
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MICHELE SCIACCA, MARIA STELLA MONGIOVÌ,
DAVID JOU

Onde di calore e onde di densità di vortici nella turbolenza superfluida

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. 1
(2008), n.3, p. 819–838.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2008_9_1_3_819_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2008_9_1_3_819_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Onde di calore e onde di densità di vortici nella turbolenza superfluida (*)

MICHELE SCIACCA - MARIA STELLA MONGIOVÌ - DAVID JOU

Abstract. – *The main topic of this paper is the interaction between vortex density waves and high-frequency second sound in counterflow superfluid turbulence. To this end a thermodynamical model including vortex flux as independent variable is considered. This choice is crucial for the study of the transition of the behavior of the vortex-density perturbations from diffusive to propagative, which is necessary to interpret the details of the high-frequency second sound waves.*

1. – Introduzione.

Il crescente interesse degli ultimi anni nei confronti della turbolenza superfluida, inizialmente motivato dal bisogno di trovare nuove idee per risolvere problemi relativi alla turbolenza classica, ha stimolato molti ricercatori a studiare il particolare comportamento osservato nei superfluidi, sia dal punto di vista teorico che da quello sperimentale. Tra i vari superfluidi, l'elio II ha suscitato maggiore interesse sia perché è la seconda sostanza più comune nell'Universo sia perché diventa superfluido a temperature relativamente meno basse rispetto ad altre sostanze (sotto i 2 Kelvin). Da un punto di vista applicativo, l'elio superfluido è utilizzato come refrigerante nei superconduttori, inoltre lo studio del flusso turbolento di superfluidi in sottili capillari, in presenza di scambio di calore con l'ambiente circostante è di interesse nella refrigerazione di piccoli circuiti elettronici nei supercomputer.

Varie caratteristiche distinguono l'elio II da un comune fluido classico; un esempio è la propagazione del secondo suono, un'onda in cui vibrano la temperatura e l'entropia mentre la densità e la pressione rimangono essenzialmente costanti. Le misure della velocità e dell'attenuazione di quest'onda negli esperimenti di turbolenza superfluida forniscono informazioni sul tipo di turbolenza presente [1]-[3].

Un secondo esempio di comportamento non classico è il trasporto di calore

(*) Comunicazione tenuta a Bari il 26 settembre 2007 in occasione del XVIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

negli esperimenti di controflusso. In un canale (vedi Fig. 1) chiuso ad una estremità con un riscaldatore, e collegato con un recipiente di elio all'altra estremità, in modo da stabilire un flusso di calore, si osserva un differente comportamento a seconda del fluido utilizzato. In particolare, utilizzando un fluido normale (come ad esempio l'elio I), si nota un gradiente di temperatura all'interno del canale, che indica la presenza di una conduttività termica finita. Se, invece, si utilizza l'elio II, ed il flusso di calore all'interno del canale non è troppo elevato, si nota che il gradiente di temperatura è quasi nullo, indicando con ciò che l'elio II presenta un conduttività termica estremamente alta, circa tre milioni di volte quella dell'elio I a riprova del fatto che l'elio II non bolle.

Il più noto modello idrodinamico dell'elio superfluido è il modello bi-fluido di Tisza [4] e Landau [5], che considera l'elio II come una miscela di due componenti, il fluido normale ed il superfluido, con densità ρ_n e ρ_s , rispettivamente, e velocità \mathbf{v}_n e \mathbf{v}_s rispettivamente, con densità totale di massa ρ e velocità complessiva \mathbf{v} definite da $\rho = \rho_s + \rho_n$ e $\rho\mathbf{v} = \rho_s\mathbf{v}_s + \rho_n\mathbf{v}_n$. Il primo componente consiste di stati termicamente eccitati e forma un fluido viscoso, che trasporta l'intera entropia contenuta nel fluido. Il secondo componente si riferisce agli stati quantici ed è un fluido ideale non dissipativo, che non porta entropia [1, 8]. Gli esperimenti di controflusso termico possono essere spiegati utilizzando il modello bi-fluido (vedi Fig. 1): in assenza di flusso di massa ($\rho_n\mathbf{v}_n + \rho_s\mathbf{v}_s = 0$), il calore viene trasportato verso il recipiente di elio II dal solo fluido normale, e risulta $\mathbf{q} = \rho s T \mathbf{v}_n$, con s l'entropia per unità di massa e T la temperatura. Poiché il flusso complessivo di massa è nullo, c'è un movimento del superfluido verso il riscaldatore ($\mathbf{v}_s = -\rho_n\mathbf{v}_n/\rho_s$), cioè un controflusso interno dato da $\mathbf{V} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s = \mathbf{q}/(\rho_s s T)$, proporzionale al flusso di calore applicato \mathbf{q} .

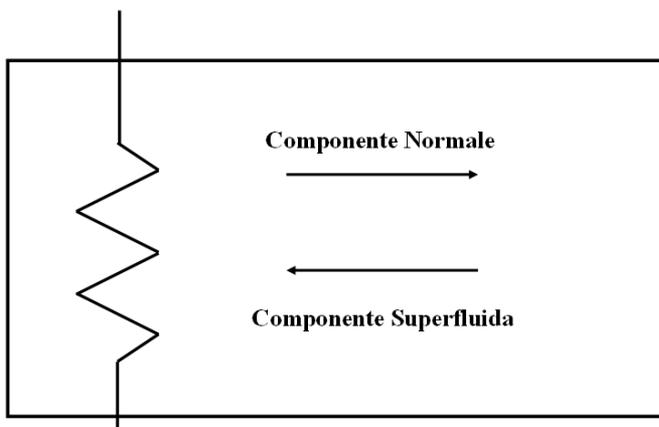


Fig. 1. – Nel grafico sono rappresentate le due velocità (normale e superfluida) in un esperimento di controflusso termico.

Negli esperimenti di controflusso, in cui si ha solo trasporto di calore e non trasporto di materia, nell'ipotesi che il flusso di calore superi un valore critico q_c , si osserva un'attenuazione del secondo suono proporzionale al quadrato del flusso di calore. Tale attenuazione è dovuta alla *forza di mutua frizione*, causata dall'interazione tra il flusso di "excitations" (fluido normale) ed i filamenti di vortici quantizzati nell'elio II [1, 8]. Un primo studio termodinamico di questo interessante fenomeno è stato affrontato in Ref. 7, dove la presenza di vortici è stata modellata mediante un tensore di pressione \mathbf{P}_ω , per il quale è stata proposta una relazione costitutiva.

La turbolenza quantica è descritta mediante un groviglio caotico di vortici quantizzati di uguale circuitazione

$$(1.1) \quad \vec{\kappa} = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l}$$

dove $\kappa = |\vec{\kappa}|$ è chiamato quanto di vorticità ed è $\kappa = h/m_4$, con h la costante di Planck, e m_4 la massa dell'atomo ${}^4\text{He}$: $\kappa \simeq 9.97 \cdot 10^{-4} \text{cm}^2/\text{s}$. Nell'ipotesi in cui il groviglio di vortici sia isotropo, esso può essere descritto mediante una quantità scalare L , che rappresenta la lunghezza media delle linee di vortici per unità di volume (brevemente chiamata *densità di linea di vortice*). Per tale quantità, nella turbolenza superfluida dovuta al controflusso termico, trascurando l'influenza delle pareti, Vinen propose la seguente equazione di evoluzione [8]

$$(1.2) \quad \frac{dL}{dt} = \sigma_L = AqL^{3/2} - B\kappa L^2,$$

dove q è il modulo del flusso di calore e A e B sono parametri dipendenti dalla temperatura a cui viene effettuato l'esperimento. L'equazione (1.2) presuppone che la turbolenza sia omogenea, cioè che il valore di L sia uniforme in tutto il sistema. Tale omogeneità si verifica quando la distanza media tra i filamenti di vortice, dell'ordine di $L^{-1/2}$, è molto più piccola delle dimensioni caratteristiche del sistema; tale ipotesi non sarà più verificata nel momento in cui sono presenti nel superfluido grovigli di vortici diluiti.

Recenti esperimenti [9, 10] hanno mostrato la formazione di un nuovo tipo di turbolenza superfluida, che ha delle analogie con quella classica, ottenuta usando per esempio griglie oscillanti, o mescolando opportunamente l'elio liquido. In questa situazione, chiamata *co-flusso*, entrambi i componenti, normale e superfluido, fluiscono lungo la stessa direzione. Per descrivere questi esperimenti è necessario sviluppare un modello idrodinamico di turbolenza quantistica, in cui sia possibile studiare le interazioni tra i due campi, tenendo esplicitamente in considerazione il ruolo della non omogeneità dei vortici all'interno dell'elio.

Nel costruire un modello idrodinamico di turbolenza superfluida, bisogna però tener conto delle proprietà di campo della densità di linea L : infatti, essa

dipende dalle coordinate, ha una velocità di moto v_L , ed ha associato un flusso di diffusione. Il suo inserimento in un modello idrodinamico come campo indipendente, supportato dalla maggiore precisione nelle misurazioni della densità delle linee di vortice, permette di poter simulare e osservare il moto relativo dei vortici. Pertanto, diventa importante descrivere situazioni che vanno oltre la semplice descrizione della densità delle linee di vortice mediata su un volume. Il nostro scopo in questo articolo è di formulare un modello idrodinamico sufficientemente generale che includa la diffusione di vortici e descriva le interazioni tra il secondo suono ed i vortici, invece di considerare gli ultimi come una struttura rigida dove le onde di temperatura vengono dissipate. Tutto ciò è importante perché il secondo suono rappresenta il metodo standard per misurare la densità delle linee di vortice L , per cui lo studio dell'interazione reciproca tra secondo suono e linee di vortice può cambiare l'interpretazione dei risultati noti in letteratura.

La presenza di un flusso di calore nell'elio II provoca la formazione di vortici quantizzati che si muovono all'interno del superfluido fino al raggiungimento di una situazione stazionaria, come confermato dagli studi effettuati mediante il secondo suono [1]-[3]. Di contro, tali onde interagiscono con le linee di vortice, provocando non solo una modifica della loro velocità ed una loro attenuazione, ma anche una modifica del profilo e del movimento delle linee di vortice. Poiché l'evoluzione delle linee di vortice è investigata mediante le onde di secondo suono, diventa necessario analizzare accuratamente la loro reciproca interazione. In particolare, le onde del secondo suono ad alta frequenza sono di grande interesse per sondare il groviglio a piccole scale di lunghezza, al fine di esplorare, per esempio, le proprietà statistiche delle singole linee di vortice chiuse (loop) di varie dimensioni. Tale riduzione della scala di lunghezza è una delle frontiere attive nelle tecniche del secondo suono applicate alla turbolenza, anche se, ad alte-frequenze, la risposta del groviglio all'onda del secondo suono è qualitativamente differente rispetto a quella a basse frequenze, mostrando un comportamento diffusivo a basse frequenze e propagativo ad alte frequenze [11]-[12].

2. – Il modello precedente e la necessità di completarlo.

Negli esperimenti di controflusso generalmente si assume che il groviglio di vortici sia omogeneo e che l'equazione (1.2) sia l'equazione di evoluzione per la densità di linee di vortice L [1]-[3], [8]. Quando, però, la densità delle linee di vortice non è omogenea, tale equazione deve essere generalizzata incorporando termini non locali. In [11], è stato proposto un modello termodinamico per i campi ε , \mathbf{q} e L , con ε densità totale di energia, utilizzando il metodo di Liu [13, 14] per determinare le restrizioni imposte dalla seconda legge della termodinamica. Tali

equazioni sono [11]

$$(2.1) \quad \begin{cases} \rho \dot{\epsilon} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \\ \dot{\mathbf{q}} + \zeta_0 \nabla T + \chi_0 \nabla L = -KL\mathbf{q}, \\ \dot{L} + \nabla \cdot (v_0 \mathbf{q}) = \sigma_L, \end{cases}$$

dove il coefficiente K è legato al coefficiente di attrito di Hall-Vinen B_{HV} dalla relazione $K = \frac{1}{3} \kappa B_{HV}$, v_0 e χ_0 sono opportuni coefficienti legati sia alla diffusione dei vortici che alla loro propagazione e ζ_0 è il rapporto tra la conducibilità di calore del fluido ed il tempo di rilassamento del flusso di calore dato da $(KL)^{-1}$.

Per valori nulli di χ_0 e v_0 , le prime due equazioni descrivono le onde di temperatura (secondo suono) con velocità $V_2^2 = \frac{\zeta_0}{\rho c_V}$, con c_V calore specifico per unità di massa a volume costante, mentre la terza equazione si riduce all'equazione di Vinen (1.2). Nello stato stazionario, la seconda equazione si riduce a

$$(2.2) \quad \mathbf{q} = -\frac{\zeta_0}{KL} \nabla T - \frac{\chi_0}{KL} \nabla L.$$

Il coefficiente del primo termine è la conducibilità termica, mentre il secondo termine descrive un accoppiamento tra la densità delle linee di vortice ed il flusso di calore, analogo in qualche modo all'accoppiamento tra il gradiente di concentrazione e il flusso di calore nei fluidi classici (effetto Soret). Il termine in ∇L può essere legato alla densità di energia interna del groviglio, dato da $\varepsilon_V L$, con $\varepsilon_V = (\rho_s \kappa^2 / 4\pi) \ln(c/a_0 L^{1/2})$, l'energia per unità di lunghezza dei vortici. Più precisamente, tale termine può essere legato al contributo del groviglio alla pressione totale [15]. Dato che stiamo considerando onde ad alta frequenza e piccola lunghezza d'onda, il contributo di ∇L sarà rilevante per i nostri studi, in contrasto con le usuali situazioni a grandi lunghezze d'onda.

Dal sistema (2.1) si nota che nell'approssimazione lineare, se si trascura $\dot{\mathbf{q}}$ ed il sistema è isoterma, da (2.1b) e (2.1c) si ottiene un'equazione di reazione-diffusione per L della forma

$$(2.3) \quad \dot{L} = D \nabla^2 L + \sigma_L \quad \text{con} \quad D = \frac{v_0 \chi_0}{KL_0},$$

dove D è il coefficiente di diffusione.

Se, invece, non si trascura $\dot{\mathbf{q}}$ in (2.1b), ma si suppone, in una prima approssimazione, il fluido a temperatura costante, si ottiene

$$(2.4) \quad \ddot{L} + KL_0 \dot{L} = v_0 \chi_0 \nabla^2 L + KL_0 \sigma_L + \dot{\sigma}_L.$$

Ad alte frequenze, cioè per $\omega \gg KL_0$ e $\omega \gg 2BL_0 - \frac{3}{2} AqL_0^{1/2}$, intendendo frequenze molto più alte dell'inverso del tempo caratteristico di distruzione e formazione dei vortici, l'equazione (2.4) diventa

$$(2.5) \quad \ddot{L} \approx v_0 \chi_0 \nabla^2 L,$$

cioè un'onda di densità di vortici (detta in breve *onda di vortici*) con velocità

$$(2.6) \quad v_{\infty}^2 = v_0 \chi_0.$$

Questo sottolinea il significato fisico dei coefficienti $v_0 \chi_0$, in quanto il loro prodotto è legato sia al coefficiente di diffusione che alla velocità delle onde di vortice.

Sino ad ora abbiamo considerato una situazione isoterma. Dal sistema (2.1), si osserva che il comportamento di \mathbf{q} ed L in condizioni non-isoterme è legato al comportamento del campo T , per cui diventa necessario uno studio completo di tale sistema [11, 12].

Inoltre, va evidenziato che la velocità \mathbf{v}_L con cui si muove il groviglio di vortici non è propriamente parallela alla velocità di controflusso, per cui il modello sopra descritto risulta essere incompleto. Infatti, usando il modello dei filamenti di vortici proposto da Schwarz in [16]-[18], che descrive le linee di vortice mediante una funzione vettoriale $\mathbf{s}(\zeta, t)$, dove ζ è l'ascissa curvilinea misurata lungo il vortice, la velocità dell'elemento di vortice è [1]-[3]

$$(2.7) \quad \mathbf{v}_L = \mathbf{v}_{sl} + a\mathbf{s}' \times (\mathbf{V} - \mathbf{v}_i) - a'\mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{V} - \mathbf{v}_i)],$$

dove a e a' sono coefficienti di attrito tra il fluido normale e la linea di vortice dipendenti dalla temperatura, \mathbf{s}' è il versore tangente alla linea di vortice, e $\mathbf{v}_{sl} = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_i$ la "velocità superfluida locale", somma della velocità superfluida sufficientemente distante da qualunque linea di vortice e della "velocità autoindotta", dovuta alla presenza degli altri vortici e delle altre parti dello stesso vortice. In (2.7) l'apice indica la derivata rispetto alla variabile ζ , cioè $s' \equiv \partial s / \partial \zeta$. Nell'approssimazione di induzione locale (local induction approximation), la velocità autoindotta \mathbf{v}_i è approssimata da [1]-[3]

$$(2.8) \quad \mathbf{v}_i^{(loc)} = \tilde{\beta}[\mathbf{s}' \times \mathbf{s}'']_{s=s_0}, \quad \text{with} \quad \tilde{\beta} = \frac{\kappa}{4\pi} \ln \left(\frac{c}{a_0 L^{1/2}} \right),$$

con c costante dell'ordine dell'unità, κ il quanto di vorticità, a_0 la dimensione del nucleo del vortice e $\mathbf{s}'' = \partial^2 s / \partial \zeta^2$ la curvatura. Il modulo di \mathbf{v}_i è $|\mathbf{v}_i| = \tilde{\beta} / R$, con R il raggio di curvatura della linea di vortice. Il coefficiente $\tilde{\beta}$ è collegato all'energia interna per unità di lunghezza della linea di vortice (la tensione della linea di vortice) dalla relazione $\varepsilon_V = \rho_s \kappa \tilde{\beta}$.

Usando l'approssimazione di induzione locale, l'equazione (2.7) può essere scritta come

$$(2.9) \quad \mathbf{v}_L = (1 - a')\tilde{\beta}\mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + a\tilde{\beta}\mathbf{s}'' + \mathbf{v}_s + a\mathbf{s}' \times \mathbf{V} - a'\mathbf{s}' \times (\mathbf{s}' \times \mathbf{V}).$$

Si consideri adesso una porzione mesoscopica di superfluido turbolento, contenuta in un piccolo volume \mathcal{A} , con all'interno un piccolo groviglio di vortici. Integrando la velocità del vortice \mathbf{v}_L sul volume \mathcal{A} , tenendo conto che nel con-

troflusso termico, cioè per $\rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s = 0$, si ha $\mathbf{v}_s = -(\rho_n/\rho)\mathbf{V}$, e supponendo che nel volume \mathcal{A} la velocità di controflusso sia costante, si ottiene

$$(2.10) \quad \mathbf{v}_{tan} = \langle \mathbf{v}_L \rangle = (1 - a')\tilde{\beta} \langle \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \rangle + a\tilde{\beta} \langle \mathbf{s}'' \rangle$$

$$- \frac{\rho_n}{\rho} \mathbf{V} + a \langle \mathbf{s}' \rangle \times \mathbf{V} + a' \langle \mathbf{U} - \mathbf{s}' \mathbf{s}' \rangle \cdot \mathbf{V},$$

dove con $\langle \cdot \rangle$ si è indicato il valor medio della velocità \mathbf{v}_L nel volume \mathcal{A} .

Supponendo che in \mathcal{A} il groviglio di vortici sia omogeneo, e che \mathcal{A} sia sufficientemente lontano dalle pareti del contenitore, in modo da non esserci vortici impigliati alle pareti, i cosiddetti "pinned vortices", si può assumere che $\langle \mathbf{s}' \rangle = 0$ e $\langle \mathbf{s}'' \rangle = 0$, ottenendo così

$$(2.11) \quad \mathbf{v}_{tan} = \langle \mathbf{v}_L \rangle = -\frac{\rho_n}{\rho} \mathbf{V} + \frac{2}{3} a' \Pi^s \cdot \mathbf{V} + (1 - a')\tilde{\beta} \mathbf{I} c_1,$$

dove il tensore $\Pi^s = \frac{3}{2} \langle \mathbf{U} - \mathbf{s}' \mathbf{s}' \rangle$ è stato studiato in [19], mentre il vettore $\mathbf{I} = \frac{\langle \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \rangle}{\langle |\mathbf{s}''| \rangle}$ e lo scalare $c_1 = \frac{\langle |\mathbf{s}''| \rangle}{AL^{3/2}}$ sono stati introdotti da Schwarz [18] in un approccio microscopico alla dinamica del groviglio di vortici. Dall'equazione (2.11) si può notare che $\mathbf{v}_{tan} \parallel \mathbf{V}$ solo quando $\Pi^s = \mathbf{U}$, cioè quando la distribuzione di \mathbf{s}' nel groviglio è isotropa, ed il vettore anisotropia \mathbf{I} è parallelo alla velocità di controflusso \mathbf{V} . Tuttavia, esperimenti e simulazioni numeriche mostrano che queste ipotesi sono verificate solo approssimativamente.

Nell'ipotesi di isotropia del groviglio ($\Pi^s = \mathbf{U}$), l'assunzione $\mathbf{v}_{tan} = 0$ implica $\mathbf{I} \parallel \mathbf{V}$. Ma, in generale, si potrebbe avere $\mathbf{v}_{tan} \neq 0$ e \mathbf{I} non parallelo a \mathbf{V} il che vuole dire $\mathbf{v}_{tan} = A\mathbf{V} + B\mathbf{I}$, con A e B coefficienti appropriati deducibili dalla relazione (2.11). Perciò, l'ipotesi \mathbf{v}_{tan} parallelo a \mathbf{V} non è propriamente in accordo con i risultati microscopici del modello filamentoso di vortice. Per tale ragione, si è proposto un modello di turbolenza superfluida non omogenea in situazioni di controflusso [15], in cui il flusso delle linee di vortice, che è parallelo a \mathbf{v}_{tan} , è considerata come un'ulteriore variabile indipendente.

3. – Modello Termodinamico.

Allo scopo di trattare le interazioni fra il secondo suono e la dinamica del groviglio di vortici in maniera più generale, si è pensato di costruire un modello termodinamico per lo studio della turbolenza superfluida non omogenea in situazioni di controflusso, che abbia come campi fondamentali la densità di energia E , il flusso di calore \mathbf{q} , la lunghezza delle linee di vortice mediata su una unità di volume L , ed il flusso di vortici \mathbf{J} [15]. In tale modello, poiché gli esperimenti sulla turbolenza superfluida di controflusso in regime

lineare sono caratterizzati da un valore nullo della velocità complessiva del fluido \mathbf{v} ed un valore costante della densità ρ , i campi \mathbf{v} e ρ non sono stati considerati come variabili indipendenti. In questa sezione verrà richiamato brevemente il modello termodinamico proposto in Ref. [15]. Si consideri il seguente sistema di equazioni di bilancio

$$(3.1) \quad \begin{cases} \partial_t E + \partial_k q_k = 0 \\ \partial_t q_i + \partial_k J_{ik}^q = \sigma_i^q \\ \partial_t L + \partial_k J_k = \sigma_L \\ \partial_t J_i + \partial_k F_{ik} = \sigma_i^J \end{cases}$$

dove ∂_t sta per $\partial/\partial t$ e ∂_k per $\partial/\partial x_k$, E è l'energia per unità di volume delle due componenti fluide che costituiscono l'elio II e delle linee di vortice, J_{ij}^q il flusso del flusso di calore, J_i il flusso delle linee di vortice, e F_{ij} il flusso del flusso delle linee di vortice; σ_i^q , σ_L e σ_i^J sono i rispettivi termini di produzione. Nel modello proposto si è scelto il flusso di calore \mathbf{q} come variabile indipendente anziché il controflusso \mathbf{V} , legato a \mathbf{q} dalla relazione $\mathbf{q} = \rho_s T_s \mathbf{V}$, perché \mathbf{q} è la variabile macroscopica che compare nell'equazione di bilancio dell'energia, e che inoltre può essere controllata negli esperimenti. Osserviamo che nel sistema (3.1) i termini convettivi sono stati trascurati poiché si è interessati a studiare la propagazione lineare del secondo suono e delle onde di vortici.

Nelle ipotesi di fluido isotropo, le equazioni costitutive per i flussi J_{ij}^q e F_{ij} , al primo ordine in q_i e J_i , assumono la seguente espressione

$$(3.2) \quad \begin{aligned} J_{ik}^q &= \beta(E, L) \delta_{ik}, \\ F_{ik} &= \psi(E, L) \delta_{ik}, \end{aligned}$$

dove $\beta(E, L)$ e $\psi(E, L)$ sono due funzioni regolari e generiche nei soli campi scalari E e L . In [15], applicando il metodo di Liu [13, 14] per dedurre le conseguenze della seconda legge della Termodinamica, sono state ottenute delle restrizioni sui coefficienti della (3.2). Tale procedimento assume l'esistenza di una funzione scalare S (l'entropia per unità di volume) e di una funzione vettoriale J_k^S (il flusso di entropia per unità di volume) dei campi fondamentali, tale che la disuguaglianza

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \partial_t S + \partial_k J_k^S - A^S [\partial_t E + \partial_k q_k] - A_i^q [\partial_t q_i + \partial_k J_{ik}^q - \sigma_i^q] \\ - A^L [\partial_t L + \partial_k J_k - \sigma_L] - A_i^J [\partial_t J_i + \partial_k F_{ik} - \sigma_i^J] \geq 0, \end{aligned}$$

sia verificata qualunque siano i campi E , q_i , L e J_i . In tale espressione S e J_k^S sono funzioni oggettive dei campi fondamentali, mentre le quantità A sono i moltiplicatori di Lagrange, anch'essi funzioni oggettive dei campi fondamentali.

In [15], trascurando i termini di secondo ordine in \mathbf{q} e in \mathbf{J} , è stato ottenuta la seguente espressione per la densità di entropia

$$(3.4) \quad dS = \frac{1}{T}dE - \frac{\mu^L}{T}dL + \lambda_{11}q_i dq_i + \lambda_{22}J_i dJ_i + \lambda_{12}(J_i dq_i + q_i dJ_i).$$

dove $\lambda_{mn}(E, L)$ sono coefficienti legati ai moltiplicatori di Lagrange A_i^q e A_i^J dalle relazioni $A_i^q = \lambda_{11}q_i + \lambda_{12}J_i$ e $A_i^J = \lambda_{21}q_i + \lambda_{22}J_i$, con $\lambda_{21} = \lambda_{12}$. Il flusso di entropia, invece, assume la seguente espressione

$$(3.5) \quad J_k^s = \frac{1}{T}q_k - \frac{\mu_0^L}{T}J_k,$$

che è simile all'usuale espressione del flusso di entropia in presenza di flusso di massa e flusso di calore, ma con il secondo termine collegato al trasporto di vortici piuttosto che al trasporto di massa: infatti con μ_0^L è stato indicato il potenziale chimico dei vortici [11].

Sostituendo le relazioni costitutive ottenute con il metodo di Liu, il sistema (3.1) assume la seguente forma

$$(3.6) \quad \begin{cases} \partial_t E + \partial_j q_j = 0 \\ \partial_t q_i + \xi \partial_i T + \chi \partial_i L = \sigma_i^q \\ \partial_t L + \partial_j J_j = \sigma^L \\ \partial_t J_i + \eta \partial_i T + \nu \partial_i L = \sigma_i^J, \end{cases}$$

dove i coefficienti ξ , η , χ e ν sono definiti dalle seguenti espressioni

$$(3.7) \quad \frac{\partial \beta}{\partial T} = \xi, \quad \frac{\partial \beta}{\partial L} = \chi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} = \eta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial L} = \nu,$$

o equivalentemente da

$$(3.8) \quad \lambda_{11}\chi + \lambda_{21}\nu = 0, \quad \lambda_{11}\xi + \lambda_{21}\eta = -\frac{1}{T^2},$$

$$(3.9) \quad \lambda_{12}\xi + \lambda_{22}\eta = \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{\mu_0^L}{T} \right), \quad \lambda_{12}\chi + \lambda_{22}\nu = \frac{\partial}{\partial L} \left(-\frac{\mu_0^L}{T} \right).$$

I coefficienti γ e η legano le dinamiche di \mathbf{q} e \mathbf{J} con quelle di L e T , e quindi, come si vedrà, stabiliscono un'interazione tra le onde di calore e le onde di densità di vortice.

Per il termine di produzione σ_i^q , poiché si stanno considerando situazioni di solo controflusso, si è scelta la seguente espressione, alquanto semplice e già nota in letteratura [7, 20],

$$(3.10) \quad \vec{\sigma}^q = -\frac{1}{3}\kappa B_{HV} L \Pi^s \cdot \mathbf{q},$$

dove $B_{HV} = \frac{2\rho}{\rho_n} a$ è il coefficiente di Hall-Vinen [1] e $\Pi^s = \frac{3}{2} \langle \mathbf{U} - \mathbf{s}'\mathbf{s}' \rangle$ è un tensore simmetrico che, nelle ipotesi di isotropia nel piano yz , assume la seguente espressione [19, 21]

$$(3.11) \quad \Pi^s = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix},$$

dove $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$ è il parametro che caratterizza l'anisotropia del groviglio di vortici in quanto $\langle s_y^2 \rangle = \langle s_z^2 \rangle = a$ e $\langle s_x^2 \rangle = 1 - 2a$. Se il groviglio di vortici è totalmente anisotropo, come nel caso della distribuzione regolare di vortici prodotta dalla rotazione (linee uniformemente distribuite, parallele alla velocità angolare del contenitore), allora $a = 0$, mentre se è completamente isotropo $a = \frac{1}{3}$. Tale termine di produzione $\bar{\sigma}^q$, quando \mathbf{q} è ortogonale alle linee di vortice, descrive la forza di attrito, mentre si annulla quando \mathbf{q} è parallelo alle linee di vortice. In tale termine di produzione si potrebbe aggiungere un ulteriore termine dissipativo, proporzionale al vettore binormale \mathbf{I} introdotto in (2.11) (si veda l'Appendice di Ref. [11]), ma il suo contributo in questo caso è piccolo confrontato con l'altro termine nella (3.10), per cui è stato trascurato.

Per il termine di produzione σ^L , si scelgono i termini di produzione e distruzione di vortici che compaiono nell'equazione di Vinen (1.2)

$$(3.12) \quad \sigma^L = -BL^2 + AqL^{3/2}.$$

Per il termine di produzione della diffusione delle linee di vortice, si assume la seguente relazione di rilassamento (si veda l'equazione (2.7) in [15])

$$(3.13) \quad \bar{\sigma}^J = -\gamma_1 \kappa L \mathbf{J} = -\frac{\mathbf{J}}{\tau_J},$$

dove il coefficiente positivo γ_1 può dipendere dalla temperatura T ; con questa espressione in situazioni isotermitiche si avrebbe un coefficiente di diffusione dato da $D = \tau_J \nu = -\frac{\tau_J}{T \lambda_{22}} \frac{\partial \mu^L}{\partial L}$. Si noti che i termini di produzione (3.10) e (3.13), che in questo caso dipendono solo da \mathbf{q} e \mathbf{J} rispettivamente, possono dipendere più in generale da entrambi i campi.

4. – Interazione tra il secondo suono e le onde di densità di vortici.

Per una migliore comprensione del significato fisico dei coefficienti contenuti nelle equazioni (3.6)-(3.13) si rimanda il lettore alla visione dell'articolo [15].

In questa sezione si affronta lo studio della propagazione ondosa nei grovigli di vortice in situazioni di controflusso, con lo scopo di studiare gli effetti fisici dell'interazione, ad alta frequenza, tra le onde di secondo suono e quelle di densità di

vortici. Esprimendo l'energia E in termini di T e L , il sistema (3.6) diventa

$$(4.1) \quad \begin{cases} \rho c_V \partial_t T + \rho \varepsilon_L \partial_t L + \partial_j q_j = 0, \\ \partial_t q_i + \xi \partial_i T + \chi \partial_i L = \sigma_i^q, \\ \partial_t L + \partial_j J_j = \sigma^L, \\ \partial_t J_i + \eta \partial_i T + \nu \partial_i L = \sigma^{J_i}, \end{cases}$$

dove $c_V = \partial_T E$ è il calore specifico a volume costante e $\varepsilon_L = \partial_L E$. Queste equazioni sono analoghe a quelle proposte in (2.1) a parte la scelta di J_i : infatti, qui J_i si assume che sia un campo indipendente, mentre nel sistema (2.1) si era supposto J_i dipendente da q_i . Tale generalizzazione del modello proposto in [11] si rende necessaria perché, ad alta frequenza, l'evoluzione del campo J_i diventa rilevante, come sarà mostrato nel seguito.

Una soluzione stazionaria del sistema (4.1), con le espressioni dei termini di produzione date da (3.10-3.13), è

$$(4.2) \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 = (q_{01}, 0, 0), \quad L = L_0 = \frac{A^2}{B^2} q_{01}^2,$$

$$(4.3) \quad T = T_0(\mathbf{x}) = T^* - \frac{\kappa B_{HV}}{\xi} L_0 a q_{01} x_1, \quad \mathbf{J}_0 = \left(\frac{\kappa B_{HV}}{\xi \gamma_1 \kappa} a q_{01}, 0, 0 \right),$$

con $q_{01} > 0$.

I termini di produzione (3.10), (3.12) e (3.13) possono essere approssimati nell'intorno di tale soluzione stazionaria nel seguente modo

$$(4.4) \quad \sigma_i^q \simeq -\frac{1}{2} \kappa B_{HV} [(3a - 1)\delta_{i1} + (1 - a)] (q_{i0}(L - L_0) + L_0 q_i),$$

$$(4.5) \quad \sigma^L \simeq -\left[2BL_0 - \frac{3}{2} AL_0^{1/2} q_{01} \right] (L - L_0) + AL_0^{3/2} \hat{\mathbf{q}}_0 \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0),$$

e

$$(4.6) \quad \vec{\sigma}^J \simeq -\gamma_1 \kappa L_0 \mathbf{J} - \gamma_1 \kappa (L - L_0) \mathbf{J}_0.$$

Si consideri adesso la propagazione di onde armoniche piane dei quattro campi del sistema (4.1) nella seguente forma

$$(4.7) \quad \begin{cases} T = T_0(\mathbf{x}) + \tilde{T} e^{i(K\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \tilde{\mathbf{q}} e^{i(K\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \\ L = L_0 + \tilde{L} e^{i(K\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \tilde{\mathbf{J}} e^{i(K\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \end{cases}$$

dove $K = k_r + ik_s$ è il numero d'onda, ω la frequenza reale, \mathbf{n} il versore lungo la direzione di propagazione dell'onda, mentre le quantità soprastegnate denotano piccole ampiezze dei campi il cui prodotto può essere trascurato.

Sostituendo le (4.7) nel sistema (4.1), si ottiene

$$(4.8) \quad \begin{cases} -\omega[\rho c_V]_0 \tilde{T} - \omega[\rho \varepsilon_L]_0 \tilde{L} + K \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ [-\omega - \frac{i}{2} \kappa B_{HV} L_0 ((3a - 1) \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + 1 - a)] \tilde{\mathbf{q}} + \zeta_0 K \tilde{T} \mathbf{n} \\ \quad - (-\chi_0 K \mathbf{n} + i a \kappa B_{HV} \mathbf{q}_0) \tilde{L} = 0 \\ [-\omega - i(2BL_0 - \frac{3}{2} AL_0^{1/2} q_{01})] \tilde{L} + K \tilde{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n} + i AL_0^{3/2} \tilde{q}_1 = 0 \\ (-\omega - i\gamma_1 \kappa L_0) \tilde{\mathbf{J}} + \eta_0 K \mathbf{n} \tilde{T} + (v_0 K \mathbf{n} - i\gamma_1 \kappa \mathbf{J}_0) \tilde{L} = 0 \end{cases}$$

dove \mathbf{c}_1 è il versore lungo il primo asse x_1 e $\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1$ è la diade. Si noti che il pedice 0 individua quantità calcolate nello stato stazionario e che da ora in poi esso verrà rimosso per semplicità di notazione.

Primo caso: \mathbf{n} parallelo a \mathbf{q}_0 .

In questo caso si impone la condizione che la direzione di propagazione dell'onda \mathbf{n} sia parallela al flusso di calore \mathbf{q}_0 , cioè $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$. Sotto tali condizioni il sistema (4.8) diventa

$$(4.9) \quad \begin{cases} -\omega \rho c_V \tilde{T} + K \tilde{q}_1 - \omega \rho \varepsilon_L \tilde{L} = 0 \\ \zeta K \tilde{T} - (\omega + i a \kappa B_{HV} L) \tilde{q}_1 - (-\chi K + i \kappa B_{HV} a q_1) \tilde{L} = 0 \\ i AL^{3/2} \tilde{q}_1 - (\omega + i \tau_L^{-1}) \tilde{L} + K \tilde{J}_1 = 0 \\ \eta K \tilde{T} + (vK - i\gamma_1 \kappa J_1) \tilde{L} + (-\omega - i\gamma_1 \kappa L) \tilde{J}_1 = 0 \\ (-\omega - \frac{i}{2} \kappa B_{HV} L(1 - a)) \tilde{q}_2 = 0 \\ (-\omega - \frac{i}{2} \kappa B_{HV} L(1 - a)) \tilde{q}_3 = 0 \\ (-\omega - i\gamma_1 \kappa L) \tilde{J}_2 = 0 \\ (-\omega - i\gamma_1 \kappa L) \tilde{J}_3 = 0 \end{cases}$$

dove

$$\tau_L^{-1} = \left(2BL - \frac{3}{2} AL^{1/2} q_1 \right).$$

Si noti che i modi trasversali, cioè quelli che corrispondono alle ultime quattro equazioni, evolvono indipendentemente rispetto a quelli longitudinali, corrispondenti alle prime quattro equazioni.

Poiché siamo interessati allo studio di onde di alta frequenza, ci limiteremo a studiare il caso in cui ω ed il modulo del numero d'onda K siano sufficientemente grandi. Effettivamente, è per alti valori della frequenza che si può evidenziare il comportamento ondoso del groviglio di vortici, in quanto il primo termine in (4.1c) diventa rilevante, come mostrato nella Sezione 2. Si osservi che l'assumere $|K| = |k_r + ik_s|$ sufficientemente grande si riferisce ad un valore grande di k_r che

è legato alla velocità dell'onda di vortice, mentre la parte immaginaria k_s corrisponde al fattore di attenuazione dell'onda, che si assume piccola.

Per studiare tale problema si seguiranno due step: per primo, si assume che $|K|$ e ω siano estremamente grandi in modo tale da poter trascurare tutti i termini da essi indipendenti; successivamente, si perturberà la soluzione ottenuta al fine di valutare l'influenza dei termini trascurati sulla velocità e sull'attenuazione delle onde ad alta-frequenza.

STEP I: Per le precedenti ipotesi il sistema (4.9) diventa

$$(4.10) \quad \begin{cases} -\omega\rho c_V \tilde{T} + k_r \tilde{q}_1 - \omega\rho\varepsilon_L \tilde{L} = 0 \\ \xi k_r \tilde{T} - \omega \tilde{q}_1 + \chi k_r \tilde{L} = 0 \\ -\omega \tilde{L} + k_r \tilde{J}_1 = 0 \\ \eta k_r \tilde{T} + \nu k_r \tilde{L} - \omega \tilde{J}_1 = 0 \\ -\omega \tilde{q}_2 = 0, \quad -\omega \tilde{q}_3 = 0, \quad -\omega \tilde{J}_2 = 0, \quad -\omega \tilde{J}_3 = 0 \end{cases}$$

Indicando con $w = \omega/k_r$ la velocità dell'onda, si ottiene la seguente relazione di dispersione

$$(4.11) \quad w^4 - \left[V_2^2 + \nu - \frac{\eta}{\rho c_V} \left(\rho\varepsilon_L - \frac{\chi}{\nu} \right) \right] w^2 + V_2^2 \nu = 0,$$

dove $V_2 = (-\lambda_{11} T^2 \rho c_V)^{-1/2}$ è la velocità del secondo suono in assenza del groviglio di vortici [7, 11, 20], che, per la (3.8b), è legata al coefficiente ξ dalla relazione $\xi = V_2^2 \rho c_V - \lambda_{12} \eta / \lambda_{11}$. In più, se si suppone che il coefficiente η sia nullo

$$(4.12) \quad \eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\mu^L}{T} \right) = \frac{2S_3}{S_2} = -\frac{\chi}{\nu},$$

allora dalla relazione di dispersione (4.11) si ottengono le seguenti soluzioni

$$(4.13) \quad w_{1,2} = \pm V_2, \quad w_{3,4} = \pm \sqrt{\nu},$$

a cui corrispondono i modi mostrati nella Tabella 1.

TABELLA 1. – Modi corrispondenti, rispettivamente, alla velocità del secondo suono e delle onde di vortici.

$w_{1,2} = \pm V_2$	$w_{3,4} = \pm \sqrt{\nu}$
$\tilde{T} = \psi$	$\tilde{T} = -\frac{1}{\rho c_V} \left(\frac{\chi - \nu \rho \varepsilon_L}{V_2^2 - \nu} \right) \psi$
$\tilde{q}_1 = \pm V_2 \rho c_V \psi$	$\tilde{q}_1 = \pm \frac{\sqrt{\nu} (\rho \varepsilon_L V_2^2 - \chi)}{V_2^2 - \nu} \psi$
$\tilde{L} = 0$	$\tilde{L} = \psi$
$\tilde{J}_1 = 0$	$\tilde{J}_1 = \pm \sqrt{\nu} \psi$

Come si vede dalla prima colonna di tale Tabella, sotto l'ipotesi (4.12) l'onda ad alta frequenza di velocità $w_{1,2} = \pm V_2$ è un'onda di temperatura (il secondo suono) in cui sono nulle le due quantità \tilde{L} e \tilde{J}_1 , mentre dalla seconda colonna si deduce che l'onda ad alta frequenza di velocità $w_{3,4} = \pm \sqrt{v}$ è un'onda in cui vibrano tutti i campi termodinamici. L'ultimo risultato è dovuto al fatto che quando l'onda di vortici si propaga nell'elio superfluido, la temperatura T e il flusso di calore q_1 non possono rimanere costanti. Tale comportamento è diverso da quello ottenuto in [12], dove è stato utilizzato il modello (2.1), dato che in quel caso nel secondo suono vibra anche la densità di linea L . Infatti, nel precedente modello (2.1) il flusso di vortici \mathbf{J} è stato scelto proporzionale a \mathbf{q} , cosicché le vibrazioni nel flusso di calore (secondo suono) producono vibrazioni nel groviglio di vortici. Per stabilire la validità di questo risultato sono necessari esperimenti con onde di secondo suono ad alta frequenza.

STEP II: Supponiamo che i termini del sistema (4.9) che non compaiono nel sistema (4.10) ed il termine η siano sufficientemente piccoli da essere considerati come perturbazioni alla velocità w dell'onda e al termine di attenuazione k_s del numero d'onda K . Sostituendo le relazioni

$$\bar{w} = \frac{\omega}{k_r} = w + \delta \quad \text{e} \quad K = k_r + ik_s$$

nel sistema (4.9), si ottengono le espressioni (4.13) all'ordine zero in δ e k_s , mentre all'ordine successivo si ottiene

$$(4.14) \quad \bar{w}_{1,2} = \left(1 - \frac{\eta}{2\rho c_V (w_{1,2}^2 - w_{3,4}^2)} \left(\rho \varepsilon_L - \frac{\chi}{w_{3,4}^2} \right) \right) w_{1,2},$$

$$(4.15) \quad \bar{w}_{3,4} = \left(1 + \frac{\eta}{2\rho c_V (w_{1,2}^2 - w_{3,4}^2)} \left(\rho \varepsilon_L - \frac{\chi}{w_{3,4}^2} \right) \right) w_{3,4},$$

e

$$(4.16) \quad k_s^{(1,2)} = \frac{a\kappa L B_{HV}}{2w_{1,2}} + \frac{AL^{3/2} (w_{1,2}^2 \rho \varepsilon_L - \chi)}{2(w_{1,2}^2 - w_{3,4}^2)},$$

$$(4.17) \quad k_s^{(3,4)} = \frac{\kappa L \gamma_1 + \tau_L^{-1}}{2w_{3,4}} - \frac{AL^{3/2} (w_{1,2}^2 \rho \varepsilon_L - \chi)}{2(w_{1,2}^2 - w_{3,4}^2)} + \frac{J_1 \kappa \gamma_1}{2w_{3,4}^2}.$$

Si osservi che in questa approssimazione tutti i campi termodinamici vibrano simultaneamente e che i coefficienti di attenuazione k_s sono influenzati dalla

sceita di \mathbf{J} come variabile indipendente, come si vede facilmente confrontando le espressioni (4.16)-(4.17) con quelle ottenute in [12]. Osservando le (4.14)-(4.15), si può notare che il termine perturbato dipende solo dal coefficiente η e risulta nullo quando si ipotizza che η sia uguale a zero. Per quanto riguarda, invece, i coefficienti di attenuazione (4.16)-(4.17), si osservi che il primo termine in (4.16) è uguale a quello ottenuto in [7], quando i vortici sono considerati fissi. Il nuovo termine, proporzionale ad A , proviene dall'interazione tra secondo suono ed onde di vortice.

È da notare che il primo termine della (4.16) produce un'attenuazione sia per le onde progressive che per le onde regressive, mentre il secondo termine contribuisce ai due tipi di onde in maniera opposta a seconda del segno di questo termine. Va ribadito che misure più precise dell'attenuazione del secondo suono potrebbero permettere di evidenziare la presenza ed il segno di questo termine.

Si noti anche che il secondo termine del coefficiente di dissipazione $k_s^{(1,2)}$ è uguale al terzo termine di $k_s^{(3,4)}$, ma con segno opposto. Questo significa che questo termine contribuisce all'attenuazione delle due onde in modo opposto; inoltre, il suo contributo dipende anche dal considerare la propagazione di onde progressive o onde regressive. Il primo termine di $k_s^{(3,4)}$ produce sempre un'attenuazione dell'onda, mentre il comportamento del terzo termine è analogo al primo.

Secondo caso: \mathbf{n} ortogonale a \mathbf{q}_0 .

Per completare il confronto con il modello (2.1), studiato in [11, 12], bisogna analizzare un'altra situazione, quella in cui la direzione di propagazione dell'onda è perpendicolare al flusso di calore, per esempio, assumendo $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Sotto tale ipotesi il sistema (4.8) assume la seguente forma

$$(4.18) \quad \begin{cases} -\omega p c_V \tilde{T} + K \tilde{q}_3 - \omega p \epsilon_L \tilde{L} = 0 \\ (-\omega - i\kappa B_{HV} L a) \tilde{q}_1 - i\kappa B_{HV} a q_1 \tilde{L} = 0 \\ \xi K \tilde{T} - (\omega + \frac{i}{2} \kappa B_{HV} L (1 - a)) \tilde{q}_3 + \chi K \tilde{L} = 0 \\ iAL^{3/2} \tilde{q}_1 - (\omega + i\tau_L^{-1}) \tilde{L} + K \tilde{J}_3 = 0 \\ \eta K \tilde{T} + vK \tilde{L} + (-\omega - i\gamma_1 \kappa L) \tilde{J}_3 = 0 \\ (-\omega - \frac{i}{2} \kappa B_{HV} L (1 - a)) \tilde{q}_2 = 0 \\ -i\gamma_1 \kappa J_1 \tilde{L} + (-\omega - i\gamma_1 \kappa L) \tilde{J}_1 = 0 \\ (-\omega - i\gamma_1 \kappa L) \tilde{J}_2 = 0 \end{cases}$$

Si noti che, in contrasto col primo caso, ma in accordo con la corrispondente situazione del modello (2.1) descritta in [11, 12], i modi trasversali e longitudinali non evolvono indipendentemente, come si vede dalle prime cinque equazioni.

Come nel caso precedente, si assume che i valori di ω e della parte reale del numero d'onda, k_r , siano sufficientemente grandi da poter semplificare il (4.18) nella seguente forma

$$(4.19) \quad \begin{cases} -\omega\rho c_V \tilde{T} + k_r \tilde{q}_3 - \omega\rho\varepsilon_L \tilde{L} = 0 \\ -\omega\tilde{q}_1 = 0 \\ \zeta k_r \tilde{T} - \omega\tilde{q}_3 + \chi k_r \tilde{L} = 0 \\ -\omega\tilde{L} + k_r \tilde{J}_3 = 0 \\ \eta k_r \tilde{T} + \nu k_r \tilde{L} - \omega\tilde{J}_3 = 0 \\ -\omega\tilde{q}_2 = 0 \quad -\omega\tilde{J}_1 = 0 \quad -\omega\tilde{J}_2 = 0 \end{cases}$$

In questo caso particolare, come nel caso precedente ed in [12], sono presenti solo i modi longitudinali, per cui la relazione di dispersione assume la seguente forma

$$(4.20) \quad w \left(w^4 - \left[V_2^2 + v - \frac{\eta}{\rho c_V} \left(\rho\varepsilon_L + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} \right) \right] w^2 + V_2^2 v \right) = 0,$$

simile all'equazione (4.11).

Adesso, seguendo la stessa procedura adottato nel primo caso, cioè imponendo $\eta = 0$, la relazione di dispersione (4.20) diventa

$$(4.21) \quad w(w^2 - v)(w^2 - V_2^2) = 0,$$

dove V_2 è velocità del secondo suono e \sqrt{v} è la velocità della densità delle onde di vortice nell'elio II.

TABELLA 2. – Modi corrispondenti rispettivamente alla velocità nulla, del secondo suono e delle onde di vortici.

$w_0 = 0$	$w_{1,2} = \pm V_2$	$w_{3,4} = \pm\sqrt{v}$
$\tilde{q}_1 = \psi$	$\tilde{q}_1 = 0$	$\tilde{q}_1 = 0$
$\tilde{T} = 0$	$\tilde{T} = \psi$	$\tilde{T} = -\frac{1}{\rho c_V} \left(\frac{\chi - \nu\rho\varepsilon_L}{V_2^2 - v} \right) \psi$
$\tilde{q}_3 = 0$	$\tilde{q}_3 = \pm V_2 \rho c_V \psi$	$\tilde{q}_3 = \pm \frac{\sqrt{v}(\rho\varepsilon_L V_2^2 - \chi)}{V_2^2 - v} \psi$
$\tilde{L} = 0$	$\tilde{L} = 0$	$\tilde{L} = \psi$
$\tilde{J}_3 = 0$	$\tilde{J}_3 = 0$	$\tilde{J}_3 = \pm\sqrt{v}\psi$

Le conclusioni a cui si può giungere in questo caso sono le stesse del caso precedente. Infatti, i modi corrispondenti alle soluzioni (4.21) sono mostrate nella Tabella 2, che, a parte la prima colonna, sono identici a quelli mostrati nella Tabella 1.

Come nel primo caso, si suppone che tutte le quantità del sistema (4.18) che non compaiono nel sistema (4.19) siano sufficientemente piccole rispetto agli altri

termini dello stesso sistema. In più, si assume che anche il coefficiente η sia sufficientemente piccolo. Per cui, sostituendo l'espressione

$$\bar{w} = \frac{\omega}{k_r} = w + \delta \quad \text{e} \quad K = k_r + ik_s$$

nella relazione di dispersione del sistema (4.18), si trovano la relazione (4.21), all'ordine zero in δ e k_s , e le seguenti due espressioni all'ordine successivo

$$(4.22) \quad \bar{w}_{1,2} = \left(1 - \frac{\eta}{2\rho c_V (w_{1,2}^2 - w_{3,4}^2)} \left(\rho \varepsilon_L - \frac{\chi}{w_{3,4}^2} \right) \right) w_{1,2},$$

$$(4.23) \quad \bar{w}_{3,4} = \left(1 + \frac{\eta}{2\rho c_V (w_{1,2}^2 - w_{3,4}^2)} \left(\rho \varepsilon_L - \frac{\chi}{w_{3,4}^2} \right) \right) w_{3,4},$$

e

$$(4.24) \quad k_s^{(1,2)} = \frac{(1-a)\kappa L B_{HV}}{4w_{1,2}},$$

$$(4.25) \quad k_s^{(3,4)} = \frac{\tau_L^{-1} + \kappa L \gamma_1}{2w_{3,4}}.$$

Per quanto riguarda l'espressione (4.24) per il termine dissipativo $k_s^{(1,2)}$, esso coincide con quello ottenuto nella stessa situazione quando i vortici sono assunti fissi [19, 21], mentre il termine $k_s^{(3,4)}$ coincide con il secondo termine di $k_s^{(3,4)}$ del primo caso (\mathbf{n} parallelo a \mathbf{q}_0).

5. – Conclusioni.

Il modello idrodinamico di turbolenza quantistica non omogenea (2.1), proposto e analizzato in [11, 12], è stato generalizzato con il modello (4.1) dove è stato aggiunto al set di variabili E , \mathbf{q} e L il flusso di vortice \mathbf{J} come ulteriore variabile indipendente [15]. In quest'ultimo modello, \mathbf{J} non è più descritto da un'equazione costitutiva ma ha una propria equazione dinamica, il che permette di analizzare con maggiore dettaglio e precisione il comportamento dell'onda del secondo suono, delle onde di vortice e del loro reciproco accoppiamento [15]. Questa analisi matematica può essere utile nell'interpretazione degli esperimenti del secondo suono ad alta frequenza. Infatti, la derivata temporale di \mathbf{J} diviene rilevante ad alte frequenze, evidenziando in tale regime un comportamento ondulatorio dei vortici, anziché diffusivo.

Dal confronto dei risultati ottenuti nei due casi analizzati nella Sezione 4 — propagazione parallela ed ortogonale al flusso di calore — si deduce un risultato

interessante: quando le onde si propagano ortogonalmente al flusso di calore, la presenza del groviglio di vortici causa sempre un'attenuazione delle onde, mentre quando la propagazione dell'onda è parallela al flusso di calore sono presenti altri termini. Questi ultimi hanno un contributo positivo o negativo a seconda che la direzione dell'onda sia concorde o meno alla direzione del flusso di calore.

I risultati della situazione perturbata nel primo caso, quando \mathbf{n} è parallelo a \mathbf{q} , possono essere confrontati con quelli ottenuti in [11, 12] relativi al modello (2.1). Lo stesso si potrebbe fare con i risultati del secondo caso, giungendo però alle stesse conclusioni del primo caso, ragion per cui ci limiteremo ad analizzare solo il primo caso. Come per il modello (2.1) [11, 12], si ha la propagazione di due tipi di onde, cioè le onde di calore e le onde di vortice, che non possono propagarsi l'una indipendentemente dall'altra. Infatti, la situazione disaccoppiata (equazione (4.13)), in cui la propagazione del secondo suono non è influenzata dalle fluttuazioni dei vortici, diventa inverosimile quando si tiene conto delle quantità $N_1 = a\kappa B_{HV}L$, $N_2 = \kappa B_{HV}aq_1$, $N_3 = AL^{3/2}$, $N_4 = \gamma_1\kappa J_1$, $N_5 = \gamma_1\kappa L$, τ_L^{-1} e η , presenti nel sistema (4.9). Infatti, da (4.14-4.15) e dai risultati di [12] si evidenzia che calore e onde di vortice non possono essere considerate separatamente, come differenti onde, ma come due diverse caratteristiche dello stesso fenomeno. Ovviamente, i risultati ottenuti qui e in [15] sono più esaurienti di quelli ottenuti in [11, 12] per il modello (2.1): infatti, da un confronto tra le velocità al primo ordine di approssimazione nei due modelli, si deduce che le espressioni (4.14)-(4.15) dipendono non solo dalle velocità delle onde di calore e onde di vortici, come in [11, 12], ma anche dal coefficiente termodiffusivo dei vortici η , che proviene dall'equazione (4.1d) del flusso di vortici \mathbf{J} . La quarta equazione del sistema (4.9) mostra che il flusso di vortici \tilde{J}_1 non è proporzionale al flusso di calore, come era proposto nel modello (2.1), ma soddisfa ad un'equazione in cui sono presenti anche i campi \tilde{L} e \tilde{T} .

Si noti che l'attenuazione del secondo suono dipende dalla direzione relativa dell'onda e del flusso di calore: alcuni esperimenti mostrano questa dipendenza sia per direzioni parallele che per direzioni ortogonali [22]. Tali risultati furono spiegati supponendo che ci fosse un'anisotropia del groviglio di vortici, corrispondente alla presenza del parametro a in (3.11). Ma, osservando le espressioni (4.16) e (4.24) dell'attenuazione del secondo suono ad alta frequenza, si nota che queste espressioni non sono uguali per $a = 1/3$ (isotropia del groviglio di vortici). In particolare, il termine

$$(5.26) \quad \frac{AL^{3/2} \left(w_{1,2}^2 \rho \varepsilon_L - \chi \right)}{2 \left(w_{1,2}^2 - w_{3,4}^2 \right)}$$

in (4.16) provoca una dipendenza dell'attenuazione dalla direzione, concorde o meno, dell'onda con il flusso di calore \mathbf{q} . Tale termine è assente nel caso in cui

l'onda si propaga ortogonalmente al flusso di calore. Si noti che le velocità di propagazione (4.14) e (4.15) per \mathbf{n} parallelo a \mathbf{q} coincidono con le (4.22) e (4.23), rispettivamente, per \mathbf{n} ortogonale a \mathbf{q} . In tal caso il comportamento della velocità di propagazione non dipende dall'isotropia o anisotropia del groviglio.

In conclusione, un'anisotropia nel comportamento del secondo suono in regime di alta frequenza in una situazione di controflusso non implica necessariamente un'anisotropia del groviglio di vortici, ma solamente un diverso comportamento del secondo suono dovuto all'interazione con le onde di vortice. Tutto ciò può essere interessante nel caso in cui si voglia esplorare il grado di isotropia per piccole scale spaziali. Chiaramente, sono necessari esperimenti per stabilire la presenza e il segno di tali termini aggiuntivi.

Ringraziamenti. Si ringrazia il supporto economico dell'Azione Integrata Italia-España (Concessione IT2253 del MIUR italiano e S2800082F HI2004-0316 del Ministero spagnolo di Scienze e Tecnologia). MS e MSM ringraziano il supporto del MIUR ed i "Fondi 60%" dell'Università di Palermo. MS ringrazia l'Università di Palermo per l'"Assegno di ricerca: Studio della turbolenza superfluida e della sua evoluzione" dell'Università di Palermo. DJ ringrazia la Dirección General de Investigación del Ministero dell'Istruzione spagnolo per la FIS 2006-12296-C02-01 e la Dirección General de Recerca of the Generalitat of Catalonia, per la 2005 SGR-00087.

REFERENCES

- [1] R. J. DONNELLY, *Quantized Vortices in Helium II*, Cambridge University Press, Cambridge, (1991).
- [2] C. F. BARENGHI - R. J. DONNELLY - W. F. VINEN (eds), *Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence*, Springer, Berlin, (2001).
- [3] S. K. NEMIROVSKII - W. FISZDON, *Chaotic quantized vortices and hydrodynamic processes in superfluid helium*, Rev. Mod. Phys., **67** (1995), 37-84.
- [4] L. TISZA, *Transport phenomena in He II*, Nature, **141** (London, 1938), 913.
- [5] L. D. LANDAU, *The theory of superfluidity of He II*, J. Phys., **5** (1941), 71.
- [6] I. M. KHALATNIKOV, *An Introduction to the Theory of Superfluidity*, Addison-Wesley, Redwood City (1989).
- [7] D. JOU - G. LEBON - M. S. MONGIOVI, *Second sound, superfluid turbulence and intermittent effects in liquid helium II*, Phys. Rev. B, **66** (2002), 9.
- [8] W. F. VINEN, *Mutual friction in a heat current in liquid helium II. III. Theory of the mutual friction*, Proc. R. Soc., **A 240** (London, 1957), 493-515.
- [9] W. F. VINEN - J. J. NIEMELA, *Quantum Turbulence*, J. Low Temp. Phys., **128** (2002), 167.
- [10] C. F. BARENGHI, *Classical aspects of quantum turbulence*, J. Phys. Cond. Matter, **11** (1999), 7751.
- [11] M. S. MONGIOVI - D. JOU, *A thermodynamical derivation of a hydrodynamical model of inhomogeneous superfluid turbulence*, Phys. Rev. B, **75** (2007), 14.

- [12] D. JOU - M. S. MONGIOVÌ - M. SCIACCA, *Vortex density waves in a hydrodynamical model of superfluid turbulence*, Phys. Lett. A, **368** (2007), 7.
- [13] I. LIU, *Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle*, Arch. Rat. Mech. Anal. **46** (1972), 131-148.
- [14] I. MÜLLER - T. RUGGERI, *Extended Thermodynamics*, Springer - Verlag (New York, 1993); *Rational Extended Thermodynamics*, Springer-Verlag (New York, 1998).
- [15] M. SCIACCA - M. S. MONGIOVÌ - D. JOU, *A mathematical model of counterflow superfluid turbulence describing heat waves and vortex-density waves*, Mathematical and Computer Modelling **48** (2008), 206-221.
- [16] K. W. SCHWARZ, *Generating superfluid turbulence from simple dynamical rules*, Phys. Rev. Lett., **49** (1982), 283-285.
- [17] K. W. SCHWARZ, *Three-dimensional vortex dynamics in superfluid ^4He , I. Line-line and line boundary interactions*, Phys. Rev. B, **31** (1985), 5782-5804.
- [18] K. W. SCHWARZ, *Three-dimensional vortex dynamics in superfluid ^4He* , Phys. Rev. B, **38** (1988), 2398-2417.
- [19] D. JOU - M. S. MONGIOVÌ, *Description and evolution of anisotropy in superfluid vortex tangles with counterflow and rotation*, Phys. Rev. B, **74** (2006), 11.
- [20] M. S. MONGIOVÌ, *Extended Irreversible Thermodynamics of Liquid Helium II*, Phys. Rev. B, **48** (1993), 6276-6283.
- [21] R. A. PERUZZA - M. SCIACCA, *Waves propagation in turbulent superfluid helium in presence of combined rotation and counterflow*, Physica B, **398** (2007), 8-17.
- [22] D. D. AWSCHALOM - F. P. MILLIKEN - K. W. SCHWARZ, *Properties of superfluid turbulence in a large channel*, Phys. Rev. Lett., **53** (1984), 1372-1375.

Michele Sciacca - Maria Stella Mongiovì, Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici
Università di Palermo, c/o Facoltà di Ingegneria,
Viale delle Scienze, 90128 Palermo, Italy
E-mail: msciacca@unipa.it; mongiovì@unipa.it

David Jou, Department de Física,
Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Catalonia, Spain
E-mail: david.jou@uab.es