_{(p,q)},$$

che dà

$$A_{(p,p)}M' + A_{(p,p)}N' = A_{(p,r)}. \qquad \square$$

Due esempi.

(α) Sia $M = (P_{i,j}) \in A_{(2,2)}$ così: $P_{1,1} = S$, $P_{1,2} = P$, $P_{2,1} = 0$ e $P_{2,2} = k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Qualunque sia P, $A_{(2,2)}M$ è max in $A_{(2,2)}$ se e solo se AS è max in A.

(β) Sia, ora, $P_{1,1} + P_{1,2} = Q$ con $P_{1,1} \cdot P_{1,2} \neq 0$. Sia $P_{2,1} = -P_{2,2} = 1$. In questo caso, $A_{(2,2)}M$ è max in $A_{(2,2)}$ se e solo se AQ è max in A. $\square$

Per il seguito, *nello studio di "$A_{(p,p)}M$ max in $A_{(p,q)}$"*, assumerò che sia $q > 1$, visto che se $M = (P_{i,1}) \in A_{(p,1)}$ si ha (facilmente)

$$A_{(p,p)}M \text{ è max in } A_{(p,1)} \text{ se e solo se } \sum_{j=1}^{p} AP_{j,1} \text{ è max in } A.$$

Inoltre, in virtù del Teorema 3, suppongo direttamente che sia

$$\sum_{i=1}^{p} a_1 P_{i,1} = 1;$$

e, in virtù del Teorema 1, che sia $M(u_1, \ldots, u_q) = 0$ per qualche $(u_1, \ldots, u_q) \in N^q\backslash\{0\}$.

Sia

$$E_\ell = \sum_{i=1}^{p} a_i P_{i,\ell}, \qquad 2 \leq \ell \leq q;$$

dalla $M(u_1, \ldots, u_q) = 0$ si ha

$$(u_1, \ldots, u_q) = (\,-(E_2 u_2 + \cdots + E_q u_q), u_2, \ldots, u_q).$$

La $M' \in A_{(p,q-1)}$ sia così definita

$$M' = \{Q_{i,2} = -P_{i,1}E_2 + P_{i,2}, \ldots, Q_{i,q} = -P_{i,1}E_q + P_{i,q}\}.$$

TEOREMA 4. – *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(p_1) *$A_{(p,p)}M$ è max in $A_{(p,q)}$;*

(p_2) *$A_{(p,p)}M'$ è max in $A_{(p,q-1)}$.*

DIMOSTRAZIONE. – (p_1) implica (p_2). Sia $R' = \{R_{1,2}, \ldots, R_{i,q}\} \in A_{(p,q-1)}$ e sia

$$R'(v_2, \ldots, v_q) = M'(v_2, \ldots, v_q) = 0, \qquad (v_2, \ldots, v_q) \neq 0$$

(si noti che la $M'(v) = 0$ ha certamente soluzioni non nulle.) Allora, la

$$R = \{0, R_{i,2}, \ldots, R_{i,q}\} \in A_{(p,q)}$$

ha in comune con la M la soluzione $(-(E_2v_2 + \cdots + E_qv_q), v_2, \ldots, v_q)$ e quindi esiste

$$\Lambda = (\lambda_{i,j}) \in A_{(p,p)} \text{ tale che } \Lambda M = R.$$

La $\Lambda M = R$ esplicitata si scrive così

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{1,j} P_{j,1} = 0 \\ \sum_{j=1}^{p} \lambda_{1,j} P_{j,h} = R_{1,h}, \quad 2 \le h \le q \end{cases}$$

$$\cdots$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{p,j} P_{j,1} = 0 \\ \sum_{j=1}^{p} \lambda_{p,j} P_{j,h} = R_{p,h}, \quad 2 \le h \le p; \end{cases}$$

la “seconda” del primo sistema ($h = 2$) si può scrivere così

$$\lambda_{1,1}Q_{1,2} + \lambda_{1,1}P_{1,2}E_2 + \cdots + \lambda_{1,p}Q_{p,2} + \lambda_{1,p}P_{p,1}E_2 = R_{1,2},$$

che in base alla “prima” diventa

$$\lambda_{1,1}Q_{1,,2} + \cdots + \lambda_{1,p}Q_{p,2} = R_{1,2}.$$

Così procedendo si ottiene

$$\Lambda M' = R'.$$

In virtù del Teorema 2, $A_{(p,p)}M'$ è max in $A_{(p,q-1)}$.

(p_2) implica (p_1). La dimostrazione ha, nel caso generale, scrittura esplicita piuttosto pesante. Perciò in questa prova mi limiterò al caso

$$M = (P_{i,1}, P_{i,2}, P_{i,3}) \in A_{(2,3)}.$$

Con le notazioni di sopra, risulta che la $Q = (Q_{i,j}) \in A_{(2,2)}$ è così:

$$Q_{1,2} = -P_{1,1}E_2 + P_{1,2}, \qquad Q_{1,3} = -P_{1,1}E_3 + P_{1,3}$$

$$Q_{2,2} = -P_{2,1}E_2 + P_{2,2}, \qquad Q_{2,3} = -P_{2,1}E_3 + P_{2,3}.$$

Ora, la $T = (T_{i,k}) \in A_{(2,3)}$ abbia in comune con la M la soluzione

$$(-(E_2u_2 + E_3u_3), u_2, u_3).$$

Per concludere, si deve dimostrare che $T \in A_{(2,2)}M$.

Intanto, visto che

$$\begin{cases} -T_{1,1}(E_2u_2+E_3u_3)+T_{1,2}u_2+T_{1,3}u_3=0 \\ -T_{2,1}(E_2u_2+E_3u_3)+T_{2,2}u_2+T_{2,3}u_3=0, \end{cases}$$

la $T' \in A_{(2,2)}$ così definita

$$\begin{aligned} T'_{1,2} &= -T_{1,1}E_2+T_{1,2} \qquad & T'_{1,3} &= -T_{1,1}E_3+T_{1,3} \\ T'_{2,2} &= -T_{2,1}E_2+T_{2,2} \qquad & T'_{2,3} &= -T_{2,1}E_3+T_{2,3} \end{aligned}$$

ha in comune con la M' la soluzione (u_2, u_3). Per l'ipotesi, esiste $\Lambda = (\lambda_{i,j}) \in A_{(2,2)}$ tale che

$$\Lambda M' = T',$$

cioè, in forma esplicita

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1}Q_{1,2}+\lambda_{1,2}Q_{2,2} &= T'_{1,2} \qquad & \lambda_{1,1}Q_{1,3}+\lambda_{1,2}Q_{2,3} &= T'_{1,3} \\ \lambda_{2,1}Q_{1,2}+\lambda_{2,2}Q_{2,2} &= T'_{2,2} \qquad & \lambda_{2,1}Q_{1,3}+\lambda_{2,2}Q_{2,3} &= T'_{2,3}. \end{aligned}$$

Di qui, per provare che esiste $\Omega = (\omega_{i,j}) \in A_{(2,2)}$ tale che

$$\Omega M = T$$

(e basta limitarsi a provare la $\Omega M = T$ relativamente agli elementi della prima riga di T), bisogna dimostrare che è risolubile, nelle incognite $(\omega_{1,1}, \omega_{1,2})$, il sistema

$$\begin{cases} \omega_{1,1}P_{1,1}+\omega_{1,2}P_{2,1}=T_{1,1} \\ \omega_{1,1}P_{1,2}+\omega_{1,2}P_{2,2}=T_{1,1}E_2+T'_{1,2}=T_{1,1}E_2+\lambda_{1,1}Q_{1,2}+\lambda_{1,2}Q_{2,2} \\ \omega_{1,1}P_{1,3}+\omega_{1,2}P_{2,3}=T_{1,1}E_3+T'_{1,3}=T_{1,1}E_3+\lambda_{1,1}Q_{1,3}+\lambda_{1,2}Q_{2,2}. \end{cases}$$

Di nuovo, se ben si esplicita il secondo membro della seconda equazione di sopra, si ricava che essa è soddisfatta per le $\omega_{1,1}$ e $\omega_{1,2}$ così:

$$\omega_{1,1} = (T_{1,1}a_1 - (\lambda_{1,1}+\lambda_{1,2})P_{1,1}a_1 + \lambda_{1,1})$$

e

$$\omega_{1,2} = (T_{1,1}a_2 - (\lambda_{1,1}+\lambda_{1,2})P_{1,1}a_2 + \lambda_{2,2});$$

tale $\omega_{1,1}$ e $\omega_{1,2}$ soddisfano anche la prima e la terza equazione. $\square$

OSSERVAZIONE. – Per quanto esemplificata, l'ultima dimostrazione è paradigmatica per quella "generale"; ripeto, c'è solo differenza di più lunghe scritture.

OSSERVAZIONI. – *A proposito del teorema* 1: ne segue subito che se $M \in A_{(1,q)}$, $q > 1$, $M(u) = 0$ ha soluzioni non nulle. Ora, se $M \in A_{(p,q)}$, $p < q$, il fatto che sia

$$\Lambda M = \text{ Id di } A_{(q,q)}, \qquad \Lambda \in A_{(q,p)},$$

esige la risolubilità, in A, d'un sistema di q^2 equazioni in $q \cdot p$ ($< q^2$) incognite (e pur che sia un sistema lineare, "incognite e coefficienti non commutano"!)

Dunque, *sarà ancora vero che: se* $M \in A_{(p,q)}$, $p < q$, $M(u)$ *ha soluzioni non nulle*?

A proposito del teorema 4: è facile costruire esempi di M "quadrate", i.e.: $M \in A_{(p,p)}$, tali che $A_{(p,p)}M$ sia max in $A_{(p,p)}$; e di qui, in virtù del Teorema 4, è facile esibire esempi di $M \in A_{(p,q)}$, $q < p$, che generino sottomoduli di $A_{(p,q)}$ max. *Ci sono* $M \in A_{(p,q)}$, $p < q$, *tali che* $A_{(p,p)}M$ *sia max in* $A_{(p,q)}$?

BIBLIOGRAFIA

[1] J. BERNSTEIN - V. LUNTS, *On non-holonomic irreducible D-modules*, Inv. Math., **94** (1988), 223-243.

[2] J. T. STAFFORD, *Non-holonomic Modules over Weyl algebras and enveloping algebras*, Inv. Math., **79** (1985), 619-638.

Dip. di Mat. Pura ed Applicata, Via Belzoni 7, 35131 Padova, Italy

Pervenuta in Redazione
il 4 marzo 2005