Bollettino Unione Matematica Italiana

Maria Vallarino

Spazi di Hardy su gruppi a crescita esponenziale di volume

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 9, Vol. **6** (2013), n.3, p. 673–684.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2013_9_6_3_673_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 673-684

Spazi di Hardy su gruppi a crescita esponenziale di volume

MARIA VALLARINO

Sommario. – *Questa è una rassegna di alcuni risultati recenti su spazi di Hardy nel contesto di gruppi di Lie a crescita esponenziale di volume, che ho presentato nella conferenza da me tenuta a Bologna in occasione del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana.*

Faremo un breve cenno alla teoria degli spazi di Hardy in ambito euclideo e al ruolo svolto da tali spazi nell'analisi armonica su $\mathbb{R}^n$. *La parte cruciale della nostra presentazione consisterà nell'introduzione di una nuova teoria di spazi di Hardy nel contesto dei cosiddetti gruppi* $ax+b$, *che sono una classe di gruppi di Lie a crescita esponenziale di volume in cui la teoria classica non si applica. Metteremo in luce analogie e differenze tra la nuova teoria e quella classica.*

I risultati presentati sono pubblicati in un articolo in collaborazione con L. Liu e D. Yang [14], *in due articoli in collaborazione con P. Sjögren* [22, 23] *e in* [28, 29].

1. – Introduzione

La teoria degli spazi di Hardy sullo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ gioca un ruolo importante in analisi armonica (vedi, ad esempio, [24, 25]). In particolare, lo spazio di Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ è un sottospazio proprio dello spazio $L^1(\mathbb{R}^n)$ che si è rivelato un buon "sostituto" di $L^1(\mathbb{R}^n)$ in diversi problemi. Interessanti applicazioni di $H^1(\mathbb{R}^n)$ si trovano nella teoria dell'interpolazione, nello studio della limitatezza di operatori integrali singolari, e nello studio di operatori integrali oscillanti di Fourier. Per precisare meglio il ruolo dello spazio di Hardy nei suddetti problemi, richiamiamo la sua definizione.

Sono note diverse definizioni equivalenti dello spazio di Hardy, delle quali ricorderemo quella atomica e quella massimale.

DEFINIZIONE 1.1. – *Si definisce* atomo *una funzione* a *in* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *che soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) *supp*$(a) \subset B$, *dove* B *è una palla euclidea;*

(ii) $\int_B a(x)\,dx = 0$ *(proprietà di* cancellazione*);*

(iii) $\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq |B|^{-1/2}$, *dove* $|\cdot|$ *denota la misura di Lebesgue (proprietà di* taglia*).*

Lo spazio di Hardy atomico $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R}^n)$ è definito come l'insieme delle funzioni f in $L^1(\mathbb{R}^n)$ che ammettono una decomposizione della forma $f = \sum_j c_j\, a_j$, dove c_j sono numeri complessi tali che $\sum_j |c_j| < \infty$ e le funzioni a_j sono atomi. La norma atomica di una funzione f in $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R}^n)$ è definita da

$$\|f\|_{H^1_{\mathrm{at}}} = \inf\left\{ \sum_j |c_j| : f = \sum_j c_j\, a_j,\ a_j \ \text{ atomo} \right\}.$$

Lo spazio $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R}^n)$ munito della suddetta norma è uno spazio di Banach.

Lo spazio di Hardy massimale $H^1_{\max}(\mathbb{R}^n)$ è definito come l'insieme delle funzioni f in $L^1(\mathbb{R}^n)$ tali che $\mathscr{M}_\phi f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dove

$$\mathscr{M}_\phi f(x) = \sup_{t>0} \left| f * \phi_t(x) \right| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

e ϕ è una funzione di Schwartz tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \phi_t(x) = t^{-n}\, \phi(t^{-1}\, x) \qquad \forall t > 0,\, x \in \mathbb{R}^n.$$

La norma massimale di una funzione f in $H^1_{\max}(\mathbb{R}^n)$ è definita da

$$\|f\|_{H^1_{\max}} = \|\mathscr{M}_\phi f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Lo spazio $H^1_{\max}(\mathbb{R}^n)$ munito di tale norma è uno spazio di Banach. È ben noto che lo spazio di Hardy massimale non dipende dalla funzione test ϕ scelta per definire la funzione massimale.

Gli spazi di Hardy precedentemente definiti coincidono, ossia

$$H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R}^n) = H^1_{\max}(\mathbb{R}^n),$$

e le norme $\|\cdot\|_{H^1_{\mathrm{at}}}$ e $\|\cdot\|_{H^1_{\max}}$ sono equivalenti [24]. Nel seguito denoteremo semplicemente con $H^1(\mathbb{R}^n)$ lo spazio di Hardy euclideo: conoscere definizioni equivalenti dello stesso oggetto lo rende più facile da trattare in problemi diversi. Ad esempio, la definizione atomica è operativamente molto utile quando si voglia studiare la limitatezza di un operatore definito su $H^1(\mathbb{R}^n)$, mentre quella massimale risulta più utile nel caso in cui si voglia verificare l'appartenenza di una funzione allo spazio di Hardy.

Ricordiamo ora alcune interessanti proprietà dello spazio $H^1(\mathbb{R}^n)$:

(i) il duale di $H^1(\mathbb{R}^n)$ si identifica con lo spazio $BMO(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a oscillazione media limitata [6].

(ii) Per ogni θ in $(0,1)$, si ha che $\big(H^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)\big)_\theta = L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$, dove $\dfrac{1}{p_\theta} = 1 - \dfrac{\theta}{2}$ e $\big(\cdot,\cdot\big)_\theta$ denota lo spazio di interpolazione tra due spazi di Banach di indice θ ottenuto mediante il metodo complesso [6].

(iii) Se T è un operatore lineare limitato su $L^2(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\sup\{\|Ta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}: \ a \text{ atomo}\} < \infty\,, \tag{1.1}$$

allora T è limitato da $H^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^1(\mathbb{R}^n)$ [16, 19] e quindi, per la proprietà di interpolazione (ii), T è limitato su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in (1, 2]$.

(iv) Gli operatori integrali singolari di Calderón-Zygmund verificano la condizione (1.1) e sono limitati da $H^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^1(\mathbb{R}^n)$ e su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in (1, 2]$. Senza entrare nei dettagli della definizione di operatore di Calderón-Zygmund, ricordiamo che prototipo di integrali singolari sono le trasformate di Riesz $R_i = \partial_{x_i} \circ \Delta^{-1/2}, i = 1, ..., n$, che sono limitate da $H^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^1(\mathbb{R}^n)$ (ma non sono limitate su $L^1(\mathbb{R}^n)$).

(v) Gli operatori integrali di Fourier aventi simbolo di ordine $-(n-1)/2$ sono limitati da $H^1(\mathbb{R}^n)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ [21, 24]. Questo consente di ottenere per interpolazione stime ottimali per la limitatezza L^p di operatori integrali di Fourier. In particolare, l'operatore $(I + \Delta)^{-(n-1)/2} \cos(t\sqrt{\Delta})$, $t \in \mathbb{R}$, è limitato da $H^1(\mathbb{R}^n)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Questo risultato ha interessanti conseguenze sulla regolarità delle soluzioni dell'equazione delle onde sullo spazio euclideo.

Le proprietà (iv) e (v) mettono in luce il ruolo cruciale svolto da $H^1(\mathbb{R}^n)$ in sostituzione di $L^1(\mathbb{R}^n)$ nello studio della limitatezza di operatori: lo spazio di Hardy è un sottospazio proprio di $L^1(\mathbb{R}^n)$ "sufficientemente grande" da godere di buone proprietà di interpolazione, ma "sufficientemente piccolo" affinché un'ampia classe di operatori integrali singolari che sono illimitati su $L^1(\mathbb{R}^n)$ siano limitati su $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Viste le interessanti proprietà e applicazioni dello spazio di Hardy classico, negli ultimi quarant'anni molti sforzi sono stati fatti per sviluppare una teoria di spazi di Hardy in contesti diversi da quello euclideo.

I primi risultati in tal senso sono stati ottenuti nel contesto di spazi metrici di misura $(\mathbb{X}, d, \mu)$ in cui vale la *proprietà di raddoppio* delle palle, ossia

$$\sup_B \frac{\mu(2B)}{\mu(B)} < \infty\,, \tag{1.2}$$

dove l'estremo superiore è calcolato rispetto a tutte le palle della metrica e $2B$ denota la palla concentrica con B di raggio doppio. In tale contesto R.R. Coifman e G. Weiss [2, 3] hanno introdotto uno spazio di Hardy atomico $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{X})$, definito in modo analogo a quello euclideo, dove le palle della metrica sostituiscono le palle euclidee nella definizione di atomo. Con alcune ipotesi addizionali sullo spazio, diverse caratterizzazioni massimali di $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{X})$ sono state ottenute da R.A. Macías e C. Segovia [15], W.M. Li [13], L. Grafakos, L. Liu e D. Yang [10, 11].

Successivi risultati sono stati ottenuti in contesti in cui la proprietà di raddoppio (1.2) fallisce. La disuguaglianza (1.2) può fallire per le palle di raggio piccolo, oppure può valere localmente (ossia per palle di raggio piccolo), ma non essere valida per palle il cui raggio tende all'infinito.

Sullo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ munito di una misura di Radon μ a crescita polinomiale in cui la (1.2) fallisce per palle piccole, X. Tolsa [27] ha definito uno spazio di Hardy atomico $H^1_{\text{at}}(\mu)$ e dimostrato che esso ammette una caratterizzazione massimale come nel contesto classico.

Nell'ambito di varietà Riemanniane non compatte a geometria limitata a crescita esponenziale di volume la (1.2) fallisce per palle di raggio grande: in tale contesto sono stati recentemente introdotti diversi spazi di Hardy adattati alla geometria della varietà [1, 17, 18, 26] che godono di buone proprietà di interpolazione e hanno applicazioni allo studio di operatori integrali singolari, tra i quali interessanti funzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami sulla varietà.

Lo scopo di questa esposizione è di introdurre un opportuno spazio di Hardy atomico su una classe di gruppi di Lie a crescita esponenziale di volume, che goda di proprietà analoghe a quelle valide nel contesto classico e che ben si adatti allo studio della limitatezza di operatori integrali singolari associati a un Laplaciano naturale definito sui gruppi. Ci occuperemo anche di discutere una caratterizzazione massimale di tale spazio.

2. – I gruppi $ax + b$ e lo spazio di Hardy atomico

Sia G il gruppo di Lie $\mathbb{R}^n \ltimes \mathbb{R}^+$ munito del prodotto

$$(x,a)\cdot(x',a') = (x + a\,x', a\,a') \qquad \forall (x,a),\ (x',a') \in G\,.$$

In letteratura G viene chiamato *gruppo* $ax + b$. Consideriamo su G la metrica Riemanniana invariante sinistra $\mathrm{d}s^2 = a^{-2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}a^2)$, che coincide con la metrica dello spazio iperbolico $(n+1)$-dimensionale.

Il gruppo G non è unimodulare: le misura di Haar destra e sinistra sono date rispettivamente da

$$\mathrm{d}\rho(x,a) = a^{-1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}\lambda(x,a) = a^{-(n+1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}a\,.$$

È ben noto che la misura della palla B_r centrata nell'identità e di raggio r si comporta come

$$\rho(B_r) = \lambda(B_r) \sim \begin{cases} r^{n+1} & \text{if } r < 1 \\ \mathrm{e}^{nr} & \text{if } r \geq 1\,. \end{cases}$$

Questo mostra che lo spazio (G, d, ρ) è a *crescita esponenziale di volume*. In particolare,

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\rho(B_{2r})}{\rho(B_r)} = +\infty\,,$$

quindi lo spazio (G, d, ρ) non verifica la proprietà di raddoppio (1.2).

L'analisi armonica sullo spazio (G, d, ρ) è stata oggetto di studio negli ultimi trent'anni, perché esso rappresenta un modello di spazio a crescita esponenziale, dove l'assenza della proprietà di raddoppio non consente di applicare la teoria classica degli operatori integrali singolari di Calderón-Zygmund e la teoria classica degli spazi di Hardy di Coifman e Weiss [2, 3]. L'analisi di diversi operatori massimali, operatori integrali singolari, moltiplicatori spettrali di Laplaciani è stata oggetto di studio in [5, 8, 7, 9, 12, 20].

Uno dei risultati più significativi riguardanti l'analisi sui gruppi $ax + b$ è stato ottenuto da W. Hebisch e T. Steger in [12]. Essi hanno costruito una nuova teoria di Calderón-Zygmund che si applica allo spazio (G, d, ρ), utilizzando una famiglia di insiemi opportuni, che sono legati alla struttura geometrica e algebrica dello spazio e sono così definiti [9, 12].

DEFINIZIONE 2.1. – *Un insieme di Calderón-Zygmund è un parallelepipedo*

$$R = \prod_{i=1}^{n} [x_i - L/2, x_i + L/2] \times [a\, e^{-r}, a\, e^{r}]\,,$$

dove $L > 0$, $r > 0$ *e* $(x_1, ..., x_n, a) \in G$ *verificano le seguenti disuguaglianze:*

$$e^2 a\, r \leq L < e^8 a\, r \qquad \textit{if } r < 1\,,$$

$$a\, e^{2r} \leq L < a\, e^{8r} \qquad \textit{if } r \geq 1\,.$$

Indichiamo con $\mathscr{R}$ *la famiglia di tutti gli insiemi di Calderón-Zygmund.*

La famiglia $\mathscr{R}$ è invariante per traslazioni sinistre, ossia il traslato sinistro mediante la legge di gruppo di un insieme di Calderón-Zygmund è un insieme di Calderón-Zygmund. Dato un insieme $R \in \mathscr{R}$, definiamo il suo dilatato come $R^* = \{x \in G : \ d(x, R) < r\}$. Esiste una costante positiva $C_0 > 0$ tale che

$$\rho(R^*) \leq C_0\, \rho(R) \qquad \text{e} \qquad R \subset B\big((x_1, ..., x_n, a), C_0 r\big)\,. \tag{2.1}$$

La proprietà precedente può essere pensata come il sostituto della proprietà di raddoppio (1.2) in questo contesto. Sostituendo le palle metriche con i suddetti insiemi Hebisch e Steger hanno sviluppato una teoria di Calderón-Zygmund sul gruppo G, che ha interessanti applicazioni allo studio di operatori integrali singolari.

Lo scopo di questa esposizione è quello di definire uno spazio di Hardy atomico sullo spazio (G, d, ρ). Introduciamo innanzitutto una nozione di atomo in analogia alla definizione di atomo classico.

DEFINIZIONE 2.2. – *Si definisce atomo sul gruppo G una funzione a in* $L^2(\rho)$ *che soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) *supp*$(a) \subset R$*, dove* $R \in \mathscr{R}$*;*

(ii) $\int_R a\,d\rho = 0$ *(proprietà di cancellazione);*

(iii) $\|a\|_{L^2(\rho)} \leq \rho(R)^{-1/2}$ *(proprietà di taglia).*

Osserviamo che due sono le differenze tra questa definizione di atomo e quella classica: l'atomo non è supportato in una palla della metrica ma in un insieme di Calderón-Zygmund e nelle condizioni di cancellazione e di taglia interviene la misura destra del gruppo.

DEFINIZIONE 2.3. – *Lo spazio di Hardy atomico* $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ *è definito come l'insieme delle funzioni* f *in* $L^1(\rho)$ *che ammettono una decomposizione della forma* $f = \sum_j c_j\, a_j$*, dove* c_j *sono numeri complessi tali che* $\sum_j |c_j| < \infty$ *e* a_j *sono atomi. Data una funzione* f *in* $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ *la sua norma atomica è definita come segue:*

$$\|f\|_{H^1_{\mathrm{at}}} = \inf \left\{ \sum_j |c_j| : f = \sum_j c_j\, a_j,\ a_j \text{ atomo} \right\}.$$

Lo spazio $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ munito della suddetta norma è uno spazio di Banach. Lo spazio di Hardy atomico così definito gode di alcune proprietà analoghe a quelle valide nel caso classico.

In [28] abbiamo provato che il duale di $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ si identifica con un opportuno spazio di funzioni a oscillazione media limitata definito come segue.

DEFINIZIONE 2.4. – *Lo spazio* $\mathscr{BMO}(G)$ *è lo spazio delle funzioni* g *in* $L^1_{\mathrm{loc}}(\rho)$ *tali che*

$$\sup_{R \in \mathscr{R}} \frac{1}{\rho(R)} \int_R |g - g_R|\, \mathrm{d}\rho < \infty\,,$$

dove g_R *denota la media di* g *sull'insieme* R*. Lo spazio* $BMO(G)$ *è* $\mathscr{BMO}(G)$ *modulo il sottospazio delle funzioni costanti. Esso è uno spazio di Banach munito della norma*

$$\|g\|_{BMO} = \sup \left\{ \frac{1}{\rho(R)} \int_R |g - g_R|\, \mathrm{d}\rho :\ R \in \mathscr{R} \right\}.$$

Per ogni g in BMO il funzionale ℓ_g definito su ogni atomo a dalla formula

$$\ell_g(a) = \int g\, a\, \mathrm{d}\rho\,, \tag{2.2}$$

si estende a un funzionale limitato su $H^1_{\mathrm{at}}(G)$. Inoltre ogni funzionale nel duale di $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ è di questo tipo, e $\|\ell_g\|_{(H^1_{\mathrm{at}})^*} \sim \|g\|_{BMO}$.

In collaborazione con Liu e Yang abbiamo provato che lo spazio di Hardy atomico gode di buone proprietà di interpolazione [14]. Più precisamente, per ogni θ in $(0,1)$

$$\big(H^1_{\mathrm{at}}(G), L^2(\rho)\big)_{[\theta]} = L^{p_\theta}(\rho) \qquad \frac{1}{p_\theta} = 1 - \frac{\theta}{2}\,.$$

È pertanto utile studiare la limitatezza $H^1_{\mathrm{at}}(G)$–$L^1(\rho)$ di operatori lineari che sono limitati su $L^2(\rho)$, perché per interpolazione essa implica la limitatezza di tali operatori su $L^p(\rho)$, $\forall p \in (1,2)$. In particolare, lo spazio di Hardy si è rivelato utile per studiare la limitatezza di operatori integrali singolari associati a un Laplaciano speciale sul gruppo G, che ora definiamo.

Siano $X_0, X_1, ..., X_n$ i campi vettoriali invarianti sinistri

$$X_0 = a\,\partial_a \qquad X_i = a\,\partial_{x_i} \qquad i = 1,...,n\,,$$

che generano l'algebra di Lie di G. Il Laplaciano $\Delta = -\sum_{i=0}^{n} X_i^2$ è invariante sinistro e essenzialmente autoaggiunto su $L^2(\rho)$. Lo spettro di Δ su $L^2(\rho)$ coincide con la semiretta $[0,+\infty)$. In [22] abbiamo mostrato che le trasformate di Riesz del primo ordine della forma $X_i\Delta^{-1/2}$, $i = 0,1,...,n$, sono limitate da $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ in $L^1(\rho)$, mentre le trasformate di Riesz della forma $\Delta^{-1/2}X_i$, $i = 0,1,...,n$, non sono limitate da $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ in $L^1(\rho)$. Quest'ultimo risultato mette in luce una differenza rispetto al caso classico: le trasformate di Riesz $\Delta^{-1/2}X_i$ sono operatori integrali singolari limitati su $L^p(\rho)$ per $p \in (1,2]$, ma che nel caso limite $p = 1$ non sono limitati né su $L^1(\rho)$ né sullo spazio di Hardy.

Infine, in collaborazione con D. Müller abbiamo ottenuto il seguente risultato non ancora pubblicato: l'operatore $(I+\Delta)^{-(n-1)/2}\cos(t\sqrt{\Delta})$, $t \in \mathbb{R}$, è limitato da $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ in $L^1(\rho)$. Questo risultato può essere pensato come un analogo per il Laplaciano Δ dei risultati di limitatezza per operatori integrali di Fourier euclidei.

3. – Lo spazio di Hardy massimale

In questa sezione ci proponiamo di indagare una caratterizzazione massimale dello spazio di Hardy atomico definito in precedenza. In particolare, studieremo una caratterizzazione massimale mediante il nucleo del calore del Laplaciano Δ. È ben noto che il semigruppo del calore $\big(e^{-t\Delta}\big)_{t>0}$ si realizza mediante la convoluzione con un nucleo che denoteremo h_t, ossia $e^{-t\Delta}f = f * h_t$, per funzioni f opportune.

Sia $\mathscr{M}_h$ l'operatore massimale corrispondente, definito da

$$\mathscr{M}_h f(x) = \sup_{t>0} |f * h_t(x)| \qquad \forall x \in G\,. \tag{3.1}$$

M. Cowling, G. Gaudry, S. Giulini e G. Mauceri [4] hanno dimostrato che $\mathscr{M}_h$ è di tipo debole $(1,1)$ e limitato su $L^p(\rho)$ per ogni $p > 1$. Definiamo uno spazio di Hardy massimale sul gruppo G utilizzando la funzione massimale del calore.

DEFINIZIONE 3.1. – *Lo spazio di Hardy massimale $H^1_{\max}(G)$ è lo spazio delle funzioni f in $L^1(\rho)$ tali che $\mathscr{M}_h f$ è in $L^1(\rho)$. La norma di una funzione f in $H^1_{\max}(G)$ è definita come*

$$\|f\|_{H^1_{\max}} = \|\mathscr{M}_h f\|_{L^1(\rho)} \qquad \forall f \in H^1_{\max}(G)\,.$$

Lo spazio $H^1_{\max}(G)$ munito della norma così definita è uno spazio di Banach.

È naturale chiedersi quale relazione sussista tra lo spazio di Hardy atomico e quello massimale, per comprendere se essi coincidano come avviene nel caso classico. Il primo risultato in tale direzione è il seguente:

TEOREMA 3.2. – *La funzione massimale del calore $\mathscr{M}_h$ è limitata da $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ in $L^1(\rho)$.*

La dimostrazione del teorema è piuttosto tecnica e fa utilizzo di una formula del nucleo del calore h_t e delle sue derivate che discende dall'analisi armonica sferica sui gruppi $ax + b$. Il precedente risultato non è sorprendente, in quanto valido anche nella teoria classica, e da esso segue che esiste una costante positiva C tale che per ogni f in $H^1_{\mathrm{at}}(G)$

$$\|f\|_{H^1_{\max}} = \|\mathscr{M}_h f\|_{L^1(\rho)} \leq C\,\|f\|_{H^1_{\mathrm{at}}}\,.$$

Pertanto

$$H^1_{\mathrm{at}}(G) \subseteq H^1_{\max}(G)\,.$$

Quello che sorprende è il fatto che l'inclusione precedente, in contrasto con il caso classico, non è un'uguaglianza: questo risultato, che ora presenteremo, è apparso in un lavoro recente in collaborazione con Sjögren [23] nel caso particolare del gruppo $G = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}^+$ di dimensione 3.

Consideriamo dunque nel seguito il caso particolare del gruppo $ax + b$ di dimensione 3: questa scelta è motivata dal fatto che in tale caso è nota una formula esplicita del nucleo del calore del Laplaciano che consente di ottenere stime precise della funzione massimale del calore.

Costruiamo una famiglia di funzioni $\{f_L\}_{L>2}$ in $H^1_{\rm at}(G)$ tali che

$$\lim_{L\to+\infty}\frac{\|f_L\|_{H^1_{\rm at}}}{\|f_L\|_{H^1_{\rm max}}}=+\infty\,.$$

Per ogni $L>2$ consideriamo gli insiemi di Calderón-Zygmund $R_0=[-1,1]\times[-1,1]\times[\frac{1}{e},e]$ e $R_L=[L-1,L+1]\times[-1,1]\times[\frac{1}{e},e]$ e definiamo $f_L=\chi_{R_L}-\chi_{R_0}$. La funzione f_L è multiplo di un atomo ed appartiene quindi a $H^1_{\rm at}(G)$.

LEMMA 3.3. – *Esiste una costante positiva C tale che*

(i) $\|f_L\|_{H^1_{\rm at}}\geq C\log L \qquad \forall L>2\,;$
(ii) $\|f_L\|_{H^1_{\rm max}}\leq C\,\log\log L \qquad \forall L>2\,.$

Diamo un'idea della dimostrazione della stima (i), che si basa sulla dualità tra $H^1_{\rm at}(G)$ e $BMO(G)$. Definiamo $g(x_1,x_2,a)=\log|x_1|$. Si vede facilmente che la funzione g appartiene allo spazio $BMO(G)$. Pertanto, utilizzando la (2.2), otteniamo che

$$\|f_L\|_{H^1_{\rm at}}\geq C\frac{|\langle g,f_L\rangle|}{\|g\|_{BMO}}\geq C\Big|\int g f_L\,{\rm d}\rho\Big|\geq C\log L\,,$$

come richiesto.

La dimostrazione della stima (ii) è più tecnica e si basa sulla seguente formula esplicita del nucleo del calore [4, Theorem 5.3]:

$$h_t(x)=\frac{1}{8\pi^{3/2}}\,\delta^{1/2}(x)\,\frac{|x|}{\sinh|x|}\,t^{-3/2}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad \forall x\in G,\ t>0\,,$$

dove $|x|$ denota la distanza iperbolica del punto x dall'identità del gruppo e δ denota la funzione modulare del gruppo G. Rinviamo il lettore a [23] per i dettagli della dimostrazione del Lemma 3.3.

Dal Lemma 3.3 segue che

$$\lim_{L\to+\infty}\frac{\|f_L\|_{H^1_{\rm at}}}{\|f_L\|_{H^1_{\rm max}}}=+\infty\,.$$

Ciò implica che non esiste una costante positiva C tale che $\|f_L\|_{H^1_{\rm at}}\leq C\,\|f_L\|_{H^1_{\rm max}}$ e pertanto

$$H^1_{\rm at}(G)\subsetneq H^1_{\rm max}(G)\,.$$

Possiamo esibire un esempio esplicito di funzione che appartiene allo spazio di Hardy massimale ma non a quello atomico.

ESEMPIO 3.4. – *Definiamo* $f(x_1, x_2, a) = \dfrac{1}{x_1 (\log x_1)^{3/2}}$ *nell'insieme* $\{(x_1, x_2, a) : x_1 > 3, |x_2| < 1, e^{-1} < a < e\}$, $f = c_0$ *nell'insieme* R_0 *e* $f = 0$ *altrove, dove la costante* c_0 *è scelta in modo tale che la media di* f *sia nulla. Si dimostra che la funzione* f *appartiene allo spazio* $H^1_{\mathrm{max}}(G)$ *ma non appartiene a* $H^1_{\mathrm{at}}(G)$.

In conclusione, nel nostro contesto non vale una caratterizzazione massimale dello spazio di Hardy atomico mediante l'operatore massimale del calore. Questo fatto rappresenta una sostanziale differenza tra la teoria degli spazi di Hardy sui gruppi $ax + b$ e la teoria degli spazi di Hardy classica.

Concludiamo con alcune osservazioni e problemi aperti.

- Abbiamo osservato che $H^1_{\mathrm{at}}(G) \subsetneq H^1_{\mathrm{max}}(G) \subsetneq L^1(\rho)$. Questo implica che lo spazio di Hardy massimale eredita le stesse proprietà di interpolazione di $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ e $L^1(\rho)$.
- È naturale chiedersi se sia possibile trovare una caratterizzazione massimale dello spazio di Hardy atomico, in termini di una funzione massimale che non sia quella del calore. In [29] abbiamo considerato il nucleo di Poisson p_t associato al Laplaciano Δ, ossia il nucleo di convoluzione del semigruppo di Poisson $(e^{-t\sqrt{\Delta}})_{t>0}$, e la corrispondente funzione massimale $\mathscr{M}_p$ definita come

$$\mathscr{M}_p f(x) = \sup_{t>0} \left| f * p_t(x) \right| \qquad \forall x \in G\,.$$

Definiamo lo spazio di Hardy massimale di Poisson $H^1_{\mathrm{max},p}(G)$ come lo spazio delle funzioni in $L^1(\rho)$ tali che $\mathscr{M}_p f$ appartenga a $L^1(\rho)$ munito della norma

$$\|f\|_{H^1_{\mathrm{max},p}} = \|\mathscr{M}_p f\|_{L^1(\rho)} \qquad \forall f \in H^1_{\mathrm{max},p}(G)\,.$$

Abbiamo provato che anche $H^1_{\mathrm{max},p}(G)$ contiene strettamente $H^1_{\mathrm{at}}(G)$. Dunque non vale una caratterizzazione massimale dello spazio di Hardy atomico neppure in termini della funzione massimale di Poisson.

- $H^1_{\mathrm{max},p}(G) = H^1_{\mathrm{max}}(G)$? In altri termini, gli spazi di Hardy massimali del calore e di Poisson coincidono come nel caso classico?
- Nel contesto euclideo è nota una caratterizzazione dello spazio di Hardy in termini di trasformate di Riesz del primo ordine. È possibile caratterizzare lo spazio $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ oppure lo spazio $H^1_{\mathrm{max}}(G)$ in termini delle trasformate Riesz $X_i \Delta^{-1/2}$, $i = 0, \ldots, n$? In un lavoro in corso in collaborazione con Sjögren abbiamo osservato che lo spazio di Hardy atomico non ammette una caratterizzazione in termini delle trasformate Riesz $X_i \Delta^{-1/2}$. La domanda per lo spazio di Hardy massimale è ancora aperta.

REFERENCES

[1] A. Carbonaro, G. Mauceri, S. Meda, *H^1 and BMO for certain locally doubling metric measure spaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 8 (2009), 543-582.

[2] R.R. Coifman, G. Weiss, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogenes*, Lecture Notes in Mathematics 242. Springer (1971).

[3] R.R. Coifman, G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in Analysis*, Bull. Am. Math. Soc. **83** (1977), 569-645.

[4] M. Cowling, G. Gaudry, S. Giulini, G. Mauceri, *Weak type $(1,1)$ estimates for heat kernel maximal functions on Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 637-649.

[5] M. Cowling, S. Giulini, A. Hulanicki, G. Mauceri, *Spectral multipliers for a distinguished laplacian on certain groups of exponential growth*, Studia Math. **111** (1994), 103-121.

[6] C. Fefferman, E.M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[7] G. Gaudry, P. Sjögren, *Singular integrals on Iwasawa NA groups of rank 1*, J. Reine Angew. Math. **479** (1996), 39-66.

[8] G. Gaudry, T. Qian, P. Sjögren, *Singular integrals associated to the Laplacian on the affine group $ax+b$*, Ark. Mat. **30** (1992), 259-281.

[9] S. Giulini, P. Sjögren, *A note on maximal functions on a solvable Lie group*, Arch. Math. (Basel) **55** (1990), 156-160.

[10] L. Grafakos, L. Liu, D. Yang, *Maximal function characterizations of Hardy spaces on RD-spaces and their applications*, Sci. China Ser. A **51** (2008), 2253-2284.

[11] L. Grafakos, L. Liu, D. Yang, *Radial maximal function characterizations for Hardy spaces on RD-spaces*, Bull. Soc. Math. France **13** (2009), 225-251.

[12] W. Hebisch, T. Steger, *Multipliers and singular integrals on exponential growth groups*, Math. Z. **245** (2003), 37-61.

[13] W.M. Li, *A maximal function characterization of Hardy spaces on spaces of homogeneous type*, Approx. Theory Appl. (N. S.) **14** (1998), 12-27.

[14] L. Liu, M. Vallarino, D. Yang, *Dyadic sets, maximal functions and applications on $ax+b$-groups*. Math. Z. **270** (2012), 515-529.

[15] R.A. Macías, C. Segovia, *A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33** (1979), 271-309.

[16] G. Mauceri, S. Meda, *Equivalence of norms on finite linear combinations of atoms*, Math. Z. **269** (2011), 253-260.

[17] G. Mauceri, S. Meda, M. Vallarino, *Hardy type spaces on certain noncompact manifolds and applications*, J. London Math. Soc. **84** (2011), 243-268.

[18] G. Mauceri, S. Meda, M. Vallarino, *Atomic decomposition of Hardy type spaces on certain noncompact manifolds*, J. Geom. Anal. **22** (2012), 864-891.

[19] S. Meda, P. Sjögren, M. Vallarino, *On the H^1-L^1 boundedness of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 2921-2931.

[20] D. Müller, C. Thiele, *Wave equation and multiplier estimates on $ax+b$ groups*, Studia Math. **179** (2007), 117-148.

[21] A. Seeger, C. Sogge, E.M. Stein, *Regularity properties of Fourier integral operators*, Ann. of Math. **134** (1991), 231-251.

[22] P. Sjögren, M. Vallarino, *Boundedness from H^1 to L^1 of Riesz transforms on a Lie group of exponential growth*, Ann. Inst. Fourier **58** (2008), 1117-1151.

[23] P. Sjögren, M. Vallarino, *Heat maximal function on a Lie group of exponential growth*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **37** (2012), 491-507.

[24] E.M. STEIN, *Harmonic Analysis*. Princeton University Press (1993).
[25] E.M. STEIN, G. WEISS, *On the theory of harmonic functions of several variables.I. The theory of H^p-spaces*, Acta Math. **103** (1960), 25-62.
[26] M. TAYLOR, *Hardy spaces and BMO on manifolds with bounded geometry*, J. Geom. Anal. **19** (2009), 137-190.
[27] X. TOLSA, *The space H^1 for nondoubling measures in terms of a grand maximal operator*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 315-348.
[28] M. VALLARINO, *Spaces H^1 and BMO on exponential growth groups*, Collect. Math. **60** (2009), 277-295.
[29] M. VALLARINO, capitolo 16 in *Trends in Harmonic Analysis*, Springer INdAM Series, Vol. **3** - M. Picardello (Editor) (2013).

Maria Vallarino
Dipartimento di Scienze Matematiche "Giuseppe Luigi Lagrange"
Politecnico di Torino
Corso Duca degli Abruzzi, 24, 10129 Torino, Italy
E-mail: maria.vallarino@polito.it

Received November 27, 2012 and in revised form October 25, 2013