Bollettino
Unione Matematica Italiana

Camillo De Lellis

Le equazioni di Eulero dal punto di vista delle inclusioni differenziali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. **1** (2008), n.3, p. 873–879.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2008_9_1_3_873_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

Bollettino U. M. I.
(9) **I** (2008), 873-879

Le equazioni di Eulero dal punto di vista delle inclusioni differenziali (*)

CAMILLO DE LELLIS

Abstract. – *In a recent joint paper with L. Székelyhidi we have proposed a new point of view on weak solutions of the Euler equations, describing the motion of an ideal incompressible fluid in* $\mathbf{R}^n$ *with* $n \geq 2$*. We give a reformulation of the Euler equations as a differential inclusion, and in this way we obtain transparent proofs of several celebrated results of V. Scheffer and A. Shnirelman concerning the non-uniqueness of weak solutions and the existence of energy–decreasing solutions. Our results are stronger because they work in any dimension and yield bounded velocity and pressure.*

1. – Introduzione.

Si considerino le equazioni di Eulero per il moto di un fluido ideale:

$$\begin{aligned} \partial_t v + \operatorname{div}(v \otimes v) + \nabla p - f &= 0 \\ \operatorname{div} v &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Le soluzioni regolari del problema di Cauchy sono soggette alla legge di conservazione dell'energia cinetica, ovvero la funzione $E(t) = \int |v(x,t)|^2\, dx$ è costante nel tempo.

Un tema ricorrente nella letteratura moderna sulle equazioni differenziali alle derivate parziali è l'introduzione di opportuni concetti di soluzione debole (si veda per esempio [5, 9, 14, 19]). Un campo vettoriale $v \in L^2_{loc}$ a divergenza nulla è una *soluzione debole* di (1) se

$$\int \big(v\partial_t \varphi + \langle v \otimes v, \nabla\varphi\rangle + \varphi \cdot f\big)\, dx\, dt \;=\; 0 \tag{2}$$

per ogni funzione test $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t, \mathbb{R}^n)$ a divergenza nulla. È noto che, data la v, la pressione è determinata a meno di una funzione che dipende dalla sola variabile tempo (si veda, per esempio, [22]).

(*) Comunicazione tenuta a Bari il 26 settembre 2007 in occasione del XVIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

Nel caso delle equazioni di Eulero, oltre a motivazioni di carattere squisitamente matematico, ci sono anche buone ragioni di carattere fisico per considerare soluzioni deboli, specialmente se si guarda alla teoria della turbolenza formulata da Kolmogorov nel 1941 [3, 10]. Una nota congettura di Onsager, basata appunto sulla teoria di Kolmogorov, ipotizza l'esistenza di soluzioni hölderiane con esponente minore di 1/3, mentre afferma che per soluzioni con esponente di Hölder maggiore di 1/3 l'energia si conserva. Per quanto osservato sopra, una soluzione dissipativa non può essere regolare.

La seconda parte di questa congettura è stata mostrata da Constantin, E e Titi negli anni '90, mentre la prima parte è ancora oggi un problema largamente inesplorato.

Agli inizi degli anni '90, in un lavoro sorprendente ([16]), Scheffer ha mostrato, in 2 dimensioni, l'esistenza di una soluzione debole a quadrato sommabile di (1) il cui supporto è limitato nello spazio e nel tempo e che tuttavia non è banale. Una dimostrazione alternativa del Teorema di Scheffer ([17]) è stata pubblicata qualche anno dopo da Shnirelman. La sua costruzione, pur essendo molto più semplice di quella di Scheffer, è comunque piuttosto complicata. In un lavoro successivo ([18]), a piú di 50 anni di distanza dalla congettura di Onsager, lo stesso autore, usando metodi diversi, ha dato la prima dimostrazione rigorosa dell'esistenza di una soluzione debole di (1) in 3 dimensioni la cui energia è una funzione strettamente decrescente del tempo.

In una nota recente, in collaborazione con László Székelyhidi ([6]), abbiamo mostrato il seguente Teorema.

TEOREMA 1. – *Sia* $f = 0$. *Allora esiste una* $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t; \mathbb{R}^n)$ *e una* $p \in L^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$ *che risolvono* (1) *e tali che*

- $\int |v(x,t)|^2\, dx = 1$ *per quasi ogni* $t \in]-1, 1[$,
- $v(x,t) = 0$ *per* $|t| > 1$.

La nostra dimostrazione poggia su un punto di vista radicalmente nuovo nello studio delle equazioni di Eulero. Considerando quest'ultime alla stregua di un'inclusione differenziale, il nostro lavoro segue la nota analisi delle oscillazioni di Tartar per sistemi lineari di equazioni differenziali alle derivate parziali accoppiati con vincoli algebrici nonlineari (si veda, in particolare [8, 13, 20, 21]). In pratica, l'approccio di Tartar si poggia sullo studio accurato delle onde piane localizzate nelle variabili originali (contrariamente alla più comune analisi delle onde nelle variabili di Fourier). In combinazione con l'integrazione convessa o con i cosiddetti "argomenti alla Baire", l'analisi di Tartar dà un metodo piuttosto efficiente per generare soluzioni altamente irregolari. La compresione di questo meccanismo ha ricevuto svariati contributi negli ultimi tre decenni di letteratura sulle inclusioni differenziali (si veda [1, 2, 4, 11, 12, 13, 15]).

Come si evince chiaramente dall'enunciato, il nostro teorema migliora in modo sensibile le costruzioni di Scheffer e Shnirelman. Innanzitutto dà un quadro unificato per entrambi i risultati (soluzioni a supporto compatto e soluzioni dissipative) e una disamina della dimostrazione mostra come essa getti un ponte tra [16] e [17] (che finora erano stati considerati come del tutto scorrelati). In secondo luogo, il nostro metodo produce soluzioni limitate e pertanto risponde a una questione aperta piuttosto importante, mostrando che neanche le soluzioni appartenenti allo spazio dell'energia sono uniche. Infine, esso mostra che il secondo risultato di Shnirelman vale anche in dimensione 2.

In un secondo lavoro abbiamo dato un'ulteriore dimostrazione della portata di qesto approccio (si veda [7]). Combinando gli stessi metodi con una versione più sofisticata degli argomenti alla Baire e dell'integrazione convessa, si può rispondere negativamente alla questione dell'unicità per tutti i concetti di "soluzione ammissibile" introdotti in letteratura negli ultimi anni. Un risultato analogo vale anche per le soluzioni entropiche di quello che è forse il più noto sistema iperbolico di leggi di conservazione, il p-sistema della dimanica dei gas (si veda di nuovo [7]).

2. – Riscrivere le equazioni di Eulero.

Il punto di partenza della nostra analisi è una riformulazione delle equazioni di Eulero. Introduciamo il dominio $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+1}$, dimenticando il ruolo privilegiato della variabile tempo, e definiamo la nuova variabile di stato $z = (v, u, q)$, data da un vettore n-dimensionale v, una matrice simmetrica a traccia nulla u e un numero reale q. v coincide con la velocità del fluido, mentre per q e u valgono le relazioni:

$$q = p + \frac{1}{n}|v|^2, \text{ and } u = v \otimes v - \frac{1}{n}|v|^2 I_n,$$

(I_n denota la matrice identità). D'ora in poi indicheremo con $\mathcal{S}^n$ lo spazio delle matrici simmetriche $n \times n$ e con $\mathcal{S}^n_0$ il corrispondente sottospazio delle matrici a traccia nulla. Il seguente enunciato è ovvio.

LEMMA 2. – *Supponiamo che* $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t; \mathbb{R}^n)$, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t; \mathcal{S}^n_0)$ *e* $q \in L^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$ *risolvano*

$$\begin{aligned} \partial_t v + \operatorname{div} u + \nabla q &= 0, \\ \operatorname{div} v &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

nel senso delle distribuzioni. Se inoltre

$$u = v \otimes v - \frac{1}{n}|v|^2 I_n \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t, \tag{4}$$

allora v *e* $p := q - \frac{1}{n}|v|^2$ *sono soluzioni deboli* (1) *con* $f \equiv 0$. *Viceversa, se* v *e* p *sono soluzioni distribuzionali di* (1), *allora* v, $u := v \otimes v - \frac{1}{n}|v|^2 I_n$ *e* $q := p + \frac{1}{n}|v|^2$ *soddisfano* (3) *e* (4).

Siamo ora nelle condizioni per poter iniziare l'analisi di Tartar (vedi [20]). Consideriamo il sistema (3) come caso particolare di un sistema lineare a coefficienti costanti di equazioni differenziali alle derivate parziali:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \partial_i z = 0\,. \tag{5}$$

(3) è poi accoppiato all'equazione nonlineare (4), che possiamo rileggere come un vincolo della forma

$$z(x) \in K \subset \mathbb{R}^d \text{ a.e.} \tag{6}$$

Chiameremo *onde piane* le soluzioni di (5) della forma

$$z(x) = ah(x \cdot \xi), \tag{7}$$

dove h è una funzione reale di variabile reale. Il *cono delle onde* Λ è dato dagli stati $a \in \mathbb{R}^d$ per cui, in qualsiasi modo si scelga il profilo dell'onda h, la funzione (7) risolve (5). Più precisamente, un semplice calcolo dà

$$\Lambda := \left\{ a \in \mathbb{R}^d : \exists \xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \quad \text{with} \quad \sum_{i=1}^{m} \xi_i A_i a = 0 \right\}. \tag{8}$$

OSSERVAZIONE 3. – *Un semplice calcolo mostra che per ogni* $v \in \mathbb{R}^n$ *e e* $u \in \mathcal{S}_0^n$ *esiste* $q \in \mathbb{R}$ *tale che* $(v, u, q) \in \Lambda$. *Il cono delle onde è, pertanto, un insieme piuttosto ampio. Infatti, sia* $V^\perp \subset \mathbb{R}^n$ *il sottospazio lineare ortogonale a* v *e si consideri su* $V^\perp$ *la forma quadratica* $\xi \mapsto \xi \cdot u\xi$. *Allora,* (v, u, q) *appartiene al cono delle onde se e solo se* $-q$ *è un autovalore della forma quadratica considerata.*

La nostra costruzione di soluzioni irregolari si basa su opportuni "troncamenti" delle onde piane. L'obiettivo dei troncamenti è ottenere soluzioni di (3) che assomiglino alle onde piane in certe regioni, ma che siano localizzate nello spazio.

L'ingrediente essenziale della costruzione è pertanto la seguente proposizione.

TEOREMA 4 (Onde piane localizzate). – *Sia* $a = (v_0, u_0, q_0) \in \Lambda$ *tale che* $v_0 \neq 0$ *e si indichi con* σ *il segmento di* $\mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n \times \mathbb{R}$ *con estremi* $-a$ *e* a. *Per ogni* $\varepsilon > 0$

esiste una soluzione liscia (v, u, q) *di (3) con le seguenti proprietà:*

- *il supporto di* (v, u, q) *è contenuto in* $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$,
- *l'immagine di* (v, u, q) *è contenuta nell'*ε*–intorno di* σ,
- $\int |v(x,t)|\, dx\, dt \geq a|v_0|$,

dove $a > 0$ *è una costante dimensionale.*

La parte più innovativa del lavoro [6] è chiaramente contenuta nella Proposizione 4. La dimostrazione, alquanto elementare, poggia comunque su alcune osservazioni apparentemente nuove nel contesto delle equazioni di Eulero. In particolare, non è ovvio come troncare opportunamente una soluzione di (3) in modo da ottenere di nuovo una soluzione. Un ingrediente essenziale della dimostrazione è pertanto l'esistenza di opportuni potenziali (infatti tensori del quarto ordine) che generano un'ampia quantità di soluzioni di (3).

3. – Integrazione convessa.

Spiegheremo ora come la Proposizione 4 può essere usata per dimostrare il Teorema 1. Ricordiamo che, grazie al Lemma 2, è sufficiente mostrare l'esistenza di una tripla

$$(v, u, q) \in L^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t; \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n_0 \times \mathbb{R})$$

supportata in $\Omega = B_1(0) \times]-1, 1[$, tale che $|v| = 1$ a.e. in Ω e (3) e (4) siano contemporaneamente soddisfatte. La Proposizione 4 ci fornisce soluzioni (v, u, q) di (3) supportate in Ω. Il punto cruciale è pertanto trovare delle soluzioni che soddisfino anche il vincolo (4).

Consideriamo gli insiemi

$$K = \left\{ (v, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n_0 : u = v \otimes v - \frac{1}{n}|v|^2 I_n\,,\ |v| = 1 \right\}, \tag{9}$$

e

$$\mathcal{U} = \mathrm{int}\,(K^{co} \times [-1, 1]), \tag{10}$$

dove int denota la parte interna dell'insieme in questione e K^{co} l'inviluppo convesso di K.

Allora una tripla (v, u, q) che risolva (3) e la cui immagine sia contenuta nei punti estremali di $\overline{\mathcal{U}}$, soddisfa anche (4). Si può dimostrare che $\mathcal{U}$ contiene l'origine: pertanto l'Osservazione 3 e la Proposizione 4 mostrano l'esistenza di un'onda piana localizzata a valori in $\mathcal{U}$. Il nostro obiettivo è allora costruire induttivamente una serie

$$(v, u, q) = \sum_{i=1}^{\infty} (v_i, u_i, q_i)$$

con le seguenti proprietà

- le immagini delle somme $\sum_{i=0}^{k}(v_i, u_i, q_i)$ sono contenute in $\mathcal{U}$,
- (v, u, q) è supportata in Ω,
- per quasi ogni $y \in \Omega$, $(v(y), u(y), q(y))$ è un punto estremale di $\overline{\mathcal{U}}$,
- (v, u, q) risolve il sistema lineare (3).

Ci sono due motivi fondamentali che rendono possibile la costruzione di una serie con le proprietà elecante. Inannzitutto, siccome il cono delle onde di Λ è un insieme sufficiente ampio, è possibile scegliere induttivamente le (v_k, u_k, p_k) in modo da avvicinare sempre più l'immagine di $\sum_{i=0}^{k}(v_i, u_i, q_i)$ ai punti estremali di $\mathcal{U}$. In secondo luogo, visto che le onde sono locallizate, è possibile, ad ogni passo, scegliere un supporto piccolo e una frequenza alta rispetto alle onde dei passi precedenti. È una scelta appropriata di questi parametri che assicura la convergenza forte delle sommatorie parziali.

L'idea appena delineata è filosoficamente quella dell'integrazione convessa di Gromov (nella versione data da Müller e Šverák per mappe Lipschitz, vedi [15]) dove la difficoltà sta nel mostrare la convergenza forte delle somme parziali. Gli argomenti alla Baire scavalcano questa difficoltà introducendo un'opportuna metrica nello spazio delle soluzioni di (3) a valori in $\mathcal{U}$ e dimostrando che, nella chiusura di questo spazio, l'immagine di un elemento generico è contenuta nei punti estremali di $\mathcal{U}$.

REFERENCES

[1] A. Bressan - F. Flores, *On total differential inclusions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **92** (1994), 9-16.

[2] A. Cellina, *On the differential inclusion $x' \in [-1, +1]$*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **69** (1980), 1-2 (1981), 1-6.

[3] A. J. Chorin, *Vorticity and turbulence*, vol. **103** of Applied Mathematical Sciences, (Springer-Verlag, New York, 1994).

[4] B. Dacorogna - P. Marcellini, *General existence theorems for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and vectorial cases*, Acta Math., **178** (1997), 1-37.

[5] C. M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Vol. **325** of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] (Springer-Verlag, Berlin, 2000).

[6] C. De Lellis - L. Székelyhidi Jr., *The Euler equations as a differential inclusion*, Preprint. To appear in Ann. of Math. (2007).

[7] C. De Lellis - L. Székelyhidi Jr., *On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations*, Preprint (2008).

[8] R. J. Di Perna, *Compensated compactness and general systems of conservation laws*, Trans. Amer. Math. Soc., **292**, 2 (1985), 383-420.

[9] R. J. Di Perna - A. J. Majda, *Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow*, Comm. Pure Appl. Math., **40**, 3 (1987), 301-345.

[10] U. FRISCH, *Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge (1995), The legacy of A. N. Kolmogorov.

[11] B. KIRCHHEIM, *Deformations with finitely many gradients and stability of quasiconvex hulls*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **332**, 3 (2001), 289-294.

[12] B. KIRCHHEIM, *Rigidity and Geometry of microstructures*, Habilitation Thesis, University of Leipzig (2003).

[13] B. KIRCHHEIM - S. MÜLLER - V. ŠVERÁK, *Studying nonlinear PDE by geometry in matrix space*, in *Geometric analysis and Nonlinear partial differential equations*, S. Hildebrandt and H. Karcher, Eds. (Springer-Verlag, 2003), 347-395.

[14] A. J. MAJDA - A. L. BERTOZZI, *Vorticity and incompressible flow*, Vol. **27** of Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press (Cambridge, 2002).

[15] S. MÜLLER - V. ŠVERÁK, *Convex integration for Lipschitz mappings and counterexamples to regularity*, Ann. of Math. (2), **157** (2003), 715-742.

[16] V. SCHEFFER, *An inviscid flow with compact support in space-time*, J. Geom. Anal., **3**, 4 (1993), 343-401.

[17] A. SHNIRELMAN, *On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation*, Comm. Pure Appl. Math., **50**, 12 (1997), 1261-1286.

[18] A. SHNIRELMAN, *Weak solutions with decreasing energy of incompressible Euler equations*, Comm. Math. Phys., **210**, 3 (2000), 541-603.

[19] T. TAO, *Nonlinear dispersive equations*, vol. **106** of CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC (2006), Local and global analysis.

[20] L. TARTAR, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*. In *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. IV*, vol. **39** of Res. Notes in Math., Pitman (Boston, Mass., 1979), 136-212.

[21] L. TARTAR, *The compensated compactness method applied to systems of conservation laws*. In *Systems of nonlinear partial differential equations (Oxford, 1982)*, vol. **111** of NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., Reidel (Dordrecht, 1983), 263-285.

[22] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations*, third ed., vol. **2** of Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland Publishing Co. (Amsterdam, 1984). Theory and numerical analysis, With an appendix by F. Thomasset.

Institut für Mathematik, Universität Zürich, CH-8057 Zürich
e-mail: camillo.delellis@math.unizh.ch

Received February 24, 2008 and in revised form June 16, 2008