

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

ANDREA TOSIN

## Un approccio multiscala alla dinamica delle folle mediante misure che evolvono nel tempo

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. 6 (2013), n.3,*  
p. 531–548.

Unione Matematica Italiana

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2013\\_9\\_6\\_3\\_531\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2013_9_6_3_531_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Un approccio multiscala alla dinamica delle folle mediante misure che evolvono nel tempo

ANDREA TOSIN

**Sunto.** – Questo articolo riguarda la modellizzazione matematica di sistemi complessi viventi, in particolare le folle, mediante leggi di conservazione e metodi della teoria della misura. Introdurremo un quadro modellistico che permette di trattare sistemi dinamici discreti e continui mediante idee fenomenologiche e strumenti matematici comuni, nonché di accoppiare le due descrizioni in un'ottica multiscala. Inoltre presenteremo una teoria qualitativa di buona positura e approssimazione numerica dei problemi ai valori iniziali e discuteremo le sue implicazioni sulla modellistica.

**Abstract.** – This paper deals with models of living complex systems, chiefly human crowds, by methods of conservation laws and measure theory. We introduce a modeling framework which enables one to address both discrete and continuous dynamical systems in a unified manner using common phenomenological ideas and mathematical tools as well as to couple these two descriptions in a multiscale perspective. Furthermore, we present a basic theory of well-posedness and numerical approximation of initial-value problems and we discuss its implications on mathematical modeling.

### 1. – Introduzione

Per *sistemi complessi viventi* intendiamo sistemi multi-agente costituiti da individui animati che partecipano a *dinamiche di gruppo* mentre cercano di raggiungere *obiettivi individuali*. Nello specifico, in questo articolo ci occuperemo di folle. Assimileremo i pedoni a *particelle attive*, essendo l'*attività* la capacità di stabilire autonomamente uno o più obiettivi intermedi e finali (ad esempio evitare collisioni con altre particelle, raggiungere una meta) e agire direttamente sulla propria dinamica per raggiungerli, senza essere soggette passivamente a influenze esterne. Ciò origina dinamiche *collettive* basate prevalentemente sulle decisioni e sulle regole di comportamento *individuali*. Talvolta le particelle attive cooperano per raggiungere un obiettivo di gruppo, come nei problemi di *consensus* e di *rendez-vous* [3]. Altre volte, invece, esse non cooperano consapevolmente, il che rende le dinamiche di gruppo più difficili da prevedere e, ciononostante, spesso sorprendentemente ordinate e coordinate: è la cosiddetta *auto-organizzazione* [7].

Per modellizzare simili sistemi è necessario mettere a punto schemi matematici che consentano di gestirne la complessità, in parte dovuta al fatto che la dinamica complessiva è, in definitiva, *multiscala*. Essa si origina dai comportamenti individuali alla scala *microscopica* delle singole particelle. Questi comportamenti, poi, sono “amplificati” dalle interazioni tra le particelle, fino al punto che essi ne inducono di collettivi alla scala *macroscopica* del gruppo non direttamente deducibili dalla conoscenza di quelli individuali. Peraltro, lo stato del gruppo può incidere localmente sulle regole comportamentali adottate dalle singole particelle.

Un'ampia classe di modelli matematici utilizza le cosiddette *leggi di conservazione* o di *bilancio*, che esprimono il fatto che alcune quantità fisiche, quali la massa, la quantità di moto, l'energia del sistema, non variano durante l'evoluzione oppure cambiano per via di specifici meccanismi di produzione/distruzione. Tuttavia i sistemi viventi sono difficilmente confinabili entro stretti principi di bilancio. Ad esempio, la loro capacità di perseguire obiettivi, e di conseguenza di elaborare *strategie comportamentali*, fa sì che essi immettano e rimuovano continuamente energia dal sistema in modi non convenzionali. Non a caso, i principi di entropia normalmente legati all'equiprobabilità degli stati sono messi in discussione dal fatto che l'auto-organizzazione induce configurazioni speciali, tipicamente disomogenee, a discapito di altre più generiche e omogenee [15]. Inoltre è difficile ascrivere le variazioni di quantità di moto a forze “generalizzate” (in qualche senso), perché le dinamiche dei sistemi viventi non sono regolate unicamente dall'inerzia. Beninteso, le particelle attive non sfuggono alle usuali leggi della Fisica, ma possono influenzarle mediante decisioni personali i cui effetti non sono necessariamente assimilabili a quelli di campi di forza esterni. In altre parole, non sarebbe corretto applicare direttamente le stesse idee che permettono di descrivere con successo altri tipi di sistemi passivi, poiché attraverso una simile analogia si perderebbe gran parte delle caratteristiche che differenziano i sistemi viventi dalla materia inerte.

Tra tutti i principi di bilancio classici summenzionati, probabilmente quello meno discutibile è la conservazione della massa: nel descrivere l'evoluzione spazio-temporale di una folla, ha senso assumere che non si verifichino fenomeni di proliferazione o distruzione di pedoni. Si noti che ciò non implica di per sé alcuna specifica dinamica di interazione tra gli individui, ma richiede semplicemente l'invariabilità del loro numero. Quindi le interazioni possono ancora essere meccaniche o non-meccaniche, locali o non-locali, binarie o multiple, e così via.

A partire dal principio di conservazione della massa, in questo articolo sviluppiamo uno schema matematico unificato che permette di modellizzare una folla integrando la descrizione discreta dei pedoni individuali e quella continua del gruppo collettivo. Il punto chiave è la reinterpretazione dell'equazione di continuità in termini di misure astratte caratterizzate da una parte singolare (delte di Dirac), che rappresenta il livello discreto, e una assolutamente continua

(rispetto alla misura di Lebesgue), che rappresenta il livello continuo. In dettaglio, nella Sezione 2 dapprima introduciamo l'equazione astratta e successivamente la particolareggiamo nel caso di modelli di interazione pedonale. Nella Sezione 3 discutiamo l'utilizzo della formulazione con le misure per ottenere modelli discreti, continui e multiscala, mettendo in relazione la struttura della misura con la strategia comportamentale dei pedoni. Nella Sezione 4 esponiamo i risultati qualitativi di base su buona positura e approssimazione numerica del problema di Cauchy per le strutture matematiche multiscala dedotte nelle sezioni precedenti. Infine, nella Sezione 5 discutiamo come questi risultati qualitativi possano fornire utili linee guida per la costruzione di modelli specifici non solo fisicamente realistici ma anche matematicamente solidi.

## 2. – Modelli matematici con misure che evolvono nel tempo

Dal punto di vista matematico, la *massa* di un sistema  $d$ -dimensionale ( $d = 1, 2, 3$  per scopi pratici) al tempo  $t$  è una misura positiva di Radon  $\mu_t : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$  definita sulla  $\sigma$ -algebra di Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  nello spazio fisico  $\mathbb{R}^d$ . Nel nostro caso, per ogni insieme misurabile  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  il numero  $\mu_t(E) \geq 0$  fornisce una stima dell'affollamento della regione spaziale  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  all'istante  $t$  (idealmente, possiamo pensarlo come il numero "medio" di pedoni che occupano la regione  $E$  al tempo  $t$ ). In particolare, se consideriamo una folla composta da un numero totale  $N$  di pedoni allora, in base al principio di conservazione della massa, dovrà essere  $\mu_t(\mathbb{R}^d) = N$  per ogni  $t$ . Ciò si può esprimere, in termini dinamici, dicendo che la misura  $\mu_t$  soddisfa l'equazione:

$$(1) \quad \frac{\partial \mu_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu_t v_t) = 0,$$

dove  $v_t = v_t(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  è, al tempo  $t$ , un campo di velocità di trasporto. Chiaramente, la scrittura (1) è solo formale e va intesa nell'opportuno senso debole delle distribuzioni. Per ogni funzione test  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  e per ogni  $t \in (0, T_{\max}]$ , essendo  $T_{\max} > 0$  un tempo finale, essa significa:

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) d\mu_t(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) d\mu_0(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} v_s(x) \cdot \nabla \phi(x) d\mu_s(x) ds,$$

dove  $\mu_0$  è una misura positiva di Radon da assegnare, che rappresenta la distribuzione iniziale della folla. Se la velocità di trasporto è limitata, ossia esiste una costante  $V_{\max} > 0$  tale che

$$|v_t(x)| \leq V_{\max}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, t \in (0, T_{\max}],$$

non è difficile mostrare che la (2) implica effettivamente  $\mu_t(\mathbb{R}^d) = \mu_0(\mathbb{R}^d)$  per ogni

$t \in (0, T_{\max}]$ , quindi di fatto la conservazione del numero totale di pedoni così come fissato all'istante iniziale. Basta infatti prendere una successione  $\{\phi_m\}_{m \geq 1} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  di funzioni test tali che  $0 \leq \phi_m(x) \leq 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^d$  e ogni  $m \geq 1$ , con inoltre  $\phi_m(x) \rightarrow 1$  e  $\nabla \phi_m(x) \rightarrow 0$  puntualmente per  $m \rightarrow \infty$ , e usare il teorema della convergenza dominata (l'esistenza di una tale successione è garantita dal lemma di Urysohn).

## 2.1 – Modelli di interazione tra i pedoni

Le equazioni (1), (2) forniscono l'evoluzione nel tempo della distribuzione  $\mu_t$  della folla purché sia assegnata una velocità di trasporto. Per quanto detto nell'Introduzione, data l'assenza di un bilancio di quantità di moto da accoppiare alla conservazione della massa, è necessario modellizzare direttamente il campo  $v_t$ .

Altri modelli di folla disponibili in letteratura seguono un'idea simile, si vedano ad esempio [4, 5]. Tipicamente, la velocità dei pedoni è ricavata da una relazione costitutiva empirica, detta *diagramma fondamentale*, che la esprime come una funzione nota della distribuzione spaziale della folla in condizioni (localmente) stazionarie omogenee. Qui, invece, proponiamo una modellizzazione di  $v_t$  maggiormente incentrata sulle interazioni tra i pedoni, cercando di fondare la dinamica del sistema direttamente sull'idea di comportamento attivo discussa nell'Introduzione. A questo scopo, scriviamo la velocità come la somma di due contributi:

$$(3) \quad v_t(x) := v_d(x) + v_i[\mu_t](x),$$

dove la notazione con le parentesi quadre indica una dipendenza funzionale dalla misura  $\mu_t$ .

La funzione  $v_d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  è la *velocità desiderata*, cioè la velocità con cui un pedone isolato si dirigerebbe verso la propria destinazione. Essa non dipende dalla dinamica del sistema, ma è determinata a priori sulla base della geometria del dominio, inclusa la presenza di eventuali ostacoli intesi come buchi in  $\mathbb{R}^d$ , ovvero zone non accessibili ai pedoni (vedi Figura 1a). Viceversa, la funzione  $v_i[\mu_t] : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  è la *velocità di interazione*, cioè la correzione che i pedoni apportano alla velocità desiderata a causa delle interazioni reciproche. Essa tiene conto del fatto che gli individui cercano generalmente di evitare le zone troppo affollate, dunque ha un carattere essenzialmente *repulsivo* (vedi Figure 1b-c). Inoltre il suo effetto è *non locale*, perché i pedoni anticipano le proprie decisioni sintetizzando l'informazione sulla distribuzione di folla nelle immediate vicinanze. In base a queste considerazioni, poniamo:

$$(4) \quad v_i[\mu_t](x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) \eta_{S(x)}(y) d\mu_t(y),$$

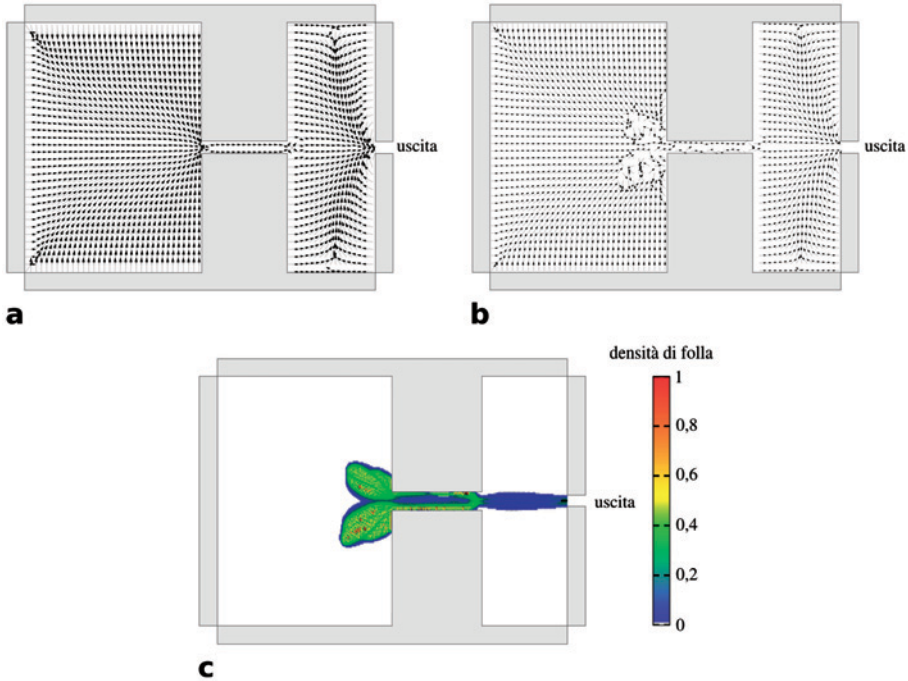


Fig. 1. – **a.** Esempio di campo di velocità desiderata  $v_d$  in un dominio costituito da due aree comunicanti mediante un corridoio stretto. **b.** Velocità “vera”  $v$  (cfr. l’equazione (3)) quando alla velocità desiderata si sovrappone la velocità di interazione  $v_i$  tra i pedoni. **c.** Campo di densità di folla che genera la velocità vera illustrata in (b).

dove:

- $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  è il *nucleo di interazione*, che descrive come l’individuo in  $x$ , detto *pedone test*, è repulso da un individuo in  $y$ , detto *pedone campo*. Solitamente, anche in virtù del principio di invarianza galileiana, la funzione  $K$  dipende da  $x$  e  $y$  attraverso la loro distanza  $|y - x|$  lungo la linea che congiunge i due punti. Un prototipo è:

$$K(x, y) \sim -\frac{1}{|y - x|} \cdot \frac{y - x}{|y - x|}$$

per  $|y - x|$  “non troppo” piccola, mentre per  $y \rightarrow x$  è necessario introdurre una regolarizzazione che eviti la singolarità sia del modulo sia del versore;

- $\eta_{S(x)} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  è una *funzione di taglio*, che limita l’influenza sul pedone test in  $x$  ai pedoni campo contenuti all’interno della *regione di sensibilità*  $S(x) \subset \mathbb{R}^d$  del primo. Tipicamente,  $\eta_{S(x)}$  è regolare e ha supporto compatto in  $S(x)$  (ad esempio, può essere un’opportuna mollificata della funzione caratteristica dell’insieme  $S(x)$ ). Il prototipo di regione di sensibilità è un

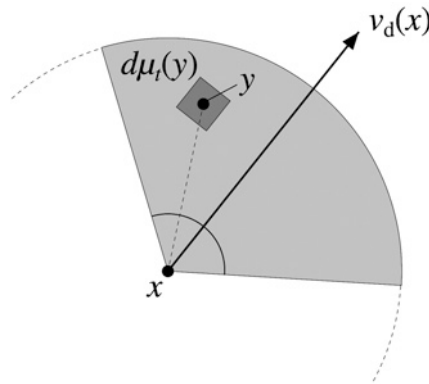


Fig. 2. – Regione di sensibilità del pedone test in  $x$ .

settore circolare centrato in  $x$ , simmetrico rispetto alla direzione locale della velocità desiderata  $v_d(x)$  e orientato nel verso di quest'ultima (vedi Figura 2). Ciò traduce l'*anisotropia* delle interazioni tra i pedoni: il pedone test è sensibile ai pedoni campo che ha davanti a sé ma non a quelli che ha dietro. Il raggio del settore circolare corrisponde alla massima distanza alla quale un pedone campo può esercitare un'influenza sul pedone test, mentre l'angolo di apertura del settore identifica il cono visivo di quest'ultimo.

### 3. – Approccio multiscala

Le equazioni (1), (3), (4) forniscono un quadro modellistico unificato all'interno del quale rientrano sia *dinamiche discrete* sia *dinamiche continue*. Il punto chiave è la *struttura spaziale* della misura  $\mu_t$ .

Si hanno dinamiche discrete se la struttura spaziale di  $\mu_t$  è discreta:

$$(5) \quad \mu_t = \sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)},$$

essendo  $\{x_i(t)\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^d$  l'insieme di tutti e soli i punti su cui sono distribuiti i pedoni al tempo  $t$ . Inserendo la (5) nelle equazioni (2), (4) si ottiene il sistema:

$$(6) \quad \dot{x}_i = v_d(x_i) + \sum_{j=1}^N K(x_i, x_j) \eta_{S(x_i)}(x_j) \quad (i = 1, \dots, N)$$

che caratterizza completamente l'evoluzione della distribuzione dei pedoni.

Si hanno invece dinamiche continue se la struttura spaziale di  $\mu_t$  è continua, cioè se vale la proporzionalità tra massa e volume (nel senso del teorema di



Radon-Nikodym):

$$(7) \quad d\mu_t(x) = \rho_t(x) dx,$$

essendo ora  $\rho_t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  la *densità di massa* della distribuzione dei pedoni al tempo  $t$ , tale che  $\int \rho_t(x) dx = N$  (quindi, in particolare,  $\rho_t \in L^1(\mathbb{R}^d)$  per ogni  $t$ ). In questo contesto, il supporto in  $\mathbb{R}^d$  di  $\rho_t$  è concettualmente l'analogo dell'insieme  $\{x_i(t)\}_{i=1}^N$  visto sopra. Inserendo la (7) nelle equazioni (2), (4) si ottiene:

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_t(x) + \nabla \cdot \left[ \rho_t(x) \left( v_a(x) + \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) \eta_{S(x)}(y) \rho_t(y) dy \right) \right] = 0,$$

cioè una legge di conservazione con flusso non locale che caratterizza a sua volta completamente l'evoluzione della distribuzione dei pedoni.

Le equazioni (6), (8) descrivono lo stesso sistema e le stesse dinamiche? Sì e no. Esse esprimono due modelli matematici diversi dello stesso sistema fisico, che tuttavia discendono dalla struttura comune astratta (1)-(4). Come tali, essi sono accomunati dalla descrizione fenomenologica delle *interazioni microscopiche individuali*, espresse dal nucleo  $K$  e dalla funzione di taglio  $\eta_{S(\cdot)}$ , ma si differenziano per l'*effetto macroscopico collettivo* predetto, che dipende dalla struttura spaziale della misura  $\mu_t$  nell'equazione (4).

Più precisamente, è utile interpretare la struttura spaziale di  $\mu_t$  come l'equivalente modellistico della *percezione* del pedone test, la quale condiziona il modo in cui quest'ultimo reagisce agli individui intorno a sé. Ciò corrisponde all'espressione di una *strategia comportamentale*, che può avere un impatto rilevante sulle leggi classiche del moto (si veda anche [2] per una traduzione modellistica diversa del concetto di percezione, comunque sempre legata all'espressione di una strategia comportamentale dei pedoni). Perciò, anche se le regole elementari di interazione sono sempre le stesse, il loro effetto può essere estremamente diverso a causa del "filtro" della percezione. Una simile fenomenologia è possibile perché una folla è un sistema *vivente e granulare*: il numero di individui coinvolti, per quanto complessivamente elevato, è localmente sempre finito e "piccolo" (almeno rispetto all'ordine di grandezza del numero di Avogadro nella gasdinamica classica), per cui le dinamiche collettive su larga scala possono essere molto sensibili alle scelte individuali su scale inferiori.

Il concetto di percezione si può formalizzare modellisticamente mediante un parametro  $\theta \in [0, 1]$  da utilizzare per determinare una *scala* di strutture spaziali della misura  $\mu_t$ :

$$(9) \quad \mu_t = \theta \sum_{j=1}^N \delta_{x_j(t)} + (1 - \theta) \rho_t \mathcal{L}^d,$$

dove  $\mathcal{L}^d$  è la misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^d$ . Inserendo questa rappresentazione

nell'equazione (4) si vede come la velocità di trasporto (3):

$$(10) \quad v_t(x) = v_d(x) + \theta \sum_{j=1}^N K(x, x_j) \eta_{S(x)}(x_j) + (1 - \theta) \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) \eta_{S(x)}(y) \rho_t(y) dy$$

dipenda ora da un contributo pesato di dinamiche discrete e continue. Chiaramente, le due scelte discusse in precedenza corrispondono ai casi particolari  $\theta = 0$  (per le dinamiche continue) e  $\theta = 1$  (per le dinamiche discrete). Tuttavia, se  $0 < \theta < 1$  il formalismo introdotto consente di trattare, più in generale, dinamiche ibride né completamente discrete né completamente continue [8]. Inoltre, il trasporto della misura (9) mediante l'equazione (1) con il campo di velocità (10) permette addirittura di dare una rappresentazione puramente continua della distribuzione dei pedoni che evolve in base a dinamiche genuinamente discrete o, viceversa, una rappresentazione puramente discreta che evolve in base a dinamiche genuinamente continue. Infine, se il parametro di percezione  $\theta$  è reso variabile in spazio il modello introdotto permette di differenziare i due tipi di dinamiche in zone diverse del dominio (si veda ad esempio [9], dove quest'idea è utilizzata nel caso del traffico veicolare per privilegiare dinamiche continue lungo tratti di strada rettilinei e dinamiche discrete agli incroci, dove la percezione dei guidatori è maggiormente sensibile alle auto provenienti da direzioni confluenti).

#### 4. – Teoria di base

Una volta che sia assegnata una misura iniziale, diciamo  $\bar{\mu}$ , il modello basato sull'equazione (1) con il campo di velocità del tipo (3)-(4) dà luogo ad un problema di Cauchy che rientra nella seguente classe:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mu_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu_t v[\mu_t]) = 0 & x \in \mathbb{R}^d, t \in (0, T_{\max}] \\ \mu_0 = \bar{\mu}, \end{cases}$$

dove con  $v[\mu_t]$  abbiamo indicato un generico campo di velocità completamente determinato dalla misura  $\mu_t$  (incognita).

In generale  $\mu_t$  nasce come misura finita su  $\mathbb{R}^d$  ma non come misura di probabilità. Infatti sappiamo che se  $\bar{\mu}(\mathbb{R}^d) = N$  allora  $\mu_t(\mathbb{R}^d) = N$  per ogni istante  $t \leq T_{\max}$  successivo a quello iniziale, ma ovviamente dovrà essere  $N > 1$  affinché il modello descriva situazioni interessanti. Tuttavia, per la trattazione analitica del problema (11) conviene immaginare che, a prescindere dalla sua derivazione modellistica,  $\mu_t$  sia riscalata rispetto al numero totale  $N$  di pedoni in modo che sia formalmente una probabilità. In questo modo è possibile individuare più agevolmente gli spazi funzionali e le metriche giuste per inquadrare il problema (11).

Pertanto d'ora in avanti supporremo di aver implicitamente effettuato il suddetto riscaldamento (continuando peraltro a chiamare  $\mu_t$  la misura riscalata)<sup>(1)</sup>.

Un opportuno senso debole in cui il problema (11) può essere inteso è quello specificato dall'equazione (2) (in cui si ponga  $\mu_0 = \bar{\mu}$ ). In particolare, la (2) è ben definita se  $t \mapsto \mu_t$  è continua come mappa dall'intervallo  $(0, T_{\max}]$  in qualcuno degli spazi metrici  $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$  delle misure di probabilità su  $\mathbb{R}^d$  con momento  $p$ -esimo finito ( $p \geq 1$ , si veda [1] come riferimento tecnico). Senza perdita di generalità fissiamo  $p = 1$ , cioè considereremo lo spazio  $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ , che è completo con la metrica

$$W_1(\mu, \nu) := \sup_{\varphi \in \text{Lip}_1(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d(\mu - \nu) \quad (\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)),$$

detta (prima) *distanza di Wasserstein*. In questa definizione,  $\text{Lip}_1(\mathbb{R}^d)$  indica l'insieme delle funzioni lipschitziane su  $\mathbb{R}^d$  con costante di Lipschitz non superiore a 1.

In definitiva, diremo che:

**DEFINIZIONE 4.1.** – *Una curva  $\mu_\bullet \in C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$  è soluzione (debole) del problema (11) se essa soddisfa l'equazione (2), con  $\mu_0 = \bar{\mu}$ , per ogni  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  e per ogni  $t \in (0, T_{\max}]$ .*

La teoria di base per il problema (11) dipende essenzialmente dalle proprietà del campo di velocità. Formuliamo ora in proposito alcune ipotesi, valide per campi  $v$  sufficientemente generici (cioè non riferite esplicitamente alla struttura (3)-(4)), dalle quali seguono sia la buona positura del problema di Cauchy sia la convergenza di un opportuno schema numerico, basato sul trasporto di misure, per l'approssimazione delle soluzioni.

**IPOTESI 4.2.** – *Supponiamo che il campo di velocità  $v$  verifichi le seguenti proprietà:*

(i) *limitatezza uniforme: esiste una costante  $V_{\max} > 0$  tale che*

$$|v[\mu](x)| \leq V_{\max}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d);$$

<sup>(1)</sup> Osserviamo che se  $\mu_t$  è riscalata ad una misura di probabilità allora la velocità di interazione (4) dev'essere coerentemente riscritta come

$$v_i[\mu_t](x) = N \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) \eta_{S(x)}(y) d\mu_t(y)$$

per effetto del riscaldamento.

(ii) lipschitzianità: *esiste una costante  $\text{Lip}(v) > 0$  tale che*

$$|v[v](y) - v[\mu](x)| \leq \text{Lip}(v)(|y - x| + W_1(\mu, \nu)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d);$$

(iii) linearità debole: *per ogni  $a \in [0, 1]$  e ogni coppia di misure  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$  si ha*

$$v[a\mu + (1 - a)\nu] = av[\mu] + (1 - a)v[\nu].$$

OSSERVAZIONE. – Abbiamo chiamato l'ipotesi 4.2(iii) *linearità debole* in quanto essa richiede la linearità della mappa  $\mu \mapsto v[\mu]$  limitatamente alle sole combinazioni lineari *convesse*.

È importante tenere presente che le Ipotesi 4.2 non intendono essere strettamente minimali dal punto di vista analitico tecnico. Esse sono prima di tutto pensate per modelli da applicare a casi studio realistici; in questo senso, hanno il pregio di essere verificabili in modo relativamente agevole in casi concreti. Inoltre, esse consentono dimostrazioni che non richiedono tecniche sofisticate di trasporto ottimo.

#### 4.1 – Buona positura del problema (11)

Usando la sola ipotesi 4.2(ii) è possibile provare la seguente stima a priori sulle soluzioni del problema (11): se  $\mu_\bullet^1, \mu_\bullet^2 \in C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$  sono due soluzioni corrispondenti a due dati iniziali  $\bar{\mu}^1, \bar{\mu}^2 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$  esiste una costante  $C > 0$  tale che

$$(12) \quad W_1(\mu_t^1, \mu_t^2) \leq CW_1(\bar{\mu}^1, \bar{\mu}^2), \quad \forall t \in (0, T_{\max}].$$

Dunque la soluzione di (11), se esiste, è unica e inoltre dipende con continuità dal dato iniziale. La costante  $C$  dipende dalla costante di Lipschitz  $\text{Lip}(v)$  della velocità e dal tempo finale  $T_{\max}$ .

Per la dimostrazione della (12) si veda, ad esempio, [6]. Qui ci limitiamo a precisare che la tecnica classica fa uso della seguente *formula di rappresentazione* delle soluzioni del problema (11): se  $\mu_\bullet \in C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$  è una soluzione corrispondente al dato iniziale  $\bar{\mu} \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$  allora, introdotta la *mappa di flusso*  $\gamma_t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  definita da:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \gamma_t(x) = v[\mu_t](\gamma_t(x)), & x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in (0, T_{\max}] \\ \gamma_0(x) = x, & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

risulta  $\mu_t = \gamma_t \# \bar{\mu}$ , dove  $\#$  è l'operatore di trasporto o *push forward* (cioè  $\mu_t(E) = \bar{\mu}(\gamma_t^{-1}(E))$ ) per ogni  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ). Questa formula di rappresentazione si verifica facilmente usando l'equazione (2).

Grazie poi alle ulteriori ipotesi 4.2(i) e 4.2(iii) si dimostra anche l'esistenza di soluzioni del problema (11) per dati iniziali  $\bar{\mu} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ , si veda [16]. La richiesta che il dato iniziale appartenga a  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ , cioè abbia momenti primo e secondo finiti, è prevalentemente tecnica. Tuttavia, dal punto di vista delle applicazioni essa non costituisce affatto una limitazione perché i dati iniziali avranno tipicamente supporto *compatto* (in effetti non sarebbe molto realistico immaginare una folla sparpagliata su tutto  $\mathbb{R}^d$ ), dunque i loro momenti di *qualsiasi* ordine  $p$  saranno automaticamente finiti. Infatti:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^p d\bar{\mu}(x) = \int_{\text{supp}(\bar{\mu})} |x|^p d\bar{\mu}(x) \leq R^p < +\infty,$$

essendo  $R$  il raggio di una delle palle centrate nell'origine che contengono  $\text{supp}(\bar{\mu})$ .

In definitiva, si può quindi stabilire il seguente risultato di buona positura del problema di Cauchy (11):

**TEOREMA 4.3.** – *Valgano le Ipotesi 4.2. Per ogni  $\bar{\mu} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  esiste ed è unica la soluzione  $\mu_\bullet \in C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$  del problema (11) nel senso della Definizione 4.1. Inoltre, essa dipende con continuità dal dato iniziale secondo la stima (12).*

#### 4.2 – Schema numerico e sua convergenza

Per l'approssimazione della soluzione del problema (11) si può utilizzare lo schema numerico introdotto in [13, 14], poi ulteriormente dettagliato per modelli multiscala in [8] e adottato anche in [3, 11]. In breve, l'idea è di approssimare  $\mu_t$  con una misura *assolutamente continua* rispetto a Lebesgue, costante a tratti su una partizione disgiunta di  $\mathbb{R}^d$ . Quest'ultima, anche detta *griglia di calcolo*, è formata da celle  $E_i$  di dimensione caratteristica  $h > 0$  tale che  $\mathcal{L}^d(E_i) \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0^+$ :

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^d} E_i, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Per  $d = 2$  (che è il caso di dimensione spaziale più interessante per simulazioni di folle) le celle  $E_i$  possono essere quadrati di lato  $h$ . La generalizzazione più naturale ad una dimensione qualsiasi si ottiene usando ipercubi di lato  $h$ , cosicché  $\mathcal{L}^d(E_i) = h^d$ .

Detta  $\tilde{\mu}_n$  l'approssimazione di  $\mu_t$  all'istante di tempo discreto  $t_n = n\Delta t$ , essendo  $\Delta t > 0$  un passo di tempo fissato, risulta per costruzione  $d\tilde{\mu}_n = \tilde{\rho}_n dx$ , dove  $\tilde{\rho}_n = \tilde{\rho}_n(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  è la densità che lo schema numerico deve determinare.

Essa, ancora per costruzione, è costante a tratti sulla griglia  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ , perciò si può rappresentare come

$$(14) \quad \tilde{\rho}_n(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho_i^n \chi_{E_i}(x)$$

con  $\chi_{E_i}$  funzione caratteristica della cella  $E_i$ . Le incognite sono pertanto i coefficienti  $\rho_i^n \geq 0$ .

Lo schema si costruisce imponendo dapprima che, in un passo di tempo, la misura  $\tilde{\mu}_n$  sia trasportata nella nuova misura  $\tilde{\mu}_{n+1}$  da un'opportuna discretizzazione della mappa di flusso (13):  $\tilde{\mu}_{n+1} = \tilde{\gamma}_n \# \tilde{\mu}_n$  e poi testando questa relazione sulle sole celle della griglia di calcolo:  $\tilde{\mu}_{n+1}(E_i) = \tilde{\mu}_n(\tilde{\gamma}_n^{-1}(E_i))$ . Riscritta mediante la densità numerica (14), quest'uguaglianza permette di ricavare la seguente relazione ricorsiva tra i coefficienti  $\rho_i^n$  e quelli al passo di tempo successivo  $\rho_i^{n+1}$ :

$$(15) \quad \rho_i^{n+1} = \frac{1}{h^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \rho_j^n \mathcal{L}^d(E_i \cap \tilde{\gamma}_n(E_j)) \quad (i \in \mathbb{Z}^d).$$

Essa esprime il fatto che in un passo di tempo la densità numerica è ridistribuita sulla griglia di calcolo in modo proporzionale alla misura (di Lebesgue) delle intersezioni tra la celle mosse dalla mappa di flusso discreta  $\tilde{\gamma}_n$  (si veda la Figura 3). In particolare, quest'ultima è ottenuta cella per cella come:

$$\tilde{\gamma}_n(x) = x + v[\tilde{\mu}_n](x_i) \Delta t \quad \text{per } x \in E_i,$$

dove  $x_i$  denota un punto qualsiasi di  $E_i$ , ad esempio il suo centro. Di fatto,  $\tilde{\gamma}_n$  agisce in ogni cella come una traslazione rigida di velocità costante  $v[\tilde{\mu}_n](x_i)$ , ovvero la velocità  $v$  del problema esatto (11) calcolata in  $x = x_i$  rispetto alla misura approssimata  $\tilde{\mu}_n$ .

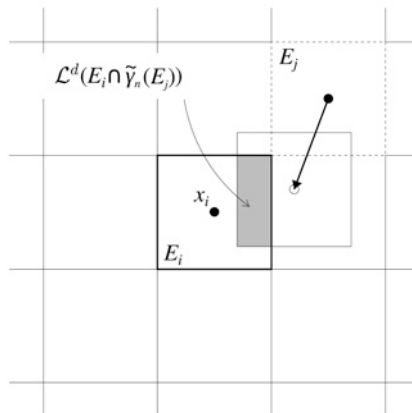


Fig. 3. – Azione dello schema numerico (15) sulle celle di calcolo.

Nonostante la misura numerica  $\tilde{\mu}_n$  sia scelta assolutamente continua rispetto a Lebesgue, lo schema (15) può approssimare soluzioni del problema (11) aventi struttura spaziale generica. Vale infatti il seguente risultato:

**TEOREMA 4.4.** – *Si consideri una successione di griglie spazio-temporali indicizzate da  $k = 0, 1, 2, \dots$ , con parametri di griglia  $h_k, \Delta t_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$ . Sia  $\tilde{\mu}_t^k$  l'interpolata lineare a tratti delle soluzioni numeriche  $\tilde{\mu}_n^k$  calcolate sulla  $k$ -esima griglia mediante lo schema (15):*

$$\tilde{\mu}_t^k = \sum_{n=0}^{N_{\max}^k-1} \left[ \left( 1 - \frac{t - t_n^k}{\Delta t_k} \right) \tilde{\mu}_n^k + \frac{t - t_n^k}{\Delta t_k} \tilde{\mu}_{n+1}^k \right] \chi_{[t_n^k, t_{n+1}^k]}(t),$$

dove  $t_n^k = n\Delta t_k$  ed  $N_{\max}^k$  è il numero di passi di tempo discreti sulla  $k$ -esima griglia temporale necessari per raggiungere il tempo finale  $T_{\max}$ .

Supponiamo che valgano le Ipotesi 4.2, che il dato iniziale sia discretizzato ponendo:

$$(\rho_i^0)^k = \frac{\bar{\mu}(E_i^k)}{h_k^d} \quad (i \in \mathbb{Z}^d)$$

e inoltre che le griglie spazio-temporali siano scelte in modo che  $h_k = o(\Delta t_k)$  per  $k \rightarrow \infty$ .

Se  $\tilde{\mu}_\bullet^k$  converge in  $C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$  ad una  $\mu_\bullet$ , quando  $k \rightarrow \infty$  nel senso seguente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T_{\max}]} W_1(\tilde{\mu}_t^k, \mu_t) = 0$$

allora  $\mu_\bullet$  è una soluzione (debole) del problema (11) nel senso della Definizione 4.1.

Si noti che questo teorema non garantisce, bensì *assume*, la convergenza della soluzione numerica ad una curva  $\mu_\bullet \in C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ . Per questo, esso ricorda nella sostanza il teorema di Lax-Wendroff relativo agli schemi numerici per le leggi di conservazione iperboliche [10]. Tuttavia è possibile integrarlo con un semplice criterio che assicura la suddetta convergenza:

**PROPOSIZIONE 4.5.** – *Supponiamo che esista un insieme compatto  $K \subset \mathbb{R}^d$  tale che  $\text{supp}(\tilde{\mu}_n^k) \subseteq K$  per ogni  $n$  e ogni  $k$ . Allora la successione  $\{\tilde{\mu}_\bullet^k\}_{k \geq 0}$  è convergente in  $C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ .*

È intuitivo immaginare che un simile insieme  $K$  esista soprattutto quando il dato iniziale  $\bar{\mu}$  ha supporto compatto. Infatti, stante l'ipotesi 4.2(i), il problema (11) descrive un trasporto a velocità *finita*, perciò  $\text{supp}(\bar{\mu})$  non può espandersi indefinitamente entro un tempo finito  $T_{\max}$ .

Per la dimostrazione del Teorema 4.4 e della Proposizione 4.5 si veda [16]. Inoltre, il lettore interessato può consultare [12] per una trattazione approfondita di ulteriori schemi numerici per l'approssimazione della soluzione del problema (11).

#### 4.3 – Struttura della soluzione

La teoria sviluppata nelle sezioni precedenti non dà alcuna informazione sulla struttura spaziale delle soluzioni del problema (11), che è invece importante soprattutto per i modelli multiscala discussi nella Sezione 3.

Peraltro, usando la formula di rappresentazione introdotta nella Sezione 4.1 è abbastanza facile vedere che se il dato iniziale  $\bar{\mu}$  ha una struttura discreta del

tipo <sup>(2)</sup>  $\bar{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\bar{x}_i}$  allora anche la soluzione  $\mu_t$  ha struttura discreta per ogni  $t > 0$ . Infatti, per ogni boreliano  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  risulta:

$$\mu_t(E) = (\gamma_t \# \bar{\mu})(E) = \bar{\mu}(\gamma_t^{-1}(E)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\bar{x}_i}(\gamma_t^{-1}(E)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\gamma_t(\bar{x}_i)}(E),$$

perciò, definendo  $x_i(t) := \gamma_t(\bar{x}_i)$ , abbiamo  $\mu_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)}$ . Si noti che ciò è vero indipendentemente dalla regolarità della mappa di flusso  $\gamma_t$ , quindi, in ultima istanza, del campo di velocità  $v[\mu_t]$ .

Se invece il dato iniziale ha una struttura continua,  $d\bar{\mu}(x) = \bar{\rho}(x) dx$ , la questione è più delicata, perché  $\mu_t$  potrebbe sviluppare singolarità in tempo finito se la mappa di flusso tende a concentrare “troppa” densità su strutture spaziali troppo “piccole”. Il seguente risultato dà una condizione sufficiente affinché ciò non accada (per la dimostrazione si vedano [6, 8, 14]):

**TEOREMA 4.6.** – *Supponiamo che  $\bar{\mu}$  sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e che ad ogni tempo  $t \in (0, T_{\max}]$  fissato esista una costante  $C_t > 0$ , eventualmente variabile con  $t$ , tale che*

$$(16) \quad \mathcal{L}^d(\gamma_t^{-1}(E)) \leq C_t \mathcal{L}^d(E), \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Allora anche  $\mu_t = \gamma_t \# \bar{\mu}$  è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue per ogni  $t \in (0, T_{\max}]$ .

<sup>(2)</sup> Rispetto all'equazione (5) qui compare il fattore  $\frac{1}{N}$  per coerenza con il riscalamento a misure di probabilità introdotto all'inizio della sezione.



La condizione (16) richiede sostanzialmente che la mappa di flusso non restringa troppo i boreliani. Infatti, leggendo la disuguaglianza da destra a sinistra, la misura di Lebesgue di  $E$  dev'essere controllabile *dal basso* dalla misura della sua pre-immagine secondo  $\gamma_t$ . Facilmente si intuisce che questa condizione non è di verifica immediata in casi concreti. Tuttavia, almeno per mappe di flusso regolari, è possibile dare un criterio allo stesso tempo sufficiente al suo soddisfacimento e più pratico da controllare (dimostrazione in [6]):

PROPOSIZIONE 4.7. — *Se la mappa di flusso  $\gamma_t$  è un diffeomorfismo con costante di Lipschitz  $\text{Lip}(\gamma_t)$  tale che*

$$(17) \quad \text{Lip}(\gamma_t) < \frac{1}{\text{Lip}(v)T_{\max}}$$

*allora essa verifica la condizione (16).*

In particolare, è utile sapere che sotto l'ipotesi 4.2(ii) la costante di Lipschitz di  $\gamma_t$  si può stimare come  $\text{Lip}(\gamma_t) \leq 1 + \text{Lip}(v)T_{\max}e^{\text{Lip}(v)T_{\max}}$  (cfr. [6]), perciò la (17) è sicuramente verificata se

$$1 + \text{Lip}(v)T_{\max}e^{\text{Lip}(v)T_{\max}} < \frac{1}{\text{Lip}(v)T_{\max}},$$

che, in ultima analisi, diventa una condizione direttamente sulla costante di Lipschitz della velocità. Ciò è più comodo perché, come visto nella Sezione 2.1, è la velocità, e non la mappa di flusso, a giocare un ruolo di primo piano nella costruzione dei modelli.

Infine, se il dato iniziale ha una struttura ibrida del tipo (9) è sufficiente richiamare la linearità dell'operatore di trasporto  $\#$  per concludere che i risultati precedenti si applicano separatamente alle parti discreta e continua. Di conseguenza, facendo in modo che la mappa di flusso (ovvero il campo di velocità) verifichi le condizioni espresse dal Teorema 4.6 e dalla Proposizione 4.7 si ottiene per il problema (11) la conservazione della struttura multiscala della misura ad ogni tempo  $t > 0$ .

## 5. – Ritorno ai modelli di folla

I risultati esposti nella Sezione 4 valgono per un campo di velocità “astratto” caratterizzato essenzialmente dalle Ipotesi 4.2. Al fine di costruire modelli di folla non solo fisicamente coerenti ma anche matematicamente robusti è perciò importante studiare come le strutture introdotte nella Sezione 2 si pongano rispetto a queste ipotesi e quali accortezze siano necessarie nella modellizzazione di specifici termini per garantire che esse le soddisfacciano.

Precisiamo subito che, come ricordato nella Sezione 2.1, il nucleo di interazione  $K$  deve dipendere dalla *posizione relativa*  $y - x$  dei pedoni interagenti affinché la descrizione delle interazioni sia invariante per cambiamenti rigidi (ovvero trasformazioni isometriche) del sistema di riferimento. Dunque si potrà porre

$$K(x, y) = k(y - x),$$

con  $k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  una funzione da modellizzare opportunamente (che continueremo a chiamare *nucleo di interazione*). Ciò detto, la velocità dei pedoni (3)-(4) assume la forma:

$$(18) \quad v[\mu_t](x) = v_d(x) + N \int_{\mathbb{R}^d} k(y - x) \eta_{S(x)}(y) d\mu_t(y),$$

dove ricordiamo che il coefficiente  $N$  (numero totale di pedoni) davanti all'integrale delle interazioni compare in seguito alla reinterpretazione di  $\mu_t$  come misura di probabilità (si veda la nota 1 a pagina 539).

È immediato verificare che il campo (18) soddisfa, senza bisogno di ulteriori assunzioni, l'ipotesi 4.2(iii). Basta infatti scrivere  $v_d = av_d + (1 - a)v_d$  ed effettuare gli opportuni raccoglimenti. Peraltro, è fondamentale che l'ipotesi 4.2(iii) richieda solo la linearità *debole*, perché la mappa  $\mu \mapsto v[\mu]$  che risulta dall'equazione (18) non è in generale lineare (se non quando la velocità desiderata è nulla, il che non è tuttavia sensato dal punto di vista modellistico).

Per il soddisfacimento delle ipotesi 4.2(i) e 4.2(ii) sono invece necessari alcuni dettagli tecnici, da considerarsi come linee guida modellistiche, sulla struttura dei termini  $v_d$ ,  $k$ ,  $S(\cdot)$  ed  $\eta_{S(\cdot)}$ . Per semplicità ci limitiamo al caso bidimensionale ( $d = 2$ ), che è comunque ampiamente sufficiente per trattare modelli di folla realistici.

IPOTESI 5.1. – (Struttura del campo di velocità (18) in due dimensioni).

- (i) Velocità desiderata:  $x \mapsto v_d(x)$  sia lipschitziana e limitata su  $\mathbb{R}^2$ .
- (ii) Regione di sensibilità: per ogni  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $S(x)$  sia un boreliano limitato contenuto in una palla di raggio fissato  $R > 0$  indipendente da  $x$  (ad esempio quella centrata proprio in  $x$ :  $S(x) \subseteq B_R(x)$ ) e isometrico ad un insieme di riferimento  $S(0) \subseteq B_R(0)$ .
- (iii) Nucleo di interazione:  $r \mapsto k(r)$  sia lipschitziana nella palla  $B_R(0)$  di centro l'origine e raggio  $R$  definito al precedente punto (ii).
- (iv) Funzione di taglio: per ogni  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ,  $x \mapsto \eta_E(x)$  sia lipschitziana e limitata tra 0 e 1 su  $\mathbb{R}^2$  con  $\text{supp}(\eta_E) \subset\subset E$ .

OSSERVAZIONE. – L'ipotesi 5.1(ii) significa di fatto che la regione di sensibilità  $\mathcal{S}(x)$  del punto  $x$  si ottiene per traslazione e rotazione dell'insieme di riferimento  $\mathcal{S}(0)$ . Il vettore di traslazione è evidentemente  $x$ . Inoltre, in base a quanto detto nella Sezione 2.1, l'angolo di rotazione è individuato dalla direzione del vettore  $v_d(x)$ .

Se la velocità pedonale è costruita conformemente a quanto fin qui discusso, è possibile garantire una certa solidità matematica al modello di folla (1)-(18). Infatti (dimostrazione in [16]):

PROPOSIZIONE 5.2. – *Se, in due dimensioni spaziali ( $d = 2$ ), valgono le Ipotesi 5.1 il campo di velocità (18) verifica le Ipotesi 4.2.*

e quindi al modello si applica la teoria di buona positura e approssimazione numerica presentata nella Sezione 4.

#### REFERENCES

- [1] L. AMBROSIO - N. GIGLI - G. SAVARÉ, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 2008.
- [2] L. BRUNO - A. TOSIN - P. TRICERRI - F. VENUTI, *Non-local first-order modelling of crowd dynamics: A multidimensional framework with applications*, Appl. Math. Model., **35** (1) (2011), 426-445.
- [3] C. CANUTO - F. FAGNANI - P. TILLI, *An Eulerian approach to the analysis of Krause's consensus models*, SIAM J. Control Optim., **50** (1) (2012), 243-265.
- [4] R. M. COLOMBO - M. D. ROSINI, *Existence of nonclassical solutions in a pedestrian flow model*, Nonlinear Anal. Real World Appl., **10** (5) (2009), 2716-2728.
- [5] V. COSCIA - C. CANAVESIO, *First-order macroscopic modelling of human crowd dynamics*, Math. Models Methods Appl. Sci., **18** (2008), 1217-1247.
- [6] E. CRISTIANI - B. PICCOLI - A. TOSIN, *Multiscale Modeling of Pedestrian Dynamics*. In preparazione.
- [7] E. CRISTIANI - B. PICCOLI - A. TOSIN, *Modeling self-organization in pedestrians and animal groups from macroscopic and microscopic viewpoints*. In G. Naldi, L. Pareschi and G. Toscani, editors *Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences*, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, pages 337-364. Birkhäuser, Boston, 2010.
- [8] E. CRISTIANI - B. PICCOLI - A. TOSIN, *Multiscale modeling of granular flows with application to crowd dynamics*, Multiscale Model. Simul., **9** (1) (2011), 155-182.
- [9] E. CRISTIANI - B. PICCOLI - A. TOSIN, *How can macroscopic models reveal self-organization in traffic flow?*, Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control, pages 6989-6994, Maui, HI, USA, December 2012.
- [10] R. J. LEVEQUE, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 1992.
- [11] B. MAURY - A. ROUDNEFF-CHUPIN - F. SANTAMBROGIO, *Handling congestion in crowd motion modeling*, Netw. Heterog. Media, **6** (3) (2011), 485-519.

- [12] B. PICCOLI - F. ROSSI, *Transport equation with nonlocal velocity in Wasserstein spaces: convergence of numerical schemes*, Acta Appl. Math., **124** (1) (2013), 73-105.
- [13] B. PICCOLI - A. TOSIN, *Time-evolving measures and macroscopic modeling of pedestrian flow*, Arch. Ration. Mech. Anal., **199** (3) (2011), 707-738.
- [14] B. PICCOLI - A. TOSIN, *Pedestrian flows in bounded domains with obstacles*, Contin. Mech. Thermodyn., **21** (2) (2009), 85-107.
- [15] E. SCHRÖDINGER, *What is Life? Mind and Matter*, Cambridge University Press, 1967.
- [16] A. TOSIN - P. FRASCA, *Existence and approximation of probability measure solutions to models of collective behaviors*, Netw. Heterog. Media, **6** (3) (2011), 561-596.

Istituto per le Applicazioni del Calcolo "M. Picone"  
Consiglio Nazionale delle Ricerche, Via dei Taurini 19, 00185 Roma  
E-mail: a.tosin@iac.cnr.it

---

*Received November 27, 2012 and in revised form September 4, 2013*