Gino Fano

Sui postulati fondamentali della geometria in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni

Giornale di Matematiche, Vol. **30** (1892), p. 106–132

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1892_1>

SUI POSTULATI FONDAMENTALI
DELLA
GEOMETRIA PROIETTIVA
in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni.

NOTA

DI

GINO FANO.

La geometria di uno spazio a più dimensioni, che già da parecchio tempo ha preso posto fra i rami della matematica, è stata, com'è noto, uno degli argomenti di studio e di ricerca che hanno esercitato maggiori attrattive, specialmente in Italia, da alcuni anni a questa parte. Per quanto però essa abbia dato luogo a varie ricerche, e in queste si siano anche raggiunti numerosi ed importanti risultati, tuttavia fino a questi ultimi giorni (ch'io sappia almeno) non è stata data una vera e propria definizione di una *varietà lineare* o, brevemente, di uno *spazio a un numero qualunque* r *di dimensioni* (nel senso più generale di quest'espressione (*)). Di queste varietà lineari si adducono soltanto degli esempi, asserendo che sono tali le involuzioni di punti sopra una retta, i sistemi lineari di curve piane e di superficie, o, più generalmente, di connessi qualunque, ecc. quando vi si consideri come *elemento* rispett. il gruppo di punti, la curva, la superficie, il connesso. Volendo poi fare qualche ricerca nella quale, appunto per avere una maggior generalità, occorre o almeno è preferibile lasciar del tutto indeterminata la natura dell'elemento stesso, tutti gli autori (salvo errore) sono d'accordo nell'as-

(*) E abbracciando quindi tutti i diversi modi, riducibili a tre principali (Cfr. C. Segre: *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche*; Rivista di Matematica; vol. I; p. 59), sotto cui questi *spazi superiori* od *iperspazi* si sono presentati ai geometri.

sumere come punto di partenza *la rappresentabilità degli elementi* (*punti*) *di un iperspazio mediante coordinate* (*).

Il Chiar.^{mo} Prof. C. Segre in un corso di lezioni di *Geometria sopra un ente algebrico* dettate nello scorso anno accademico 1890-91 (**), dopo aver accennato alle cose fondamentali relative alla geometria in uno spazio a un numero qualunque di dimensioni, proponeva appunto ai suoi studenti (fra i quali ho l'onore di annoverarmi) la questione seguente:

« Definire lo spazio S_r non già mediante coordinate, ma con una serie di « proprietà dalle quali la rappresentazione con coordinate si possa dedurre come « conseguenza... ».

E poco dopo, nella Nota cit. *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche*, egli nuovamente osservava che « Non è ancora stato assegnato e di- « scusso un sistema di postulati *indipendenti* che serva a caratterizzare lo spazio « lineare a n dimensioni, sì che se ne possa dedurre la rappresentazione dei « punti di questo con coordinate (***) ».

(*) Fanno eccezione solamente i lavori del Prof. G. Veronese (*Behandlung der projectivischen Verhältnisse...*; Math. Ann. XIX, e *La superficie omaloide normale a due dimensioni del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni, e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario*; Mem. Acc. dei Lincei, 1883-84) nei quali si accenna a una definizione sintetica degli iperspazi, senza però fermarsi molto a svilupparla. Della Nota recente del sig. F. Amodeo: *Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno* S_r (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino; vol. XXVI) avremo a parlare in seguito.

Durante la stampa di questa Nota è poi uscito un altro lavoro (importante, quanto voluminoso) dello stesso Prof. Veronese (*Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee*; Padova, 1891) nel quale le stesse questioni appena accennate nei lavori precedenti sono invece assai ampiamente sviluppate. Non sarà difficile però il riconoscere che l'ordine di idee seguìto dal Sig. Veronese è alquanto diverso da quello a cui noi intendiamo qui attenerci.

(**) Nella R. Università degli Studi di Torino.

(***) Ê chiaro che, risolta una tale questione, se ne dedurrebbe tosto come caso particolare quali potrebbero essere i postulati fondamentali della geometria dello spazio ordinario. In questo caso speciale la questione fu già trattata, in modi diversi, dal prof. R. De Paolis (*Sui fondamenti della geometria proiettiva*; Mem. della R. Acc. dei Lincei; serie 3ª; vol. IX; 1880-81) e dal Pasch (*Vorlesungen über neuere Geometrie*; Leipzig, 1882); e se ne trova pure un cenno nelle recenti *Vorlesungen über Geometrie* dei sigg. Clebsch-Lindemann (Leipzig, 1891). I postulati del Pasch (quelli almeno relativi alla geometria di posizione) furono anche trasformati in simboli di logica dal prof. G. Peano nei suoi *Principi di geometria logicamente*

Fu appunto nella ricerca di questo sistema di postulati ch'io giunsi ad alcuni risultati, una parte dei quali mi preparo ora ad esporre (*) (**).

Mi è caro poi rinnovare in quest'occasione allo stesso prof. Segre e al Dott. Guido Castelnuovo i più vivi ringraziamenti per i consigli di cui mi furono larghi nella compilazione di questa Nota.

1. A base del nostro studio noi mettiamo una *varietà* qualsiasi di enti di

---

esposti (Torino, Bocca, 1889). In quest'opuscolo l'A. parte dalle idee intuitive (o supposte tali) di *punto* e di *segmento rettilineo*, e definisce poi successivamente la retta illimitata, il piano, ecc. enunciando le proprietà fondamentali di tutti questi enti con 16 postulati (oltre a un 17° sulla continuità della retta) dei quali però cinque (1, 2, 7, 12, 15) si riferiscono solo all'*esistenza di punti*, e l'ultimo dice in sostanza che lo spazio ordinario, la varietà cioè dei punti che si suppongono esistere, è a tre dimensioni. Per questo caso speciale la questione può dunque effettivamente ritenersi risolta. Noi però, come già si è detto, vogliamo trattarla più in generale, e non faremo neanche uso del concetto di segmento.

(*) Mi sembra anzi opportuno avvertire fin d'ora che, volendo esser sicuri dell'*indipendenza* dei nostri postulati, dovremo anche dimostrarne (man mano che li enunciamo) la *necessità*.

(**) Avevo appena ultimata questa ricerca, o, dirò meglio, quella parte di essa che più mi interessava, quando nello scorso aprile venni a sapere che lo stesso argomento era stato oggetto di studio per parte del Chiar.mo Dott. F. Amodeo. Tenuto conto di ciò e, in pari tempo, dell'impossibilità in cui mi trovavo di pubblicare subito i risultati ottenuti, finii coll'attendere che fosse uscito il lavoro dello stesso Sig. Amodeo (ora comparso nel vol. XXVI degli Atti dell'Acc. di Torino), riservandomi di far conoscere in seguito quei punti almeno che da noi fossero stati studiati e svolti in modo diverso.

La prima parte della ricerca, quella che dal Sig. Amodeo è esposta nel § 1 (generazione degli spazi), si presentava, fra tutte, come la più facile ed ovvia, e non avrebbe quindi potuto dar campo a notevoli divergenze. Risparmiando pertanto al lettore una ripetizione di cose ormai note, mi limito ad esporne quanto è strettamente necessario.

Nella seconda parte invece (v. op. cit. n° 13 e seg.) i nostri due lavori presentano delle differenze più sensibili; in essa quindi io avrò a diffondermi maggiormente, tanto più che mi si presentarono anche talune configurazioni di punti (non incontrate invece dal Sig. Amodeo), all'esposizione delle cui proprietà, o poco più, è ormai ridotto lo scopo precipuo di questa Nota.

qualunque natura; enti che chiameremo, per brevità, *punti*, indipendentemente però, ben inteso, dalla loro stessa natura (*).

La proprietà prima di questi enti è data dal postulato seguente (che corrisponde al 2° del sig. Amodeo):

Post. I. *Due punti qualunque determinano, e sempre in modo unico, un ente che chiamo* retta (S_1).

Questo ente noi intendiamo che sia un *sistema di punti*, del quale fanno parte quei primi due che (per il postulato stesso) lo determinano in modo unico.

Diremo che la retta *contiene* tutti questi punti (**). *Per due punti* (*distinti*) *passa sempre una retta ed una sola.* Se questa, oltre a quei due punti, ne contiene degli altri, sarà pure individuata da due qualunque di essi.

Questa essendo, come ho detto, la *proprietà prima*, fondamentale, che noi attribuiamo agli enti della nostra varietà, non è il caso di cercare di dimostrarla o di provare che non è dimostrabile.

2. Definisco come piano (S_2) *l'insieme di tutti i punti contenuti nelle rette che congiungono i singoli punti di una retta data con un punto fisso ed assegnato ad arbitrio, purchè fuori della retta stessa* (ovvero, come anche diremo, *proiettano i punti di quella retta* – o, brevemente, *la retta – da questo punto fisso*).

Stabilisco in seguito le proprietà fondamentali del piano mediante due nuovi postulati:

Post. II. *La retta determinata da due punti qualunque di un piano giace tutta in questo.*

(*) In questo sono già compresi i postulati 1° e 3° del Sig. Amodeo, e così pure quelli dal 5° all' $(r+2)^{simo}$ inclusi. L'Egr. A. riconosce infatti egli pure (pag. 5) che r dei suoi postulati (questi, precisamente) sono identici nella forma, *e si potrebbero, volendo, ridurre ad un solo*; io li ho precisamente così ridotti. Quanto ai rimanenti, l'A. stesso osserva, e giustamente, ch'essi sono *sostanzialmente diversi* da quegli r. Io preferisco addirittura *riservare ad essi il nome di postulati*. Sono questi infatti che, come vedremo, ci daranno le *proprietà prime* degli enti o *punti* della nostra varietà; quelle proprietà che (opportunamente scelte) *dovremo* ammettere, per *caratterizzare* gli enti stessi e poterne poi dedurre nuove proprietà di questi È perciò appunto che io vorrei riservare il nome di *postulati* a quei soli enunciati che si riferiscono a *proprietà di enti* (o almeno dicono: « Esiste un oggetto *soddisfacente alle tali condizioni ...* »).

Entro la varietà proposta noi potremo quindi generare senz'altro i successivi spazi; r sarà per noi un numero tale che dentro di quella si possa costruire un S_r.

(**) E così pure ci serviremo in seguito, senza farne ogni volta speciale avvertenza, di tutte le altre espressioni usuali che l'analogia ha consigliato di introdurre anche nel linguaggio della geometria in una varietà lineare qualunque.

Post. III. *Due rette giacenti in uno stesso piano hanno sempre un punto a comune* (*).

Dell'uno e dell'altro di questi postulati si dimostra anche assai facilmente la necessità. Considerando infatti ad es. l'insieme dei punti di un piano (nel senso ordinario) che sono interni ad una data linea chiusa convessa qualsiasi, e chiamando *retta* ogni corda di questa linea, si ha una varietà di punti entro la quale si può costruire un piano conforme alla data definizione, ma che tuttavia non contiene sempre *tutta* la retta individuata da due suoi punti. Se poi quella certa linea è precisamente il perimetro di un triangolo, – e fra i punti della nostra varietà si intendono inclusi anche quelli del perimetro stesso –, per il piano ottenuto proiettando un lato qualunque del triangolo dal vertice ad esso opposto sarà verificato altresì il post. II, ma non il III (**).

Dai postulati ammessi segue tosto che *la prima retta e il punto ad essa esterno con cui abbiamo generato il piano non sono elementi particolari di que-*

(*) Avvertiamo anzi che questi due postulati potrebbero limitarsi alle forme seguenti:

Il piano determinato da un punto A *e da una retta* BC (*non passante per questo punto*) *contiene tutte le rette che congiungono i punti* (*determinati*) B *e* C *rispett. a ciascuno di quelli delle rette* AC *e* AB.

Due rette le quali congiungano i punti B *e* C *rispett. con un punto qualsiasi di* AC *e* AB *hanno sempre un punto a comune.*

Il primo di questi enunciati non sarebbe tuttavia sufficiente, da solo almeno, a stabilire la verità dell'asserzione contenuta nel post. II; esso basta però per concludere che, dati i tre punti A, B, C, è unico il piano che si ottiene proiettando da uno qualunque di essi la congiungente degli altri due. Se questo piano lo indichiamo con ABC, l'ultimo postulato può mettersi anche sotto quest' altra forma: *Nel piano* ABC *due rette uscenti rispett. da due qualunque dei punti* A, B, C, *si incontrano sempre.* Non occorre poi certo avvertire che questo postulato non restringe le nostre considerazioni ad alcuna ipotesi particolare sulla questione delle parallele. Basterà fare poi opportune convenzioni per ciascuna di queste ipotesi (anzi, solo per *due* fra le *tre* possibili).

Gli stessi due postulati (limitati come sopra), quando alle parole di *retta* e *piano* si sostituissero rispett. quelle di *segmento rettilineo* e *triangolo* (nel senso ordinario) coinciderebbero rispett. cogli assiomi XIII e XIV del Sig. Peano (op. cit.; p. 18 e 21). I risultati generali che seguono da essi non sono però applicabili a questo caso particolare, non godendo l'ordinario segmento rettilineo della proprietà di essere individuato indifferentemente da due *qualunque* dei suoi punti.

(**) Il Sig. Amodeo si incontrò con me nella definizione del piano, ma ammise poi questo *solo* postulato: *Il piano è individuato da* 3 *suoi punti*, limitato alla forma:

sto (*). *Un piano è quindi individuato da tre suoi punti non collineari*, ovvero anche *da due rette che si incontrano*, ecc. ecc.

3. Stabilite per tal modo le principali proprietà del piano, possiamo definire i successivi spazi S_3, S_4, ..., S_{r-1}, S_r, ciascuno, dirò così, come proiezione del precedente da un punto esterno ad esso (**), dimostrando altresì, in generale, che *un* S_r *è individuato da* $r+1$ *suoi punti qualunque, purchè indipendenti* (ovvero anche *da alcuni fra questi e dallo spazio determinato dai rimanenti*); poi le diverse proposizioni relative alle intersezioni di spazi, ecc. ecc.; il tutto senza che occorra alcun nuovo postulato. Questa parte essendo stata svolta ampiamente dal sig. Amodeo (op. cit. n[i] 5–11), non ho più bisogno di insistervi sopra. Ricorderò solamente che le cose dette (o almeno accennate) finora bastano per stabilire in modo chiaro e preciso il concetto di *proiezione* e *sezione* (loc. cit. 12) e per introdurre anche il *principio di dualità in* S_r.

Quanto poi al numero r, che finora poteva per noi essere qualunque (purchè, naturalmente, intero e > 0), ci converrà, da questo momento in poi, sup-

---

« *Dati i tre punti* $a_0 \cdot a_1$, a_2 *e costruito il piano* $a_0 \cdot a_1 a_2$, *ogni altro piano* « $a_0 \cdot bc$ *che contenga i punti* a_1, a_2 *coincide con esso* ».

Questo postulato però, per quanto *unico* nel suo enunciato, si riduce facilmente ai *due* da me esposti. Esso può scindersi infatti in due parti distinte, delle quali la prima sarebbe: *Ogni piano* $a_0 \cdot bc$ *che contenga i punti* a_1, a_2 *contiene tutta la retta* $a_1 a_2$; e questo equivale appunto a dire che *un piano contiene sempre tutta la retta individuata da due suoi punti*. Da ciò segue senz'altro che ogni punto di $a_0 \cdot a_1 a_2$ sta in $a_0 \cdot bc$, ma non l'inversa. La seconda parte sarebbe poi: *Il piano* $a_0 \cdot bc$ *coincide con* $a_0 \cdot a_1 a_2$; ma, per quanto si è detto, possiamo ora limitarla alla forma: *Se il piano* $a_0 \cdot bc$ *contiene i punti* a_1, a_2 (*non allineati su* a_0) *ogni suo punto è punto di* $a_0 \cdot a_1 a_2$ (ossia ogni sua retta uscente da a_0 taglia la retta $a_1 a_2$). Questa seconda parte può essere verificata anche senza la prima; preceduta da essa, equivale al postulato sull'incidenza di due rette (III); in caso contrario però quest'equivalenza non ha più luogo.

Come si vede dunque, io preferisco (per quanto mi è possibile) separare sempre l'uno dall'altro i singoli postulati distinti, e cercar poi di stabilire cosa da ciascuno di essi si possa dedurre. Data la distinzione di cui nella nota (*) p. 109, mi sembra non possa dirsi che ciò è in contradizione coll'aver prima riuniti tutti quegli r postulati distinti per il Sig. Amodeo.

(*) Anzi questa proposizione si poteva ammettere a sua volta come postulato in luogo del post. III.

(**) Il concetto cui si informano queste definizioni è manifestamente quello di generalizzare il noto procedimento con cui possiamo generare il piano partendo dalla retta e lo spazio a tre dimensioni partendo dal piano. Esso comparve dapprima nei lavori di Grassmann (*Ausdehnungslehre*; 1844) e di Riemann (*Ueber die Hypo-*

porlo altresì ≥ 3 (*). Ciò è necessario quando (come già nel n° seg.) si accenni al teorema di Desargues sui triangoli omologici.

4. (**) Il post. I ci permette di asserire che *una retta contiene sempre almeno due punti* (***). Noi abbiamo però degli esempi, e molti, di rette (nel senso più generale di questa parola) contenenti più di due, e anche infiniti punti. È ciò una conseguenza necessaria dei postulati precedenti?

La risposta è facile e negativa. Se noi conveniamo di chiamare S_r un gruppo qualsiasi di $r+1$ punti, epperò per S_k entro questo S_r ($k < r$) intendiamo l'insieme di $k+1$ punti fra quegli $r+1$, è chiaro che per un tale sistema di spazi sussisteranno tutte le proprietà ammesse o dimostrate finora, pur contenendo ogni retta due soli punti. Volendo quindi escludere questo caso, siamo autorizzati ad ammettere il seguente

Post. IV. *Ogni retta contiene più di due punti* (****).

Anche per ogni punto passeranno quindi sempre, in un piano, più di due rette (*****).

Possiamo ora definire il triangolo, il quadrangolo, e in generale gli n–goni, n–lateri, n–edri, n–spazi (limitatamente, s'intende, all'esistenza di un numero sufficiente di elementi), e dimostrare poi il teorema di Desargues sui triangoli omo-

---

thesen welche der Geometrie zu Grunde liegen; 1854); e fu poi svolto più ampiamente dal Veronese (lav. cit. dei Math. Ann. XIX, e *Fondamenti* ecc.).

(*) Supporremo cioè che entro la varietà di punti propostaci (n° 1) si possa costruire almeno un S_3.

(**) È qui ch'io comincio ad allontanarmi dalla via seguita dal Sig. Amodeo, pur tendendo allo stesso suo scopo, a *distendere* cioè sulla retta la variabile numerica.

(***) Così pure si vede subito che un piano ne contiene almeno *tre*, e, in generale, un S_r almeno $r+1$.

(****) Metto questo (e i successivi) sotto forma di *postulati*, esprimendo essi effettivamente *proprietà* dell'ente *retta*. Avvertiamo poi che la proprietà presente (a differenza di altre che troveremo in seguito) potrebbe benissimo sussistere per una sola retta, ovvero anche per tutte quelle e quelle sole di un certo piano, o S_3, ecc. Non basterebbe quindi ammettere p. e. che « Esiste *una* retta contenente più di due punti ».

(*****) E più di due saranno anche, in generale, gli S_k passanti per un dato S_{k-1} e contenuti in un dato S_{k+1} (supposto, naturalmente, che quest' ultimo spazio contenga l' S_{k-1} stesso).

logici, gli analoghi pei quadrangoli piani e sghembi (tetraedri), nonchè parecchie e facilissime loro generalizzazioni (*); il tutto anche in modo assai semplice (**).

5. Possiamo ora definire il *gruppo armonico* di elementi in una *forma semplice fondamentale* (punteggiata o fascio).

Dati su di una retta tre punti A, B, C, (e tanti almeno sappiamo che ne esistono), costruisco un quadrangolo piano completo EFGH, del quale due lati opposti EF e GH passino per A; altri due, pure opposti, per B, e siano EG e FH; e il lato EH passi per C. Il sesto lato FG incontrerà la retta ABC in un punto D unico e ben determinato, come risulta subito da noti teoremi di geometria proiettiva, che continuano a valere anche in questo caso più generale.

Chiamo *gruppo armonico di punti* la quaderna ABCD; il punto D si dirà anche *quarto armonico* dopo i tre punti A, B, C, oppure *coniugato armonico* di C rispetto alla coppia AB (***).

Quattro punti A, B, C, D di una retta r formanti un gruppo armonico sono proiettati da ogni S_{k-1} non incidente ad r secondo quattro S_k di un fascio, e che diremo pure formare un *gruppo armonico. Ogni retta contenuta nell'* S_{k+1} *di questo fascio, ma non incidente al suo* S_{k-1} *asse, sega i quattro* S_k *in punti di un gruppo armonico* (****).

I gruppi armonici si conservano dunque in qualsiasi proiezione o sezione.

Se ABCD *è un gruppo armonico, saranno pure armoniche le tre quaderne* BACD, ABDC, BADC.

6. *Due gruppi armonici qualunque possono sempre ottenersi l'uno dall'altro mediante un numero finito di proiezioni e sezioni.*

Basta dimostrarlo per due gruppi di punti ABCD e $A'B'C'D'$. Applico una delle solite costruzioni usate in geometria proiettiva per passare mediante proiezioni e sezioni, dalla terna ABC alla $A'B'C'$. La stessa costruzione, applicata al punto D, condurrà a determinare sulla retta $A'B'C'$ un punto D' tale che il gruppo $A'B'C'D'$ sia armonico. Sarà dunque necessariamente $D' \equiv D$, come si voleva dimostrare.

Se i singoli lati del quadrangolo EFGH si sono presi (come implicitamente abbiamo supposto) tutti distinti fra loro e dalla retta ABC, è chiaro che il punto

---

(*) Che per noi però non hanno grande importanza.

(**) Va da sè che anche qui io mi baso sull'analogia, la quale mi dispensa dal dare espressamente, come dovrei, tutte le definizioni accennate, e dall'enunciare anche solo i vari teoremi citati.

(***) É evidente che questo concetto (importantissimo) di *gruppo armonico* non si sarebbe potuto introdurre senza aver premesso il post. IV.

(****) Ciò è subito provato nei casi di $k=1$ e $k=2$ colle solite dimostrazioni usate in geometria proiettiva. E queste si estendono immediatamente al caso di k qualunque.

D, intersezione di quest'ultima retta colla FG, non potrà coincidere nè con A nè con B. Ma potrà coincidere con C? A questo risponderemo fra poco; possiamo però asserire fin d'ora che, se quella coincidenza ha luogo *una* volta, dovrà aver luogo sempre, e inversamente; ciò è conseguenza immediata del teorema ultimo e del fatto che un'*operazione proiettiva* qualsiasi è sempre univoca.

Se esistono dunque in una forma fondamentale semplice tre elementi distinti e tali che il coniugato armonico di uno di essi rispetto agli altri due sia un quarto elemento della forma distinto dai precedenti, altrettanto avrà luogo per ogni altra terna.

Se invece una (sol) volta quel quarto elemento coincide con uno dei primi tre (e non può coincidere, come sappiamo, che con uno determinato fra essi), *nessun gruppo armonico potrà essere costituito da quattro elementi distinti.*

Ovvero, in altri termini: *I tre punti diagonali di un quadrangolo piano completo o sono sempre vertici di un triangolo, o sono sempre collineari* (*).

7. Dati sopra una retta tre punti A, B, C, tutti distinti, supponiamo (se possibile) che il coniugato armonico di C rispetto alla coppia AB sia lo stesso punto C.

Otteniamo allora una configurazione di 7 punti (A, B, C, E, F, G, H) e di 7 rette (la ABC e i sei lati del quadrangolo completo EFGH) per la quale sono verificati tutti i postulati relativi al piano. Due qualunque di quei 7 punti determinano una retta, la quale contiene ancora un terzo punto; due qualunque delle 7 rette hanno a comune un punto per cui passa sempre una terza retta (fra le sette). L'ipotesi $D \equiv C$ non presenta dunque nulla di assurdo, di incompatibile coi postulati precedenti; *essa non ci permette però di concludere l'esistenza di un quarto punto sulla retta, nè quella di un ottavo punto nel piano*; *dai postulati ammessi finora non segue cioè una tale esistenza.* E la prova di questo si ha precisamente nel fatto che si è potuto costruire (o, dirò meglio immaginare) un ente per cui sono verificati tutti i postulati precedenti, ma nel quale tuttavia non esistono quegli elementi ulteriori.

Proiettando quel *piano di 7 punti* da un punto esterno ad esso (**), si potrebbe giungere a una configurazione di 15 punti, 15 piani e 35 rette, per la quale sarebbero verificate tutte le proprietà dell'S_3. Per ogni punto passerebbero 7 rette e 7 piani; in ogni piano starebbero 7 rette e 7 punti; ogni retta conterrebbe tre punti, e per essa passerebbero tre piani, ecc. ecc. Si potrebbe anzi immaginare, in generale, un S_r costituito da $3 \cdot 2^{r-1} + 2^{r-2} + \ldots + 2^2 + 2 + 1$ ossia $2^{r+1} - 1$ punti e contenente un egual numero di S_{r-1}; e nel quale per $k + 1$

(*) E analogamente per le tre diagonali di un quadrilatero, ecc. Avvertiamo poi che le poche cose dette finora sui gruppi armonici possono valere tanto nell' una quanto nell'altra ipotesi.

(**) Conducendo cioè le rette che congiungono quest'ultimo punto a ciascuno dei primi sette.

punti arbitrarii ma indipendenti passerebbe sempre un S_k contenente altri $2^{k+1}-k-2$ punti determinati (*) (**).

Noi ammetteremo invece questo nuovo postulato:

Esiste un *gruppo armonico* A B C D *costituito da quattro elementi distinti.* L'ipotesi $D \equiv C$ rimane dunque *per sempre* esclusa (***). Che poi la nuova ipotesi sia anch'essa compatibile coi postulati precedenti, è manifesto, e risulterà d'altronde dalla stessa esposizione seguente.

8. Riprendiamo il nostro gruppo armonico ABCD col suo *quadrangolo costruttore* E F G H. Sia O l'intersezione (ora distinta da C e D) dei lati EH e FG. Se conduco ancora le rette AO e BO a tagliare la prima BF e BE rispett. in M e in P, la seconda AE e AG rispett. in N e in Q, si dimostra facilmente, e in modo noto, che le rette NM e PQ si incontreranno nel punto C, le NP e MQ nel punto D. Ciò prova che *I quattro gruppi* CDAB, CDBA, DCAB, DCBA, *sono anch'essi armonici*; M N P Q è un loro comune quadrangolo costruttore. In tutto dunque i quattro punti danno luogo a *otto* gruppi armonici. *La relazione fra le coppie* AB e CD *è reciproca*. Gli elementi di una qualunque di esse si diranno *coniugati armonici* rispetto a quelli dell'altra.

Si domandi ora il coniugato armonico di B rispetto alla coppia AD (quel punto X cioè per cui sia A D B X un gruppo armonico). Fissati i punti O e N allineati su B, conduco AO e DN a segarsi in P, AN e DO a segarsi in F. Il punto X richiesto sarà l'intersezione di PF colla ABCD. Esso non può certo coincidere nè con B, nè con A o D. Non è invece escludibile (*a priori* almeno) che possa coin-

---

(*) Si vede anche facilmente che le rette (e gli S_{r-2}) di quell' S_r sarebbero in numero di $\frac{1}{3}(2^{r+1}-1)(2^r-1)$; i piani e gli S_{r-3} sarebbero

$$\frac{1}{3\cdot 7}(2^{r+1}-1)(2^r-1)(2^{r-1}-1);$$

e in generale il numero degli S_k (e degli S_{r-k-1}) sarebbe

$$\frac{(2^{r+1}-1)(2^r-1)(2^{r-1}-1)\ldots(2^{r-k+1}-1)}{(2^{k+1}-1)(2^k-1)(2^{k-1}-1)\ldots(2-1)}.$$

(**) Le configurazioni cui ora siamo giunti – e così pure le altre che troveremo in seguito e le loro generalizzazioni per r qualunque – potrebbero forse ammettere delle rappresentazioni sensibili, le quali offrirebbero allora utile applicazione a uno studio ulteriore di esse. Di questo studio non intendo occuparmi, per ora almeno; ma non lo ritengo certo del tutto privo di interesse.

(***) Epperò il quarto armonico dopo tre elementi distinti sarà *sempre* un nuovo elemento distinto dai primi tre.

cidere con C; che cioè la retta PF venga a cadere sulla PQC, epperò risulti armonico il gruppo ADBC. Anche qui si vede facilmente che, se una (sol) volta quel punto X coincide con C, un'analoga coincidenza dovrà aver luogo sempre; e, inversamente, se una (sol) volta quei due punti non coincidono, non potranno mai coincidere. Supposto dunque (se possibile) che coincidano una volta e quindi sempre, sarà pur sempre armonico il gruppo ADBC, e, per conseguenza, saranno tali anche DABC , ADCB , ... BCAD , ... CBDA ; in tutto cioè avremo *altre otto* quaderne armoniche. E non basta; perchè, in queste stesse ipotesi, saranno necessariamente armonici anche il gruppo ACDB (*) e gli altri sette che questo porta di conseguenza; epperò, come conclusione ultima, troviamo che: *I quattro punti* A , B , C , D , *considerati in un ordine qualunque, formano sempre un gruppo armonico* (**). Si vede subito inoltre che:

Si ha così una configurazione di 13 *punti e* 13 *rette per cui sono verificati tutti i postulati relativi al piano. Su ogni retta stanno* 4 *punti, per ogni punto passano* 4 *rette*; *gli uni e le altre, considerati in un ordine qualsiasi, formano sempre un gruppo armonico.*

Da questo piano di 13 punti si potrebbe poi dedurre per proiezione una configurazione di $13 \cdot 3 + 1$ ossia di 40 punti, per la quale sarebbero verificate tutte le proprietà dello spazio S_3 (***); e, più generalmente, se ne potrebbe avere una di $4.3^{r-1} + 3^{r-2} + \ldots + 3^2 + 3 + 1$ ossia di $\frac{3^{r+1}-1}{2}$ punti, per la quale sarebbero verificate tutte le proprietà dello spazio S_r. Non è dunque assurda l'ipotesi che siano contemporaneamente armonici i due gruppi ABCD e ADBC. Essa non ci permette però di affermare che sulla retta esistano più di quattro punti, nè, in generale, che ve ne siano più di $\frac{3^{r+1}-1}{2}$ in S_r. *Dai postulati precedenti non segue dunque che questi limiti* debbano *essere superati*; epperò, volendo che lo siano, dovremo *necessariamente* agli stessi postulati aggiungerne un altro. Noi supporremo precisamente che la retta PQC (v. sopra) non passi per il punto F, e

---

(*) Perchè ACDB è ottenuto da ADBC come questo da ABCD. Ciò risulta del resto anche dalla costruzione.

(**) Supposto che il punto F stia sulla retta PQC, se ne deduce subito (per ragioni di simmetria, o anche dall'armonicità di queste ultime quaderne) che i punti E , G , H stanno rispett. sulle rette MQD , NMC , NPD.

(***) Essa conterrebbe p. e. 40 piani (di 13 punti ciascuno) e 130 rette; per ogni punto passerebbero 13 rette e 13 piani; per ogni retta 4 piani, ecc. Ogni fascio (di raggi o piani) sarebbe composto di 4 elementi formanti in tutti i modi possibili un gruppo armonico.

che perciò il coniugato armonico di B rispetto alla coppia AD sia un nuovo punto K. In altri termini, ammetteremo il postulato seguente:

Esiste un gruppo armonico ABCD *tale che non sia armonica la quaderna* ADBC. E se ciò si verifica per *un* gruppo armonico, sappiamo che si verificherà necessariamente per ogni altro.

Sopra ogni retta AB — sulla quale per il post. IV esiste sempre un terzo punto C — esisteranno dunque certo ancora un quarto punto D tale che sia armonica la quaderna ABCD, e un quinto punto K tale che sia armonica la ADBK (*). Si può anzi vedere facilmente che, nelle stesse ipotesi, dovrà anche esistere un sesto punto L, coniugato armonico p. e. di A rispetto alla coppia DB, e che non potrà coincidere con alcuno dei precedenti. Ma su ciò non è qui il luogo di insistere; tanto più che vogliamo ora trattare una questione molto più generale, e che d'altronde, al punto in cui siamo, ci si presenta spontaneamente. Ammessa infatti l'esistenza di almeno tre punti sopra ogni retta — e quindi la possibilità di costruire su questa un gruppo armonico, — noi abbiamo esaminato il caso in cui già la prima costruzione di un tal gruppo non conduca a determinare sulla retta stessa alcun nuovo punto, e quello in cui la medesima costruzione faccia invece trovare un quarto punto, salvo poi, se ripetuta, ricondurre a uno dei primi. Ora noi vogliamo supporre che, succedendosi quelle costruzioni con una legge determinata, si venga a ritrovare, se possibile, uno dei punti precedenti dopo un certo numero (che lasceremo indeterminato) di operazioni (e non prima). Per far questo però ci occorre prender le mosse un po' più da lontano.

9. Dati in una forma fondamentale semplice tre elementi (distinti) qualunque chiamo *sistema armonico* l'insieme di tutti gli elementi (siano pur in numero finito od infinito) deducibili da essi con successive costruzioni di quarti armonici. Il sistema armonico è pienamente individuato da quei primi tre elementi, che diremo suoi *elementi fondamentali* (Cfr. De Paolis; op. cit. p. 5); — ma che però (come si può dimostrare) non sono mai elementi particolari di esso.

Due sistemi armonici posti sopra forme distinte od anche coincidenti possono sempre riferirsi tra loro univocamente per modo che si corrispondano i rispettivi elementi fondamentali in un determinato ordine, e poi due elementi qualunque aventi una medesima *legge di generazione*. Una tal corrispondenza la chiameremo *proiettività* (**).

(*) L'esistenza di questi due punti sulla retta segue, per essi, rispett. dai due ultimi postulati; l'esistenza però sulla retta rispett. di un quarto e di un quinto punto (ammessa senz'altro) non potrebbe sostituire i postulati stessi.

(**) Questa considerazione della proiettività fra sistemi armonici (anzichè addirittura tra due forme geometriche) basta, per il momento almeno, allo scopo che ci siamo

La proiettività è individuata dalla corrispondenza fra le due terne di elementi fondamentali. *Se le due forme sostegni sono sovrapposte, e gli elementi fondamentali sono tutti tre uniti, la proiettività si riduce a un'identità.*

Due gruppi di (uno stesso numero di) punti si diranno *proiettivi* quando sono costituiti rispett. da punti a due a due omologhi in sistemi armonici proiettivi.

Ai sistemi armonici proiettivi così definiti sono applicabili tutte le note proposizioni di geometria proiettiva che si riferiscono alla proiettività tra forme semplici fondamentali (fatta solo eccezione per quanto riguarda il verso o i punti uniti). In particolare:

Due gruppi di elementi (di sistemi armonici) ottenibili l'uno dall'altro mediante un numero finito di proiezioni e sezioni sono sempre proiettivi. L'inversa è pur vera, ossia: *Due gruppi di elementi i quali siano proiettivi (siano cioè omologhi in sistemi armonici proiettivi) possono sempre ricavarsi l'uno dall'altro con un numero finito di operazioni proiettive.*

Notiamo altresì la proposizione seguente, che ci sarà utile in seguito: *Se un gruppo* ABCD *di quattro elementi di una forma semplice fondamentale è proiettivo a* ABDC, *esso è necessariamente armonico* (*).

Ne seguono ancora i principali teoremi relativi alle involuzioni (fra elementi di un sistema armonico). Fra le altre, ricordiamo che *è involutoria ogni corrispondenza proiettiva nella quale due elementi distinti si corrispondano in doppio modo.*

Non possiamo tuttavia distinguere (per ora) le involuzioni in *iperboliche* ed *ellittiche* (**). Un'involuzione potrà avere elementi doppi, ma sarà in tal caso un'involuzione particolare; o, per dir meglio, un'involuzione determinata mediante due

---

proposti, e permette poi nel tempo stesso (e questo ne è il vantaggio) di trarre subito l'importante conclusione di cui al capoverso seguente.

(*) La relazione ABCD$\barwedge$ABCD non ha per noi alcun significato se i punti A,B,C,D non sono contenuti in *un certo* sistema armonico. Di questo posso scegliere tuttavia come *fondamentali* tre elementi qualunque, p. e. gli stessi A,B,C. Scrivendo dunque ABCD $\barwedge$ ABDC, io posso sempre intendere questo: *I punti* D *e* C *appartengono rispett. ai sistemi armonici* ABC *e* ABD, *e hanno in questi una medesima legge di generazione.* (E sarà anzi solo in quest'ipotesi, apparentemente particolare, che avremo da applicare la proposizione enunciata di sopra).

Presentato il teorema sotto questo punto di vista, possiamo dimostrarlo col solito e semplicissimo procedimento usato in geometria proiettiva.

(**) Si fa astrazione, naturalmente, dal caso particolarissimo delle involuzioni *paraboliche*. Queste non possono anzi nemmeno presentarsi, se ci limitiamo a considerare gruppi armonici costituiti da elementi distinti.

coppie di elementi distinti non avrà o almeno non potremo asserire che abbia, nel caso più generale, elementi doppi (*).

10. Sopra una retta abbiansi tre punti distinti O, A_1, A_2. Costruisco il punto A_3 per cui sia armonico il gruppo $OA_2 A_1 A_3$; poi A_4 tale che sia armonico $OA_3A_2A_4$, e così via; costruisco cioè successivamente altri elementi $A_3 A_4 \ldots A_k \ldots$ tali che siano armonici tutti i gruppi del tipo $OA_k A_{k-1} A_{k+1}$. Chiameremo *serie armonica* il sistema di punti $(O.A_1 A_2 A_3 \ldots A_h \ldots)$, e il punto O lo diremo *origine* della serie (*). La serie stessa è manifestamente contenuta nel sistema armonico che ha per elementi fondamentali O, A_1, A_2.

È chiaro che nessuno dei successivi punti A_i potrà cadere in O. Ciascuno di essi è ottenuto infatti come quarto armonico dopo tre elementi distinti, uno dei quali è sempre lo stesso O. Non si può invece escludere (*a priori* almeno) la possibilità di giungere ad un punto A_{n+1} il quale venga a coincidere con A_1, o, per avere una maggior generalità, con uno qualsiasi A_m dei punti precedenti (essendo $0 < m < n$). In tal caso però, considerando i sistemi armonici OA_mA_{m+1} e OA_mA_n, si avrebbe tosto

$$OA_m A_{m+1} \ldots A_{m+h} \ldots A_n \barwedge OA_m A_n \,.\,.\, A_{a-h+1} \ldots A_{m+1}$$

e in particolare

$$OA_m A_{m+1} A_n \barwedge OA_m A_n A_{m+1}.$$

Questi due gruppi sarebbero dunque armonici, e il punto A_n coinciderebbe con A_{m-1}.

Ripetendo questo ragionamento un numero opportuno di volte, si conclude senz'altro che basta considerare il caso di $m = 1$; il caso cioè in cui l'elemento A_{n+1} coincide precisamente col primo elemento (A_1) della serie.

11. Supposto dunque $A_{n+1} \equiv A_1$, si avrà $OA_1 A_2 A_n \barwedge OA_1 A_n A_2$ e queste due

---

(*) Le definizioni e le considerazioni esposte in questo n° 9 si sarebbero potute far precedere, volendo, alle cose contenute nel n° 8 e anche nello stesso n° 7. Nei due casi particolari ivi contemplati un sistema armonico si comporrebbe di soli quattro elementi, oppure si ridurrebbe ai soli elementi fondamentali. Delle proposizioni enunciate alcune diverrebbero addirittura evidenti, altre perderebbero ogni significato (p. e., nel caso del n° 7, tutte quelle in cui occorre considerare almeno quattro elementi distinti di una forma semplice); nessuna però diventerebbe assurda.

(*) Anche questa denominazione di *serie armonica* (come quella di *sistema armonico*) è presa dal De Paolis. Mi è parso opportuno di conservarle entrambe, per quanto io qui le adoperi in un *caso* (se non in un *senso*) più generale.

quaderne saranno armoniche. L'elemento A_{n+2} sarà perciò lo stesso A_2; ed anzi $A_{n+3} \dots A_{2n} A_{2n+1} \dots$ coincideranno rispett. con $A_3 \dots A_n A_1 \dots$ La serie può supporsi prolungata indefinitamente, ma è, per così dire, *periodica*; essa *rientra in sè stessa dopo* n *elementi*.

I singoli punti A si trovano dunque tutti nelle medesime condizioni; ogni relazione fra due o più di essi continua a sussistere anche se si aumentano o si diminuiscono tutti gli indici di uno stesso numero (introducendovi o sopprimendovi anche ove occorra, un multiplo opportuno di n).

Dalla proiettività

$$OA_1 A_2 A_3 \dots A_{k+1} \dots A_n \barwedge OA_1 A_n A_{n-1} \dots A_{n-k+1} \dots A_2$$

si deduce altresì che, qualunque sia il numero intero k, si avrà:

$$OA_1 A_{k+1} A_{n-k+1} \barwedge OA_1 A_{n-k+1} A_{k+1}$$

epperò di nuovo questi due gruppi sono armonici; e in generale:

Sono armonici tutti i gruppi del tipo $OA_i A_{i-k} A_{i+k}$: (ovvero anche $OA_k A_l A_m$, dove $l+m=2k$).

Per conseguenza, *se nella nostra serie noi saltiamo gli elementi a* k − 1 *per volta, e consideriamo quindi la successione* $O.A_i A_{i+k} A_{i+2k} \dots$, *avremo sempre una nuova serie armonica.*

Due serie armoniche $(OA_1 A_2)$ e $(O' A_1' A_2')$ *sono sempre proiettive.* Se dunque nella prima A_{n+1} coincide con A_1, nella seconda dovrà A'_{n+1} coincidere con A_1', e inversamente; ossia:

Se una serie armonica qualsiasi rientra in sè stessa dopo un certo numero di elementi, in sè stessa dovrà pure rientrare ogni altra serie siffatta, e dopo lo stesso numero di elementi.

Sia ora $O.A_1 A_2 A_3 \dots$ una serie armonica rientrante in sè stessa dopo n elementi. Sia inoltre n, se possibile, un numero non primo; e indichiamo con x un suo divisore (intero) diverso da esso e dall'unità. È chiaro allora che la serie armonica $O.A_1 A_{\frac{n}{x}+1} A_{\frac{2n}{x}+1} \dots A_{\frac{(x-1)n}{x}+1} A_{\frac{xn}{x}+1} \dots$, il cui ultimo elemento scritto sarebbe lo stesso A_1, rientrerebbe in sè stessa dopo un numero $x < n$ di elementi. Ciò essendo contrario all'ultima proposizione, concludiamo:

Se la serie armonica $O.A_1 A_2 A_3 \dots$ *rientra in sè stessa (soltanto) dopo* n *elementi, dovrà essere necessariamente* n *un numero primo* (*).

(*) Appunto per questo non potrebbe p. e. l'elemento A_3 coincidere con A_1; se no, dall'armonicità dei gruppi $O A_2 A_1 A_3$, $O A_3 A_2 A_4$, $O A_4 A_3 A_1$ seguendo quella

12. Faremo ora vedere che, se n *è un numero primo qualunque, si possono sempre pensare delle serie armoniche conformi alla data definizione, e rientranti in sè stesse dopo* n *elementi.*

Considero infatti un insieme di n^2+n+1 punti; di questi, $n+1$ li rappresento coi numeri $0, 1, 2, \ldots n$, e i rimanenti n^2 cogli stessi numeri $1, 2, \ldots n$ affetti da un indice, variabile pure da 1 a n; cogli elementi insomma della matrice quadrata

$$\left|\begin{matrix} 1_1 & 2_1 & \ldots & n_1 \\ 1_2 & 2_2 & \ldots & n_2 \\ . & . & \ldots & . \\ 1_n & 2_n & \ldots & n_n \end{matrix}\right|.$$

Chiamo *retta* ciascuno dei seguenti n^2 $n+1$ gruppi di $n+1$ punti:

a) la serie $0.1.2\ldots n$

b) le n serie contenenti il punto $0: 0 \left\{\begin{matrix} 1_1 & 2_1 & 3_1 & \ldots & n_1 \\ 1_2 & 2_2 & 3_2 & \ldots & n_2 \\ 1_3 & 2_3 & 3_3 & \ldots & n_3 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1_n & 2_n & 3_n & \ldots & n_n \end{matrix}\right.$

c) infine le seguenti n^2 serie, uscenti a n a n rispett. dai punti $1, 2, \ldots n$ (avvertendo di diminuire sempre, i singoli numeri ed indici — quando siano $> n$ — del maggior multiplo intero di n in essi contenuto):

$$1\left\{\begin{matrix} 1_1 & 2_2 & 3_3 & \ldots n_n \\ 2_1 & 3_2 & 4_3 & \ldots 1_n \\ 3_1 & 4_2 & 5_3 & \ldots 2_n \\ . & . & . & \ldots . \\ (\ +i)_1 & (2+i)_2 & (3+i)_3 & \ldots i_n \\ . & . & . & \ldots . \\ n_1 & 1_2 & 2_3 & \ldots (n-1)_n \end{matrix}\right. \qquad 2\left\{\begin{matrix} 2_1 & 4_2 & 6_3 & \ldots n_n \\ 3_1 & 5_2 & 7_3 & \ldots 1_n \\ 4_1 & 6_2 & 8_3 & \ldots 2_n \\ . & . & . & \ldots . \\ (2+i)_1 & (4+i)_2 & (6+i)_3 & \ldots i_n \\ . & . & . & \ldots . \\ 1_1 & 3_2 & 5_3 & \ldots (n-1)_n \end{matrix}\right.$$

---

di $O A_3 A_1 A_1$, si cadrebbe in un assurdo. Questo era appunto il caso di quel punto L considerato alla fine del n° 8.

e in generale

$$k\left\{\begin{array}{lllll} k_1 & (2k)_2 & (3k)_3 & \ldots & n_n \\ (k+1)_1 & (2k+1)_2 & (3k+1)_3 & \ldots & 1_n \\ (k+2)_1 & (2k+2)_2 & (3k+2)_3 & \ldots & 2_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (k+i)_1 & (2k+i)_2 & (3k+i)_3 & \ldots & i_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (k-1)_1 & (2k-1)_2 & (3k-1)_3 & \ldots & (n-1)_n \end{array}\right.$$

e finalmente

$$n\left\{\begin{array}{lllll} n_1 & n_2 & n_3 & \ldots & n_n \\ 1_1 & 1_2 & 1_3 & \ldots & 1_n \\ 2_1 & 2_2 & 2_3 & \ldots & 2_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (n-1)_1 & (n-1)_2 & (n-1)_3 & \ldots & (n-1)_n . \end{array}\right.$$

Abbiamo così un insieme di n^2+n+1 punti e di altrettante rette; su ogni retta stanno $n+1$ punti, e per ogni punto passano $n+1$ rette.

Due punti qualunque individuano una retta che li contiene. Se uno (almeno) dei due punti sta sopra la retta $0.1.2 \ldots n$, la cosa è evidente. Considereremo quindi senz'altro il caso di due punti y_z e $y'_{z'}$, supponendo anche $y \mathrel{\mathpalette\notequiv\relax} y'$ e $z \not\equiv z'$ (se no i due punti individuerebbero una retta passante per il punto n o per il punto 0); e faremo vedere che sulla retta $0.1.2 \ldots n$ esiste sempre uno ed un solo punto (diverso da 0 e da n) allineato sui due punti dati. E infatti, perchè un punto k sia collineare con y_z e $y'_{z'}$, si vede subito essere necessario e sufficiente che la differenza $y'-y$ sia uguale alla $z'-z$ moltiplicata per k, a meno, s'intende, di un multiplo di n; si tratta dunque di mostrare che esiste uno ed un solo numero k (sempre a meno di un multiplo di n) per cui sia soddisfatta la relazione

$$y'-y \equiv k(z'-z) \ldots. \qquad (\text{mod. } n)$$

E questo ricordando che n è numero primo, segue subito da una nota proprietà delle congruenze.

Due rette qualunque hanno a comune un punto ed uno solo. Se una delle due rette passa per il punto O, la cosa è evidente (*). In ogni altro caso poi, considerate le due rette

$$k \;;\; (k+i)_1 \;;\; (2k+i)_2 \;;\; \ldots\, i_n$$

$$k' \;;\; (k'+i')_1 \;;\; (2k'+i')_2 \;;\; \ldots\, i'_n$$

tutto si riduce a mostrare che esiste uno ed un solo numero $x \leq n$ tale che i due punti $(xk+i)_x$ e $(xk'+i')_x$ coincidano; che si abbia cioè

$$x(k'-k) \equiv i-i' \;\ldots \qquad (\text{mod. } n)$$

E questo l'abbiamo veduto precisamente poc'anzi.

Per questo sistema di n^2+n+1 *punti e di altrettante rette sono dunque verificati tutti i postulati relativi al piano.*

Possiamo anche verificare assai facilmente che i gruppi 0213, 0324, ... $0.k\,k-1.k+1$, .. $0.n.n-1.1$ sono tutti armonici; la serie $0.123\ldots n$ sarà perciò armonica e rientrante in sè stessa dopo n elementi.

Una serie analoga si potrebbe anzi determinare sopra ciascuna delle n^2+n+1 rette (e in ciascuno degli n^2+n+1 fasci di raggi) sceglieendone ad arbitrio l'origine e due elementi consecutivi.

È dunque compatibile con tutti i postulati precedenti l'ipotesi che la serie armonica $0.A_1\,A_2\,A_3 \ldots$ *rientri in sè stessa dopo un numero finito qualunque di elementi, purchè primo* (**).

Furono appunto le ipotesi particolari di $n=2$ e $n=3$ che ci condussero alla considerazione dei due piani rispett. di *sette* e di *tredici* punti. Anche per i casi successivi si potrebbe fare, e senza difficoltà, uno studio analogo, più o meno particolareggiato. Per $n=5$ si avrebbero ad e. su ogni retta sei punti, ripartibili in cinque modi diversi in tre coppie a due a due armoniche. Gli altri dieci aggruppamenti analoghi corrisponderebbero ad altrettante terne di coppie in involuzione.

Dal piano di n^2+n+1 ossia $\dfrac{n^3-1}{n-1}$ punti si potrebbe poi passare a un S_3

(*) È pure evidente se una delle due passa per il punto n, ma a questo caso è anche applicabile la dimostrazione generale che segue. E qualcosa di analogo si poteva dire anche nella questione precedente.

(**) E che questo numero sia primo è condizione non solo sufficiente, ma anche necessaria (v. n° 11).

con $\frac{n^4-1}{n-1}$ punti e altrettanti piani, e, in generale, a un S_r con $\frac{n^{r+1}-1}{n-1}$ punti e un egual numero di S_{r-1}, e con un numero pure finito e facilmente determinabile di spazi S_k $(0 < k < r-1)$ (*).

13. La serie dei numeri primi essendo infinita, è chiaro, per quanto si è detto, che, se noi desideriamo la nostra retta e il nostro piano siano di tal natura, che una serie armonica su di quella non rientri mai in sè stessa (**), saremo autorizzati ad ammettere questa proprietà come *postulato*. Assumeremo quindi il seguente

Post. V. *Esiste* una *serie armonica non mai rientrante in sè stessa.* O in altri termini:

Esiste in una forma semplice fondamentale una serie di elementi $O.A_1A_2...A_n...$ *in cui tutti i gruppi del tipo* $O\,A_k\,A_{k-1}\,A_{k+1}$ *sono armonici*, *e nessun elemento* A_n *può coincidere con uno dei precedenti* (***).

Ciò che si è ammesso per *una* serie è poi manifestamente vero per ogni altra. La serie armonica è dunque infinita. Ogni forma semplice fondamentale contiene perciò infiniti elementi (e in particolare ogni retta infiniti punti), e infiniti sono pure gli elementi di ogni *sistema armonico*. Anzi, data sempre la stessa serie armonica, noi possiamo cercare ancora l'elemento A_0 per cui sia armonico il gruppo $O\,A_1A_0A_2$, poi A_{-1} per cui sia armonico $O\,A_0A_{-1}A_1$, e successivamente A_{-2}, A_{-3} ecc. Nè mai un elemento A_{-m} potrà coincidere con un altro A_n, se no la serie verrebbe a rientrare in sè stessa dopo $m+n$ elementi, il che è assurdo.

D'ora in poi, quando parleremo di una serie armonica, la intenderemo sempre, senz'altro, prolungata indefinitamente da ambo i lati. Essa sarà sempre individuata dall'origine e da due suoi elementi consecutivi qualunque;—e si può anzi dimostrare non esser nemmeno necessario che questi siano proprio consecutivi.

(*) Sono queste appunto le generalizzazioni cui già accennammo nella nota a p.15.

(**) Che cioè le indicate costruzioni di gruppi armonici conducano ivi sempre alla determinazione di nuovi elementi.

(***) Questo postulato non solo dunque non è conseguenza delle cose precedenti, ma non è nemmeno (per così dire) *ulteriormente riducibile* (non può cioè limitarsi ad una forma meno comprensiva). Esistono infatti sempre dei numeri primi superiori a un dato limite finito qualsiasi.

Questo stesso postulato non ha poi bisogno di essere preceduto dai due dati rispett. ai numeri 7 e 8; ma anzi, in certo qual modo, comprende in sè questi ultimi. Essi dicono infatti, in sostanza, che la serie armonica non può rientrare in sè stessa rispett. dopo due o dopo tre elementi. Perciò appunto lo diamo come V. Occorre invece premettergli, ed esplicitamente, il post. IV, necessario (cfr. la nota (***) a p. 113) all'introduzione del concetto di *gruppo armonico*, e quindi di *serie armonica*.

14. Supponiamo ora di ritornare al principio del n^0 4, e riprendervi le varie nostre considerazioni al punto in cui vi si trovavano. Ammettiamo però addirittura anche il post. IV, per quanto esso non sia *subito* necessario.

Se i punti della retta sono in numero finito, potremo sempre immaginarli disposti in un qualche ordine tale che, partendo da uno qualunque fra essi, si possa ritornare a questo stesso dopo aver percorsa tutta la serie dei punti medesimi e senza essere passato mai due volte per alcuno di essi. Questo si può asserirlo (in tal caso) senz'alcun nuovo postulato. Ma se la retta contiene un numero infinito di punti, la proprietà enunciata non è più per essa evidente; e perciò, intendendo attribuirgliela anche in quest'ultima ipotesi, la ammetteremo come postulato. Quindi:

Post. V *a*. *I punti di una retta si possono sempre pensare disposti in un ordine tale che, partendo da uno qualunque fra essi, si possa ritornare a questo stesso dopo aver percorsa tutta la serie dei punti della retta, e senza esser passato mai due volte per alcuno di tali punti.*

Se vi è *un* ordinamento soddisfacente a questo postulato, ve ne sono certo degli altri, anzi infiniti altri (ammesso che la retta contenga infiniti punti), tutti quelli ad es. che si possono ottenere dal primo scambiando in esso comunque due o tre o più punti. Di questi ordinamenti non ci occorrerà però in seguito di considerarne che *due* soli (fra loro inversi); quindi l'opportunità, la necessità anzi di *fissare* questi due in modo speciale, di metterli cioè in evidenza rispetto agli altri. E questo lo otterremo enunciando, in un nuovo postulato, qualche loro proprietà distintiva; diremo anzi addirittura (la ragione ne apparirà poi più innanzi) che, dato lo scopo cui tendiamo, è opportuno attribuire quei due ordinamenti *proprietà proiettive*. Ammetteremo perciò il seguente

Post. V*a*. *Fra quei vari modi di ordinamento ve ne sono due particolari, l'uno inverso dell'altro, che chiameremo* ordini naturali, *e sono tali che, proiettando una retta su di un'altra, sempre un ordinamento naturale di quella si proietta in un ordinamento naturale di questa.*

Il concetto di *ordine naturale* può subito estendersi a qualsiasi forma fondamentale semplice. In una tal forma ogni elemento potrà sempre passare dalla propria posizione a quella di un altro qualunque seguendo l'uno ovvero l'altro dei due ordini naturali; e questo appunto potremo indicare dicendo ch'esso può *muoversi (e descrivere tutta la forma) in due direzioni (o versi) fra loro opposti.* Questo *movimento in un determinato verso* si riprodurrà sempre dopo un numero qualsiasi di operazioni proiettive. Basandoci poi sul solo concetto di *verso* (e senza nemmeno parlare di *segmenti*) potremo definire la *separazione* delle coppie di elementi in una forma semplice, e dimostrare altresì ch'essa è proprietà che non si altera per un insieme qualunque di proiezioni e sezioni. E quest'ultimo risultato, importantissimo, non si sarebbe certo potuto ottenere senza l'ipotesi di cui al post. VI *a*.

I postulati V*a* e VI*a* si verificano poi anche nel caso del piano di sette punti (cfr. n[i] 5-7); possiamo quindi, dopo aver definito il gruppo armonico, ammettere ancora il seguente

Post. VII*a*. *Esiste un gruppo armonico formato da quattro elementi distinti*. Da questo segue senz'altro che il coniugato armonico di un elemento qualsiasi rispetto ad altri due (distinti fra loro e da esso) è sempre un nuovo elemento distinto da tutti e tre i primi. Se ne possono anche dedurre le poche cose esposte al principio del n° 8.

Ammesso quest'ultimo postulato (*e non prima*) si può dimostrare rigorosamente che *due coppie armoniche devono necessariamente separarsi* (poichè l'ipotesi contraria implicherebbe la possibilità in quattro punti di una retta di separarsi a due a due in due modi diversi). Questa proposizione serve poi, come ha mostrato anche il sig. Amodeo (op. cit. 15), a far vedere che, costruendo su di una forma semplice fondamentale una serie armonica conforme alla data definizione, gli elementi di questa dovranno sempre succedersi in guisa tale ch' essa non abbia mai a *rientrare in sè stessa* (*).

(*) Questa seconda via che (dal n° 4 in poi) potevamo seguire è notevolmente più breve della prima, e per questo appunto abbiamo voluto farne un cenno. È chiaro però che la maggior brevità si è raggiunta solo coll'introduzione di qualche concetto non assolutamente necessario (gli ordinamenti cioè di cui al post. V*a*, e in particolare gli ordini naturali e il verso); o anzi, dirò meglio, coll'enunciare dei postulati che complessivamente contenevano non solo quanto, per lo scopo propostoci, era necessario di ammettere, ma anche qualcosa di *relativamente* superfluo (superfluo cioè *in relazione a quello scopo*).

Questa seconda via è, press'a poco, quella tenuta anche dal sig. Amodeo (13-15). Fra i nostri punti di partenza non vi era del resto che una differenza unica, limitata al solo postulato della retta, e fors' anche meno essenziale di quanto a prima vista potesse sembrare; il sig. Amodeo aveva ammesso cioè subito che la retta dovesse contenere infiniti punti, mentre noi non avevamo fatto, su questo, alcuna ipotesi particolare. E così facendo, noi venivamo anzi ad accordare alla nostra ricerca (o almeno alla prima parte di essa) una maggior generalità. Solo dall'ultimo postulato e dalla successiva costruzione della serie armonica è scaturito implicitamente che i punti della retta non potevano più supporsi in numero finito. I nostri postulati V*a* e VI*a* sostituiscono insieme l'$(r+3)^{\text{simo}}$ del sig. Amodeo, il quale rimane così un po' modificato. Quell'espressione: « I punti della retta *sono disposti* in modo ... » sembra infatti piuttosto vaga e indeterminata. Questa *disposizione* cui l'A. accenna ha importanza solo in quanto egli stesso intende che ogni punto possa dalla sua posizione passare a quella di un altro qualsiasi, assumendo come posizioni intermedie successive quelle di un certo numero (finito od infinito) di altri punti, e nell'*ordine* stesso di quella *disposizione*. Si vede dunque che l'A. pensa al *movimento*; ma questo

15. Costruita sulla retta la serie armonica, si presenta naturale il modo di *distendere* su di essa la variabile numerica reale ed intera. Basta ad ogni punto A far corrispondere il numero (positivo, negativo o nullo) che ne è indice, e all'origine O il valor infinito della variabile.

Si tratterebbe ora di distendere sulla retta stessa, in modo analogo, la variabile numerica, non più intera, ma semplicemente razionale. Per questo possiamo seguire una via non molto, anzi quasi punto diversa da quella del sig. Amodeo, ma tale tuttavia da permetterci di andare innanzi in modo più conforme a quanto abbiamo fatto sinora. Questa via è, in sostanza, quella tenuta dal sig. De Paolis (*), il quale (al pari del sig. Amodeo) comincia col trattare la questione, d'altronde semplicissima, dell'*inserzione dei medi* in una serie armonica (divisione dei *segmenti principali* in *segmenti armonici* rispetto all'origine), mostrando in seguito come ad un numero razionale qualunque si possa sempre far corrispondere sulla retta un punto unico e ben individuato (**). Definita quindi la *scala armonica* (***), egli dimostra ancora (n° 31) che:

è un concetto che non si può introdurre che mediante postulati. Ad esso appunto si riferiscono i nostri due V*a* e VI*a*, i quali bastano allo scopo. Ed è bene notare la grande importanza di questo secondo postulato (VI*a*) anche in confronto al primo. È quello solamente che ci ha permesso di stabilire *con tutta esattezza e rigore* il concetto di *movimento* (di un punto sulla retta, o di un elemento in una forma semplice qualsiasi) *in un determinato verso*, e di mostrare che la separazione delle coppie di elementi gode di proprietà proiettive: il V*a* non sarebbe stato sufficiente.

Il nostro postulato VII*a* non figura poi affatto nel lavoro del sig. Amodeo. Certo però che nella dimostrazione che vi è data della separazione delle coppie armoniche si fa uso, implicitamente almeno, dell'asserzione contenuta in esso. E che questa sia ivi una conseguenza necessaria delle cose precedenti (compresovi naturalmente l'essere i punti di una retta in numero infinito) non mi sembra certo evidente.

(*) Salvo alcune modificazioni, provenienti essenzialmente dal fatto che il sig. De Paolis si riferisce solo allo spazio ordinario (di punti — a tre dimensioni), mentre noi vogliamo stare in un ordine di idee più generale.

(**) Ciò risulta evidente non appena si sia dimostrato che l'*inserzione* o *divisione* di cui sopra non può farsi che in un modo solo. E questo è provato effettivamente dal De Paolis (n° 19); ma il suo procedimento non è applicabile al nostro caso che nell'ipotesi di aver già prima mostrato (20, 21) che i punti di divisione appartengono al sistema armonico individuato dall'origine e dagli estremi. Questa dimostrazione si può del resto premettere all'altra; ma la stessa costruzione data al n° 20, quando vi si modifichi lievemente la forma del ragionamento (dicendo p. e. *Se c'è una soluzione, il primo punto di divisione* deve *potersi ottenere* ...), può bastare a stabilire l'unicità della soluzione.

(***) « Consideriamo una serie armonica ...$A_{-2}A_{-1}\,A_0A_1\,A_2\ldots A_r$ di origine A_∞...

Ogni elemento di una scala armonica si può ottenere inserendo un numero finito conveniente di medi fra due elementi principali consecutivi.

Da ciò si deduce subito che *a ogni elemento della scala armonica si può far corrispondere un determinato numero razionale* (*).

E questo sarà sempre unico, ossia, in altri termini, i punti corrispondenti a due dati numeri razionali distinti $\frac{\mu}{m}$ e $\frac{\nu}{n}$ non potranno mai coincidere. Essi sono infatti elementi di una stessa serie armonica, ottenuta dalla primitiva (da quella cioè degli *elementi principali*) inserendo fra due termini consecutivi qualunque $mn-1$ medi (al più).

Dati dunque sopra una retta tre punti distinti, se ne possono costruire, con opportune operazioni, infiniti altri formanti una scala armonica, l'insieme di tutti questi punti si potrà mettere in corrispondenza (bi)univoca col sistema dei numeri reali e razionali, facendo anche corrispondere ai primi tre fra essi, in un determinato ordine, i valori $0, 1, \infty$ *della variabile.*

Dimostrato infine, sempre col De Paolis (34, 36), che:

Gli elementi di una scala armonica non sono altro che quelli di un sistema armonico resterà del pari stabilito che:

L'insieme degli elementi di un sistema armonico in una forma semplice fondamentale può sempre riferirsi univocamente alla serie dei numeri razionali (**).

16. I punti di cui, in forza dei postulati precedenti, abbiamo ora dedotta l'esistenza sulla retta sono quelli che comunemente si chiamano *punti razionali*. Ad essi sono applicabili il concetto di *birapporto*, il sistema delle *coordinate*

« Dividendo i segmenti determinati da due elementi della serie in segmenti armonici « rispetto ad A_∞, abbiamo infiniti altri elementi della forma, i quali fra loro e coi « primi danno infiniti altri segmenti che possono ancora dividersi in segmenti ar- « monici, sempre rispetto ad A_∞, costruendo ancora nuovi elementi della forma... « Da queste operazioni, che possono essere indefinitamente proseguite, scaturiscono « infiniti elementi il cui complesso diremo *scala armonica* (De Paolis, op. cit. 29).

(*) E precisamente il numero $k + \frac{h}{i}$, se l'elemento stesso si può ottenere come h^{simo} di $i-1$ medi inserti fra A_k e A_{k+1}.

(**) Da quanto precede risulta manifesta la possibilità di distendere sulla retta la variabile numerica razionale senza ricorrere al concetto di *segmento* introdotto invece dal sig. Amodeo subito dopo il suo postulato $(r+3)^{\text{simo}}$. Non avendovi ri-

proiettive (anche *omogenee*), ecc Si può poi passare, come mostra p. e. il Pasch, (op. cit. § 22), alla costruzione dei *punti razionali* nel piano e nello spazio S_3, e in seguito, con una facile generalizzazione dello stesso procedimento, in uno spazio qualunque S_r. In tutti questi spazi introdurremo così, nello stesso tempo, anche il sistema delle coordinate proiettive. Si può allora dimostrare che, entro l' S_r, l' S_{r-1} (di punti razionali) è rappresentato da un' equazione di primo grado fra le coordinate proiettive di un punto variabile, e viceversa ogni tal equazione rappresenta un S_{r-1}.

Dai postulati ammessi finora segue dunque l'esistenza di infiniti punti sulla retta (*), *nel piano e, in generale, in* S_r. *Questi punti noi abbiamo imparato a costruirli e a rappresentarli con coordinate, tali anche che risulti lineare l'equazione di ogni* S_{r-1} *in* S_r, *e inversamente. Per l'insieme dei punti così ottenuti sono inoltre verificati tutti i postulati precedenti; epperò da questi non segue nè può seguire l'esistenza di altri punti sulla retta, nel piano o negli spazi superiori.* Se dunque di questi altri punti noi vogliamo che ne esistano effettiva-

---

corso, è chiaro che non si poteva più enunciare (a meno di non modificarlo alquanto) il successivo post. $(r+4)^{\text{simo}}$, nè quindi parlare (nel senso almeno che da questo derivava) di punti che *si avvicinano indefinitamente* ad un punto fisso. Noi però abbiamo potuto raggiungere il nostro scopo senza *alcun* nuovo postulato. Potrebbe ciò sembrar strano; ma, dato il genere della questione che andiamo trattando, è chiaro che a noi basta sapere che sulla retta quei tali punti *ci sono*; non occorre invece cercare (dirò così) *dove siano*. E anche del concetto di *distanza* abbiamo potuto fare a meno. Il motivo principale però per cui mi sono attenuto al procedimento del Sig. De Paolis piuttosto che a quello del Sig. Amodeo è stato il desiderio di evitare possibilmente la questione che il secondo di essi si propone (e precisamente al n° 21) se si possa cioè anche ad ogni punto della retta far corrispondere un determinato numero (*indice*).

È appunto così che il Sig. Amodeo viene ad imbattersi nella questione dei punti irrazionali, questione che invece, a nostro avviso, – come vedremo anche al n° seg. – converrebbe tenere ben distinta dalla precedente.

(*) Gli infiniti punti di una retta (o elementi di una forma semplice qualsiasi) sono precisamente (per ora) quelli di un sistema armonico. Questi potrebbero anzi essere i soli; e allora la proiettività fra due sistemi armonici si ridurrebbe a una *proiettività fra due forme*; a una corrispondenza univoca cioè *fra queste*, caratterizzata (ora possiamo dirlo) dal fatto che sempre *a gruppi armonici corrispondono gruppi armonici*. In quest' ipotesi è anche vero senz' altro il teorema fondamentale della geometria proiettiva: *Se due forme fondamentali semplici sovrapposte sono proiettive e hanno tre elementi uniti, saranno uniti anche tutti gli altri elementi* (*la proiettività si ridurrà cioè a un'identità*).

mente, le cose dette ci autorizzano ad introdurre un nuovo postulato ad essi relativo (*).

E questo postulato può essere benissimo, l'$(r+5)^{\text{simo}}$ del Sig. Amodeo (**). I punti di cui risulta così stabilita l'esistenza formano un insieme riferibile univocamente al sistema di tutti i numeri reali (per la retta, – o dei gruppi di r numeri reali qualunque, se siamo in S_r).

Le questioni relative a questi punti irrazionali furono trattate diffusamente dal Sig. Amodeo (n° 22 e seg.), sicchè ritengo ormai inutile di trattenermici sopra più a lungo (***).

17. Voglio piuttosto osservare che, se anche i punti *razionali* (gli elementi cioè della scala armonica) *esaurissero* la retta, si potrebbero egualmente introdurre i punti *irrazionali* mediante una *definizione*, la quale estendesse opportunamente il concetto di punto; si potrebbe cioè convenire di chiamar *punti* anche dei nuovi enti (ad es. delle *serie* di *punti razionali* soddisfacenti a determinate condizioni (****)); salvo poi mostrare che per questi nuovi punti così definiti (e che sarebbero precisamente gli *irrazionali*) sussistono tutte le proprietà di cui già era noto che godevano i punti primitivi (*****). Questa definizione servirebbe in tal caso a *completare* la retta; a far sì cioè, che si possa egualmente distendere su di essa la *variabile numerica reale.*

La definizione si può usare anche nell'ipotesi che la retta, oltre ai punti della scala armonica, ne contenga degli altri. Volendo però che a questi altri corrispondano appunto numeri irrazionali, bisognerà scegliere la detta definizione in modo ch'essa dia precisamente quei punti che effettivamente esistono (più, occorrendo, degli altri fittizi, che servano anche qui a completare la retta).

Dopo i punti irrazionali si potrebbero introdurre quelli *immaginari*, ossia (per meglio esprimerci) i *punti complessi* (*ordinari*). Avvertiamo tuttavia che, introdotti

---

(*) È appunto per questo che (come già avvertimmo nella nota a p. 34) ci è parso preferibile di separare nettamente la questione dei punti razionali da quella degli irrazionali. Senza una tal separazione sarebbe certo difficile (se pur ancora possibile) il provare la necessità di un nuovo postulato.

(**) « Ad ogni numero irrazionale corrisponde sempre sulla retta un punto de« terminato ed unico ».

(***) Aggiungo soltanto che esse pure non richiedono si sia premesso quel postulato $(r+4)^{\text{simo}}$, di cui già ebbi a tenere parola; e che anche dei concetti di *segmento* e di *distanza* non vi è sostanzialmente fatto uso.

(****) Questa definizione corrisponderebbe, come si vede subito, a quella che generalmente si dà dei numeri irrazionali mediante quelli razionali.

(*****) Bisognerebbe quindi definire la retta determinata da un punto razionale e da uno irrazionale, oppure da due punti irrazionali, in modo che sempre per due punti qualunque passi una retta ed una sola, ecc. ecc.

questi, alcuni dei postulati precedenti (V*a* e VI*a*) cesserebbero di valere; e perciò appunto conviene ricorrere, per quell'introduzione, ad una definizione anzichè a un nuovo postulato (*). Una definizione molto opportuna la si ricava dalla considerazione delle *involuzioni ellittiche* (ora, naturalmente, si può fare una distinzione fra queste e le *iperboliche*); ma anche su ciò non occorre insistere, perchè i risultati già ottenuti a questo proposito (per lo spazio ordinario) da vari Autori — e essenzialmente dal Sig. V. Staudt (*Beiträge zur Geometrie der Lage*; Nürnberg, 1856-60) e dal Prof. C. Segre (*Le coppie di elementi imaginari nella geometria sintetica*; Mem. Acc. di Torino; serie 2ª; vol. XXXVIII)—si estendono subito al nostro caso generale.

18. Non sarà forse inutile riassumere infine i risultati principali ottenuti in questa Nota, sotto la forma seguente:

Definiamo come varietà lineare a r dimensioni (∞^r) *una varietà di enti qualunque, che diremo* punti, *per la quale siano soddisfatte le condizioni seguenti*:

1° *Entro di essa esistano delle varietà, che diremo* rette, *tali che per due punti qualunque ne passi sempre una ed una sola*;

2° *La varietà stessa possa considerarsi come luogo di tutti i punti di tutte le rette che congiungono* un *suo punto ai singoli punti di* una *varietà lineare a* r–1 *dimensioni* (**). Per *varietà lineare a una dimensione* intendiamo la *retta*;

3° *Ogni varietà lineare a due dimensioni contenuta nella primitiva* ∞^r *contenga a sua volta tutta la retta individuata da due suoi punti qualunque, e sia tale che in essa due rette abbiano sempre un punto a comune*;

4° *Ogni retta contenga più di due punti, e inoltre*:

a) *sopra* una *retta esista* una *serie armonica* (v. n° 10 e seg.) *non mai rientrante in sè stessa*; — oppure:

b) *per l'insieme dei punti della retta esistano degli ordinamenti soddisfacenti alle condizioni richieste nei postulati* Va *e* VIa; *e, di più sopra*, una *retta esista* un *gruppo armonico costituito da quattro elementi distinti*;

(*) Dei post. V*a* e VI*a* potremo poi restringere la validità all'insieme dei soli punti *reali* della retta.

(**) Questa si potrà poi definire in modo analogo mediante la varietà lineare ∞^{r-2}, ecc.

5° *Nella varietà stessa esistano, o si siano introdotti con una definizione opportuna*, i punti irrazionali; *quegli elementi ulteriori cioè, la cui considerazione, come abbiamo veduto, è necessario e sufficiente a stabilire una corrispondenza univoca fra i punti della varietà e l'insieme dei gruppi di* r *numeri reali*. Quest'ultima non è però una vera e propria *condizione*, potendo noi sempre renderla soddisfatta, quando siano taii le precedenti.

Per una varietà così fatta sussistono tutte le proprietà e valgono tutti i risultati ottenuti finora per *lo spazio* S_r.

Colognola ai Colli (Verona), agosto 1891.