
I Grandi Matematici Italiani online

GINO FANO

GINO FANO

Sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **29** (1894), p. 474–493

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1894_1>

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

*Sulle congruenze di rette del terzo ordine
prive di linea singolare;*

Nota di GINO FANO.

Le ricerche sulle congruenze (algebriche) di rette si sono limitate finora quasi esclusivamente a quelle di primo e di secondo ordine, le quali tuttavia furono studiate diffusamente nei vari lavori che dalla classica Memoria di KUMMER (1) al trattato recente del sig. STURM (2) concorsero ad arricchire la letteratura della *Geometria della retta*. Ben poco invece si è fatto sulle congruenze di ordine superiore a due, e in particolare già su quelle di terzo ordine (3), delle quali solo alcuni casi particolari sono stati considerati da ROCCELLA (4) e da HIRST (5), e altri da SEGRE (6) e CASTELNUOVO (7). In un lavoro uscito alcuni mesi or sono (8) io ho procurato di coordinare fra loro le ricerche di ROCCELLA e HIRST sui sistemi (3, 3); e, pur mettendomi da un punto di vista alquanto diverso (9), di assegnare

(1) *Ueber die algebraischen Strahlensysteme.....*; (" Abhand. der Berl. Akad. ", 1866).

(2) *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie.....*; (Leipzig, 1892-93).

(3) Eccettuate, naturalmente, le congruenze di prima o seconda classe, il cui studio coincide con quello delle congruenze (duali) di primo o secondo ordine, e fu anzi da taluni autori preferito a quest'ultimo.

(4) *Sugli enti geometrici dello spazio di rette.....*; (Piazza Armerina, 1882).

(5) " Proc. of the Lond. Math. Soc. ", vol. 16° e " Rend. di Palermo ", t. I, p. 64.

(6) " Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino ", (serie 2ª, vol. 39°).

(7) " Atti dell'Ist. ven. ", serie 6ª, t. 5° e 6°.

(8) " Ann. di Mat. ", serie 2ª, t. 21°. Mi si conceda di usare in seguito la lettera A. ogni qualvolta dovrò riferirmi a questo lavoro; e così pure mi servirò della lettera S. per indicare il 2° volume dell'op. cit. del sig. STURM.

(9) Facendo uso cioè *sistematicamente* della rappresentazione delle congruenze di rette con superficie contenute in una quadrica non degenerare dello spazio a cinque dimensioni.

in pari tempo i vari casi di queste ultime congruenze (supposte prive di linea singolare) potevano presentare. Nello stesso lavoro ho anche ritrovate, per altra via, le congruenze di terzo ordine già studiate dai sigg. SEGRE e CASTELNUOVO, e ne ho pure trovata qualcuna di nuova e particolarmente interessante (cfr. ad es. alcuni n.ⁱ degli ultimi due §§).

Fu appunto continuando le ricerche così iniziate che mi riuscì di giungere a risultati molto più generali sulle congruenze di 3° ordine (prive di linea singolare); risultati che, come si vedrà in seguito, permettono di assegnare i diversi casi possibili di queste stesse congruenze, e risolvono quindi in particolare il problema della *classe massima*, già stato risolto da KUMMER per le congruenze di 2° ordine.

In questa Nota si troveranno esposti brevemente i diversi risultati che ho ottenuti in proposito; un'esposizione completa e dettagliata di tutta la ricerca potrà formare oggetto (spero fra non molto) di un altro lavoro.

1. *Punti e coni singolari della congruenza.* — Di una data congruenza di rette di 3° ordine indicheremo sempre con n la classe e con p il *genere* (1). Questi due caratteri sono legati fra loro e al rango r (2) dalla relazione $r + p = 2(n - 1)$. La superficie focale della congruenza sarà allora di ordine $2p + 4$ e di classe $2(n + p - 1)$.

La congruenza $(3, n)$, essendo supposta (e sia detto una volta per sempre) priva di linea singolare, non può avere che un numero finito di *punti singolari*. Potrà avere dei *raggi doppi*

(1) Più precisamente: Il genere della rigata secondo cui la congruenza è incontrata da un complesso lineare qualunque; in particolare dunque, della rigata costituita dalle rette della congruenza che si appoggiano a una retta fissa data ad arbitrio nello spazio. Ci serviremo, per comodità, di questa denominazione (per quanto forse impropria), non essendovi pericolo di confonderla con altre; del genere della congruenza considerata come superficie (*Flächengeschlecht*) non avremo qui infatti ad occuparci. Ciò che vogliamo dunque chiamare *genere* sarebbe precisamente il genere delle sezioni piane della superficie di S_3 che è immagine della congruenza.

(2) Numero delle coppie di rette della congruenza che formano fascio con una retta qualunque dello spazio.

e dei raggi tripli — che noi supporremo però anche in numero finito — ma non dei raggi di molteplicità maggiore; quei raggi doppi o tripli non apparterranno in generale alla superficie focale (cfr. anche S., p. 52).

Da ogni punto singolare della congruenza escono infiniti raggi di questa formanti un *cono singolare* (o in particolare un fascio di rette); ciascuno di questi raggi ha in quel punto uno dei propri fuochi, e il punto stesso è anzi in generale un punto multiplo della superficie focale. Ma può anche darsi che da questo punto esca pure qualche raggio della congruenza non contenuto in quel cono; e a questo proposito si ha anzi il teorema (1):

Se da un punto singolare di una congruenza di 3° ordine escono γ raggi di questa non appartenenti al relativo cono singolare, il cono tangente in questo stesso punto alla superficie focale della congruenza sarà di classe $3 - \gamma$.

E poichè questa classe è un numero essenzialmente positivo, così sarà $3 - \gamma > 0$, ossia $\gamma \leq 2$. E anche il caso di $\gamma = 2$ si può facilmente escludere. Rimane quindi la doppia possibilità di $\gamma = 1$ e $\gamma = 0$:

Se da un punto singolare della congruenza esce UN raggio di questa non appartenente al relativo cono singolare, la superficie focale ammetterà in questo punto un cono tangente di 2ª classe — e quindi anche di 2° ordine —. Il punto singolare in discorso sarà dunque un punto doppio della superficie focale.

In un punto singolare dal quale non esca invece nessun raggio della congruenza non contenuto nel relativo cono singolare, la superficie focale ammetterà un cono tangente di terza classe, e perciò di quarto o di sesto ordine (il caso dell'ordine tre si può escludere). In ogni caso dunque:

La molteplicità che un punto singolare della congruenza ($3, n$) ha per la superficie focale di questa congruenza non può essere superiore a SEI.

2. — Un cono qualsiasi contenuto in una congruenza di rette (priva di linea singolare) è sempre riferibile univocamente a quell'altro cono, che tocca la superficie focale della congruenza

(1) Cfr. S., p. 11. Il teorema generale è applicato qui al caso di $m = 3$.

nel punto (singolare) che è vertice del primo (perchè i piani tangenti a questo secondo cono sono determinati piani focali dei raggi del primo). I due coni avranno dunque lo stesso genere, e perciò:

I coni di raggi contenuti in una congruenza di 3° ordine sono tutti razionali od ellittici. In quest'ultimo caso, e allora soltanto, il vertice del cono è punto sestuplo per la superficie focale. Se invece si tratta di un cono razionale, il suo vertice sarà al più quadruplo per questa superficie (e ne sarà soltanto punto doppio, se da esso esce ancora un altro raggio della congruenza non contenuto in quel cono; caso quest'ultimo che non potrà invece presentarsi se il cono è ellittico).

Un cono singolare di ordine h conterrà dunque, a seconda dei casi, $\frac{(h-1)(h-2)}{2}$ oppure $\frac{h(h-3)}{2}$ raggi doppi (contato eventualmente ogni raggio triplo come *tre* raggi doppi). Questi stessi raggi saranno rispett. doppi o tripli anche per la congruenza. Viceversa, ogni raggio doppio o triplo della congruenza uscente da un punto singolare è tale anche per il cono singolare uscente da questo punto.

Quindi: *Da un punto singolare [vertice di un cono] di ordine h di una congruenza $(3, n)$ escono $\frac{(h-1)(h-2)}{2}$ oppure $\frac{h(h-3)}{2}$ raggi doppi di questa (considerato ogni raggio triplo come equivalente a tre raggi doppi).*

3. Congruenze con raggi doppi o tripli. — Le rette di una congruenza $(3, n)$ che si appoggiano a una retta l data ad arbitrio nello spazio formano in generale una rigata di ordine $n+3$ della quale l è direttrice tripla (1). Se però questa retta appartiene essa stessa alla congruenza, da ogni suo punto non esciranno più che due (altre) generatrici di quella rigata; la rigata sarà quindi *iperellittica*. Che se poi l fosse retta doppia

(1) Questa rigata ha poi una curva doppia (l) di ordine $\frac{n(n-1)}{2} + r$, luogo dei punti da cui escono coppie di raggi della congruenza incidenti a l medesima. Se però la retta l contiene un punto singolare della congruenza, dalla stessa rigata si staccherà tutto il cono (di un certo ordine h) uscente da questo punto, e rimarrà solo più una rigata di ordine $n+3-h$ avente ancora l per direttrice (in generale tripla).

della congruenza, la stessa rigata diverrebbe razionale. Infine, se l è retta tripla della congruenza, è chiaro che ogni suo punto dal quale esca un altro raggio di questa dovrà essere un punto singolare, sicchè la rigata R^{n+3} di cui sopra dovrà spezzarsi in (almeno) due coni della congruenza.

Un raggio triplo di una congruenza $(3, n)$ deve contenere dunque almeno due punti singolari di questa. Ma è anche facile vedere che non può contenerne nemmeno di più. E siccome questi due punti — che saranno al più sestupli per la superficie focale — sono anche i soli punti comuni a quel raggio e a questa superficie, così dovrà essere $2p + 4 \leq 12$, ossia $p \leq 4$.

Il genere di una congruenza $(3, n)$ avente un raggio triplo non può dunque essere superiore a quattro (1).

Questa stessa proposizione si estende facilmente al caso in cui la congruenza, pur non contenendo raggi tripli, abbia però qualche raggio doppio. Non possiamo veramente asserire che anche un raggio doppio debba sempre contenere due punti singolari della congruenza; certo però che non può contenerne di più. Rimarrebbero quindi da considerare separatamente i casi di un raggio doppio non passante per alcun punto singolare, oppure passante per uno o per due di questi punti. (Questi casi sono tutti tre possibili, e in A. se ne possono già trovare degli esempi). L'esame successivo delle tre ipotesi conduce ai risultati seguenti :

1. *Una congruenza $(3, n)$ la quale contenga un raggio doppio non passante per alcuno dei suoi punti singolari non può essere di genere superiore a due;*

2. *Se una congruenza $(3, n)$ ha un raggio doppio passante per uno solo dei suoi punti singolari, essa è:*

di genere tre, se da questo punto singolare esce un cono ellittico di raggi di essa;

di genere due, se ne esce soltanto un cono razionale;

di genere uno, se ne esce un cono razionale di raggi, e un altro raggio ancora esterno a questo cono;

(1) E sarà anzi $= 4$ sempre e solo quando i due coni della congruenza che hanno il vertice su quel raggio triplo siano entrambi ellittici; sarà invece $= 3$ quando l'uno di essi sia ellittico e l'altro razionale, e sarà $= 2$ quando siano entrambi razionali.

3. *Se infine la congruenza contiene un raggio doppio passante per due suoi punti singolari, essa può anche essere di genere quattro, e lo è precisamente sempre e solo quando i coni di essa uscenti da questi due punti siano entrambi ellittici.* In caso contrario, il genere sarà ≤ 3 ; e si potrà anzi determinarlo esattamente per ciascuna delle diverse combinazioni che si possono presentare.

Concludiamo dunque: *Il genere di una congruenza $(3, n)$ avente qualche raggio multiplo (doppio o triplo) non può essere superiore a quattro.* La stessa proposizione sussiste anche (con due sole eccezioni) se la congruenza non ha raggi multipli; ma per giungervi anche in questo caso bisogna prender le mosse un po' più da lontano.

4. *Terne di raggi di una congruenza appartenenti ad uno stesso fascio.* — Data una congruenza di rette qualsiasi di ordine m e di classe n , noi possiamo domandarci se fra gli ∞^3 punti dello spazio ve ne siano di quelli per cui tre fra gli m raggi della congruenza che ne escono stanno in un medesimo piano, e, dualmente, se vi siano dei piani per cui tre degli n raggi ivi contenuti passino per uno stesso punto; in altri termini, possiamo richiedere se vi siano (all'infuori dei coni) delle terne di raggi della congruenza appartenenti a uno stesso fascio. La risposta è, in generale, affermativa (almeno se m e n non sono inferiori a 3); e si trova precisamente che quei punti e quei piani formano o rispett. involuppano una certa superficie. Di queste due superficie (che sono però in generale distinte) si trova fatto cenno per la prima volta nella *Inaugural-Dissertation* del sig. SCHUMACHER (München, 1885), e successivamente nella sua Memoria: “ *Classification der algebraischen Strahlensysteme* „ (Math. Ann. 37°), nella quale sono anche determinati l'ordine dell'una di esse e la classe dell'altra. E questi risultati conducono precisamente, per le congruenze di 3° ordine, ai due teoremi seguenti:

I punti dello spazio da cui escono tre raggi di una congruenza $(3, n)$ di genere p contenuti in un medesimo piano formano una superficie φ di ordine $n - p - 1$.

I piani per cui tre fra gli n raggi della congruenza in essi

contenuti passano per un medesimo punto formano un involuppo ψ di classe $\left\{ n - 2 \right\} \left\{ \frac{(n-1)(n+3)}{6} - p \right\}$ (1).

Occorre però aggiungere a questo secondo teorema che il vertice di un cono di ordine h contenuto nella congruenza si stacca (come involuppo di piani) dall'involuppo ψ colla molteplicità $\binom{h}{3}$.

Ma l'ordine $n - p - 1$ della superficie φ non può diventare negativo; dunque:

Il genere di una congruenza di 3° ordine è sempre inferiore alla classe ($p \leq n - 1$). Nel caso limite $p = n - 1$ non vi è alcun punto non singolare dal quale escano tre raggi della congruenza contenuti in uno stesso piano (2).

5. — Alla considerazione dell'ordine della superficie φ e della classe dell'involuppo ψ conviene ora aggiungere quella di un terzo carattere, forse ancora più importante: il numero dei punti P di un piano dai quali escono terne di raggi coplanari e tali che i piani π di queste stesse terne appartengano a una determinata stella. È, in altri termini, l'ordine della curva (contenuta in φ) luogo dei punti P da cui escono terne di raggi della congruenza contenute in piani di una data stella, o anche,

(1) Questi risultati, e anche quelli più generali relativi a una congruenza qualunque (m, n) , si possono ottenere per altra via come applicazione di noti teoremi di *Geometria sopra una curva algebrica*, e in particolare della formola generale data dal sig. SEGRE nella Nota: *Sulle varietà algebriche.....* ("Rend. Lincei", 1887). Ciò si vede immediatamente, quando solo si pensi alla rappresentazione delle congruenze di rette con superficie dello spazio S_3 .

(2) In quanto precede si è supposto implicitamente di aver a che fare con una congruenza $(3, n)$ tale che non per ogni punto dello spazio passino tre raggi di essa contenuti in un medesimo piano. Si può dimostrare infatti che l'ipotesi contraria sarebbe possibile soltanto per $n = 3$, nel qual caso si troverebbe la congruenza $(3, 3)$ intersezione di un complesso lineare con un complesso cubico. Questa congruenza è anche la sola, fra quelle $(3, n)$ prive di linea singolare, che sia contenuta in un complesso lineare di rette; e d'ora in poi la intenderemo esclusa dalle nostre considerazioni. — Le altre congruenze $(3, n)$ non potendo dar luogo, per quanto precede, a una superficie immagine F^{n+3} a sezioni speciali (se no si cadrebbe appunto nel caso dei tre raggi costantemente coplanari) rimane anche così dimostrata la relazione $(p \leq (n + 3) - 4, \text{ ossia } p \leq n - 1$.

se vogliamo, la classe della sviluppabile dei piani π caratterizzati dal contenere una terna di raggi incontrantisi in uno stesso punto di un dato piano (ossia di una data sezione piana di φ). Questo numero, che d'ora in poi indicheremo colla lettera t , fu anche considerato dal sig. SCHUMACHER, il quale lo ha determinato per qualche caso particolare e ne ha anzi fissato, in generale, un limite superiore (*Math. Ann.*, vol. 37°, p. 115) (1).

Nel caso di una congruenza di 3° ordine questo numero t è legato ai numeri d e d_1 dei raggi doppi e tripli della congruenza dalla relazione:

$$3t + d + 6d_1 = (n - p - 1)(2n - p + 1) \quad (2) \quad (3).$$

In particolare dunque per una congruenza priva di raggi multipli si avrà:

$$t = \frac{(n - p - 1)(2n - p + 1)}{3}$$

Questo valore di t , sostituito nell'espressione (data anche da SCHUMACHER) dell'ordine R della curva cuspidale della superficie focale di una congruenza (4), conduce alla formola:

(1) Questo limite, nel caso di una congruenza $(3, n)$, non è mai raggiunto; ma, come lo stesso sig. SCHUMACHER mi ha gentilmente comunicato, non è difficile abbassarlo alquanto.

(2) Questa relazione si può dimostrare facilmente in due modi diversi. Una prima dimostrazione la si ha considerando l'intersezione della superficie φ colla superficie luogo dei punti da cui escono coppie di raggi della congruenza contenute in piani passanti per un punto fisso P (superficie (P) di STURM, di ordine $r + 3 = 2n - p + 1$). E in secondo luogo si può anche osservare che la superficie focale di una congruenza di 3° ordine ha in generale bensì una curva cuspidale, ma non una curva doppia propriamente detta: e annullando l'ordine di questa curva doppia (che SCHUMACHER ha determinato per una congruenza qualunque) si ha un'equazione che, opportunamente trasformata, conduce precisamente a quella scritta di sopra.

(3) Nel valore di t che qui compare non sono più comprese le soluzioni, diremo così, *singolari*, che proverrebbero dall'esservi nella congruenza qualche raggio triplo.

(4) In generale, per una congruenza (m, n) di rango r , si ha

$$R = 3 \left[(m + n - 2) \left(\frac{mn}{2} - r \right) + t - 2n \right].$$

$$R = \frac{(n-2)(n-3)}{2} + (p+1)(p+2).$$

E più generalmente :

$$R = \frac{(n-2)(n-3)}{2} + (p+1)(p+2) - d - 3d_1 \quad (1).$$

La superficie focale (di ordine $2p+4$) di una congruenza di rette $(3, n)$ di genere p con d raggi doppi ha dunque una curva cuspidale di ordine

$$R = \frac{(n-2)(n-3)}{2} + (p+1)(p+2) - d,$$

intendendo ora computati in d i raggi tripli, ciascuno come equivalente a *tre* raggi doppi.

D'altra parte il rango della superficie focale (che non ha altra linea multipla, oltre la curva cuspidale) è dato da $(2p+4)(2p+3) - 3R$, e deve essere evidentemente > 0 ; questo conduce alla diseuguaglianza :

$$3d > 3 \frac{(n-2)(n-3)}{2} - (p+2)(p+3)$$

il cui 2° membro non è certo negativo se $p \leq n - 5$. Concludiamo dunque:

Una congruenza $(3, n)$ di genere $\leq n - 5$ ha certo qualche raggio doppio (o triplo). Le congruenze prive di raggi multipli non potranno essere perciò che dei generi $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$ o $n - 4$ (indicata sempre con n la classe).

6. — Per determinare più precisamente quali siano queste congruenze prive di raggi multipli, ci occorre premettere anzitutto qualcosa sul comportamento delle superficie φ e (P) (cfr.

(1) Rimane sottratto solo un termine $3d_1$ (anzichè $6d_1$) perchè, se la congruenza ha d_1 raggi tripli, il t della formula di SCHUMACHER va mutato in $t + d_1$.

la 2^a nota al n° prec.) nei punti singolari della congruenza. Si hanno a questo proposito i due teoremi seguenti:

La superficie φ ha la molteplicità $h - 3$ in ogni punto singolare che sia vertice di un cono ellittico di ordine h di rette della congruenza; vi ha invece la molteplicità $h - 2$ se questo cono è razionale, e $h - 1$ se, oltre al cono razionale, esce da quel punto singolare anche un altro raggio della congruenza (1).

La superficie (P) generica ha in quel punto e negli stessi tre casi rispettt. le molteplicità $2h - 3$, $2h - 2$, $2h - 1$ (2).

E a questo aggiungiamo (cfr. S., p. 10) che la curva (l) luogo dei punti da cui escono coppie di raggi della congruenza incidenti a una retta data l (curva che è di ordine $\frac{n(n-1)}{2} + r = \frac{(n-1)(n+4)}{2} - p$) ha in ogni punto singolare di ordine h la molteplicità $\frac{h(h-1)}{2}$.

Ora, dai punti singolari di una congruenza ($3, n$) priva di raggi multipli non possono escire che coni cubici o quadrici, oppure fasci di rette della congruenza, coll'avvertenza altresì che nel primo caso il cono (cubico) dovrà essere di genere uno, e che negli altri due casi dal punto singolare in questione potrà (e dovrà anzi nel terzo caso) escire anche un raggio della congruenza non contenuto in quel cono (quadrico) o fascio di rette. A ciascuno di questi casi si applicano immediatamente i tre ultimi teoremi. — Noi indicheremo precisamente:

con x_1 il numero dei punti singolari dai quali esce un fascio di rette della congruenza;

con x_2 il numero dei punti singolari dai quali esce un

(1) In particolare dunque la superficie φ non passerà affatto per quei punti che sono vertici di coni cubici di genere uno contenuti nella congruenza, — il che va pure d'accordo col fatto che di questi punti ve ne possono essere anche nel caso estremo $p = n - 1$, nel qual caso non esiste la superficie φ . La molteplicità $h - 2$ nei punti singolari da cui esce soltanto un cono razionale di rette della congruenza esclude poi indirettamente, per questo caso, la possibilità sia $h = 1$ (si tratti cioè di un fascio di rette).

(2) Questi risultati servono a completare quelli sulla molteplicità degli stessi punti singolari per la superficie focale della congruenza (i quali ultimi furono qui già esposti completamente ai n° 1 e 2).

cono quadrico di rette della congruenza e un altro raggio ancora di questa;

con x_3 il numero dei punti singolari dai quali esce un cono cubico di rette della congruenza.

L'esame delle intersezioni della superficie φ colla curva (l) generica conduce allora all'equazione:

$$(n-p-1) \left(\frac{n-1 \cdot n+4}{2} - p \right) - x_2 = 3 \left[(n-2) \left(\frac{n-1 \cdot n+3}{6} - p \right) - x_3 \right].$$

E in modo analogo, considerando le intersezioni della superficie φ con due superficie (P), si può giungere a quest'altra:

$$\frac{1}{9} (n-p-1) (2n-p+1)^2 - x_2 = (n-2) \left(\frac{n-1 \cdot n+3}{6} - p \right) - x_3.$$

Due equazioni lineari fra x_2 e x_3 , che danno immediatamente:

$$x_2 = \frac{n-p-1}{2} \left\{ \frac{(2n-p+1)^2}{3} - \frac{n-1 \cdot n+4}{2} + p \right\}$$

$$x_3 = \binom{n-1}{3} + \frac{n-p-1}{2} \left\{ \frac{(2n-p+1)^2}{9} - \frac{n(n-1)}{2} + p - 2 \right\}.$$

Queste formule sono così dimostrate soltanto nell'ipotesi $p < n - 1$, perchè nel caso $p = n - 1$ non esiste più la superficie φ ; esse valgono però anche in quest'ultimo caso, e allora si ha precisamente $x_2 = 0$; $x_3 = \binom{n-1}{3}$.

7. — Rimane a determinare x_1 . Per questo ricorriamo alla rigata costituita da quei raggi della congruenza, ciascuno dei quali conta come *tre* rispetto ad un suo punto (rigata *annessa* alla curva cuspidale della superficie focale). L'ordine di questa rigata fu determinato da SCHUMACHER per una congruenza (m, n) di rango r , e vale precisamente:

$$L = 4 (3mn - 2) \{ m + n \} - 3r.$$

Nel nostro caso dunque, fatto $m = 3$, $r = 2n - p - 2$:

$$L = 4 (n + 3p),$$

o più esattamente, togliendone i coni singolari che sono tutti qui ancora compresi:

$$L = 4(n + 3p) - \sum h \alpha_h$$

dove α_h indica il numero dei coni di ordine h contenuti nella congruenza, e la somma deve intendersi estesa a tutti questi coni, di qualunque ordine e genere siano.

D'altra parte le generatrici di questa rigata di ordine L sono anche, nel caso di una congruenza di 3° ordine, le sole rette di quest'ultima che incontrino la curva cuspidale γ della sua superficie focale (fuori almeno dei punti singolari); questa stessa rigata dovrà dunque coincidere (colle debite avvertenze relativamente ai coni singolari) con quella costituita dalle rette della congruenza $(3, n)$ che si appoggiano alla curva cuspidale anzidetta; rigata, quest'ultima, che è di ordine $R(n + 3)$, quando con R si indichi l'ordine di γ (1). Distinguendo pertanto i numeri α_h relativi alle tre specie di punti singolari con apici, p. es. cogli apici 2, 4, 6 indicanti le molteplicità di questi stessi punti per la superficie focale, si giunge all'equazione:

$$4(n + 3p) - \sum h \alpha_h = \frac{1}{3} \{ R(n + 3) - 3 \sum h \alpha_h^{(4)} - 9 \sum h \alpha_h^{(6)} \}$$

che si riduce a:

$$4(n + 3p) - \sum h \alpha_h^{(2)} = \frac{R(n + 3)}{3} - 2 \sum h \alpha_h^{(6)} \quad (2).$$

Applicando ora questa relazione al caso di una congruenza

(1) Più esattamente, questa seconda rigata (quando ne siano tolti i coni singolari che hanno il vertice su γ , e colle dovute molteplicità) si ridurrà alla prima (di ordine L) contata *tre* volte.

(2) Da quest'equazione spariscono dunque completamente quei coni razionali dai cui vertici non escono altri raggi della congruenza. E questo rende ragione, in certo qual modo, del fatto che gli stessi coni possono a volte comparire nelle congruenze di 3° ordine o scomparirne senza che si alteri nessuno dei caratteri di queste, nè il numero o la qualità dei rimanenti punti singolari (ved. alcuni es. in A, §§ 4-6, pel caso $p = 2$).

(3, n) priva di raggi multipli, e sostituendo in pari tempo a R il suo valore determinato al n° 5, avremo :

$$4(n+3p) - x_1 - 2x_2 = \frac{n+3}{3} \left\{ \frac{(n-2)(n-3)}{2} + (p+1)(p+2) \right\} - 6x_3.$$

E quest'equazione, essendo già noti x_2 e x_3 , permette di ricavare subito :

$$x_1 = 4(n+3p) + (n-1)(n-2)(p-2) + 2(n-p-1)(p-3) - \frac{n+3}{3} \left\{ \frac{(n-2)(n-3)}{2} + (p+1)(p+2) \right\}.$$

Se fra le congruenze di 3° ordine prive di raggi multipli ve n'è dunque qualcuna che sia anche priva di fasci di rette, la classe n e il genere p di questa congruenza dovranno annullare il secondo membro di quest'ultima equazione. E siccome per queste stesse congruenze deve anche essere $n-4 \leq p \leq n-1$, così potremo certo determinarne, con un numero finito di operazioni, tutti i casi possibili (1). E questi si trovano essere soltanto *due*, corrispondenti entrambi all'ipotesi $p = n-1$; l'uno si ha per $n=6$ (quindi $p=5$), l'altro per $n=7$ (e $p=6$).

Se esistono dunque congruenze di rette del 3° ordine prive ad un tempo di raggi multipli e di fasci di rette, esse saranno certamente di classe 6 o di classe 7. Di più, il genere di esse sarà 5 nel primo caso, 6 nel secondo.

Possiamo anche aggiungere: *Nel primo caso la congruenza conterrà 10 coni cubici (di genere uno); nel secondo caso ne conterrà 20.*

La prima di queste congruenze [(3, 6) di genere 5] esiste effettivamente, ed è rappresentabile sul piano; alle ∞^5 rigate secondo cui essa è incontrata dai vari complessi lineari di rette si possono far corrispondere nel piano curve di 7° ordine aventi 10 punti doppi a comune; ai dieci coni cubici corrispondono allora le curve di 3° ordine che contengono questi stessi punti a 9 per volta.

(1) Ci riduciamo infatti a determinare le soluzioni intere e positive di quattro equazioni di 3° grado in n (o in p).

Della congruenza (3, 7) con 20 coni cubici non mi è riuscito invece ancora di assodare in modo analogo l'esistenza (1).

8. — Esclusi pertanto questi due casi, tutte le altre congruenze di 3° ordine prive di raggi doppi o tripli conteranno almeno un fascio di rette. Il piano di questo fascio toccherà la superficie focale secondo una conica, luogo dei secondi fuochi dei raggi di esso fascio, e conterrà perciò ancora (cfr. S., p. 11) $n - 2$ rette della congruenza non appartenenti al fascio anzi-detto. Queste $n - 2$ rette (se $n > 4$) dovranno tagliarsi a due a due in punti tutti distinti; e di questi è facile riconoscere che almeno $p - 2$ sopra ogni retta (tutti dunque se $p = n - 1$) dovranno essere vertici di coni ellittici (di 3° ordine) contenuti nella congruenza. Ciò conduce alla disequaglianza $6(p-2) \leq 2p+4$, ossia $p \leq 4$. Possiamo dunque concludere:

Colle sole due eccezioni di cui alla fine del n° prec., ogni congruenza di 3° ordine priva di linea singolare, abbia o non abbia raggi doppi o tripli, deve essere di genere ≤ 4 .

E ora poche parole sulle diverse congruenze di 3° ordine e dei generi uno, due, tre, quattro (2).

9. *Congruenze (3, n) di genere uno.* — Secondo un teorema recentissimo dovuto al sig. CASTELNUOVO (3), ogni superficie non rigata a sezioni di genere uno è rappresentabile sul piano. Saranno dunque rappresentabili sul piano tutte le congruenze (m, n) — e in particolare quelle $(3, n)$ — se di genere uno e prive di linea singolare.

(1) Per la congruenza (3, 6) di genere 5 l'esistenza segue immediatamente dalla stessa rappresentazione piana, alla quale si può giungere proiettando la superficie immagine F^9 di S_3 (supposta esistente) da una sua trisecante (ossia da una retta contenuta nel piano di una delle sue dieci cubiche ellittiche), e considerando poi in particolare sulla superficie proiezione F^6 di S_3 un determinato sistema di curve (quello precisamente che su di essa segherebbero le superficie aggiunte di 3° ordine).

(2) Le congruenze di genere zero (cfr. anche A. n° 3) hanno tutte una linea singolare (meno la congruenza Cremoniana (3, 1), che corrisponde per dualità al sistema delle corde di una cubica sghemba).

(3) *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche* ("Rend. Lincei", gennaio 1894).

D'altra parte è anche noto (1) che una superficie razionale a sezioni ellittiche non può essere di ordine superiore a nove; dunque:

Le congruenze $(3, n)$ di genere uno prive di linea singolare sono tutte di classe ≤ 6 .

E di queste congruenze ne esistono effettivamente per ciascuna delle classi $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Per $n = 5$ ne esistono anzi due affatto distinte. Queste diverse congruenze furono studiate contemporaneamente dai sigg. SEGRE e CASTELNUOVO (2), i quali le ottennero come proiezioni di sistemi di rette contenuti in varietà cubiche (M_3^3) dello spazio S_4 con un numero finito e ≥ 6 di punti doppi (3).

10. Congruenze $(3, n)$ di genere due. — Il sig. ENRIQUES ha mostrato recentemente (4) che ogni superficie le cui sezioni sono curve iperellittiche di genere $p > 1$ — in particolare dunque ogni superficie a sezioni di genere due — è una rigata, oppure una superficie razionale contenente un fascio di coniche. E da questo teorema segue senz'altro che: *Ogni congruenza $(3, n)$ di genere due priva di linea singolare è rappresentabile sul piano.*

D'altra parte le ricerche del sig. CASTELNUOVO sulle superficie razionali a sezioni iperellittiche di genere $p > 1$ (5) hanno mostrato che l'ordine di queste superficie non può essere superiore a $4p + 4$, e quindi non superiore a 12 nel caso $p = 2$. Dunque:

Le congruenze $(3, n)$ di genere due prive di linea singolare sono tutte di classe ≤ 9 .

Infine, dalle note proprietà delle superficie razionali a sezioni di genere due e delle varietà ∞^1 di piani in cui dette superficie sono contenute, si può facilmente concludere che: *Ogni congruenza $(3, n)$ di genere due ha in generale $\binom{n-2}{2}$ raggi*

(1) Cfr. DEL PEZZO: *Sulle superficie dell'no ordine immerse nello spazio di n dimensioni* (" Rend. Circ. Mat. di Palermo ", t. I).

(2) " Mem. Acc. di Torino "; serie 2^a, vol. 39, e " Atti Ist. Ven. ", serie 6^a, t. 5^o e 6^o.

(3) Di queste congruenze si trova fatto cenno anche in A. nei diversi §§ 4-6.

(4) " Rend. R. Acc. Lincei ", 2^o semestre 1893.

(5) " Rend. Circ. mat. di Palermo ", t. IV e " Ann. di Mat. ", s. 2^a, t. 18^o.

doppi (1), e contiene $n - 3$ coni quadrici e $2(9 - n)$ fasci di raggi, dai cui vertici escono ancora rispett. altrettante rette della congruenza non contenute in questi coni o fasci (2).

Quando la superficie F^{n+3} immagine della congruenza ha una conica direttrice (e si può quindi rappresentare sul piano con un sistema di quadriche aventi un punto doppio a comune) può darsi che la quadrica (M_4^2) di S_5 assunta quale rappresentante del sistema delle rette dello spazio S_3 passi per il piano di questa conica. Questo piano appartiene allora (nella quadrica) al sistema di quelli che segano F^{n+3} in n punti, e gli $\binom{n-2}{2}$ punti doppi di F^{n+3} vengono pure a cadere in uno stesso piano.

Troviamo così una congruenza $(3, n)$ di genere due ($n \leq 9$) con $\binom{n-2}{2}$ raggi doppi passanti per uno stesso punto; punto che è vertice di un cono razionale di ordine $n - 1$ contenuto nella congruenza e avente quegli stessi raggi per generatrici doppie. Gli $n-3$ coni quadrici della congruenza hanno i vertici rispett. sopra altrettante generatrici di quel primo cono; e queste generatrici stanno anche tutte in un piano, che è sostegno di un involuppo quadrico di rette della congruenza (corrispondente a quella conica direttrice di F^{n+3}).

Di alcuni casi più semplici di queste congruenze ($n=3, 4, 5$) — o delle loro reciproche — si troverà anche fatto cenno in A. (3). Pei casi successivi ($6 \leq n \leq 9$) si possono avere congruenze duali di queste ultime (con involuppo piano dunque di classe $n-1$) applicando la costruzione generale di CAPORALI (4) al caso di un sistema lineare ∞^3 di cubiche piane aventi un punto doppio e 3, 2, 1 o 0 punti semplici a comune.

11. Congruenze $(3, n)$ di genere tre. — Per le superficie algebriche a sezioni di genere tre non si hanno ancora teoremi generali della natura di quelli di cui ci siamo valsei nei due casi

(1) Compresi i raggi tripli eventualmente esistenti, che dovranno contarsi ciascuno come tre fra gli $\binom{n-2}{2}$.

(2) Cfr. ad es. A. per i casi di $n=3, 4, 5$.

(3) Per quanto lì l'attenzione sia rivolta più specialmente alle congruenze Cremoniane (di 3^a classe).

(4) Cfr. la Mem. *Sopra alcuni sistemi di rette* ("Rend. Acc. di Napoli", novembre 1879, oppure: *Mem. di Geometria*, pp. 126-134).

precedenti, ma soltanto quei risultati che furono comunicati dal sig. CASTELNUOVO in una sua Nota inserita in questi *Atti* (vol. 25°).

Non è difficile però riconoscere che una congruenza $(3, n)$ di genere 3 non può essere priva di raggi multipli che nel solo caso $n = 4$. E questo caso (cfr. A., n° 16) conduce soltanto a una congruenza $(3, 4)$ con cono cubico di genere uno, e nove fasci di raggi aventi ciascuno un raggio a comune con questo cono.

Se invece v'è qualche raggio doppio o triplo, ciascuno di questi dovrà passare (cfr. n° 3) per il vertice di un cono ellittico della congruenza (potendo poi anche passare per il vertice di un cono razionale, oppure, se si tratta di un raggio doppio, non contenere nessun altro punto singolare). D'altra parte è anche facile vedere che la congruenza non può contenere due diversi coni ellittici; dunque:

Se una congruenza $(3, n)$ di genere tre ha dei raggi doppi o tripli, questi devono tutti passare per uno stesso punto, che è vertice del solo cono ellittico contenuto nella congruenza.

Indicato pertanto con h l'ordine di questo cono e con x_2 il numero di quei coni quadrici della congruenza dal cui vertice esce ancora un altro raggio di quest'ultima, si può giungere (considerando le intersezioni della superficie φ con una linea (l)) alla relazione

$$\binom{h}{2} = \binom{n-1}{2} + x_2$$

la quale, non potendo essere $h > n - 1$, dà immediatamente $h = n - 1$; $x_2 = 0$.

Ogni congruenza $(3, n)$ di genere tre priva di linea singolare contiene dunque un cono ellittico di ordine $n - 1$ (e in questo enunciato è anche compreso il caso precedente $n = 4$) (1). La presenza di questo cono basta per concludere che la congruenza è certo rappresentabile sul piano; alle rigate in cui essa è segata dai complessi lineari di rette si possono far corrispondere curve di 4° ordine con $13 - n$ punti semplici a comune (2).

(1) La superficie φ è data in questo caso (per $n > 4$) dal (solo) cono di ordine $n - 4$ (un piano dunque, se $n = 5$) aggiunto al cono di ordine $n - 1$ che è contenuto nella congruenza.

(2) È questa appunto la rappresentazione che per la congruenza duale

Questi punti sono immagini di altrettanti fasci di rette della congruenza.

E abbiamo pure: *Le congruenze* $(3, n)$ *di genere tre prive di linea singolare sono tutte di classe* ≤ 13 .

12. Congruenze $(3, n)$ *di genere quattro.* — In una congruenza $(3, n)$ di genere *quattro* ogni raggio doppio o triplo (se di questi raggi ve ne sono) deve contenere due punti singolari, vertici di coni ellittici di raggi della congruenza. Non vi possono essere dunque coni razionali di ordine superiore a due.

Il solito esame delle intersezioni di una linea (l) colla superficie φ (1) conduce in questo caso alla relazione

$$\Sigma \binom{h}{2} \alpha_h^{(6)} = x_2 + (n + 1)(n - 3)$$

dove x_2 ha il solito significato, e la somma indicata al primo membro va estesa a tutti i coni ellittici della congruenza (ritenutone l'ordine in generale $= h$).

Un'altra relazione che si può ottenere in questo caso è la seguente:

$$3x_1 = (9 - n)(R - 30)$$

dove x_1 e R hanno gli stessi significati che ai n.ⁱ prec. L'ipotesi $n > 9$ porterebbe dunque di conseguenza (poichè x_1 non può essere negativo) $R \leq 30$, e questo (almeno con una restrizione) si può facilmente escludere (2). Abbiamo perciò:

$(n, 3)$ si avrebbe immediatamente sul piano dell'involuppo di classe $n - 1$. E le congruenze $(n, 3)$ che si otterrebbero colla costruzione di CAPORALI partendo da un sistema lineare di cubiche piane di genere uno rientrano anche in questo caso (per $7 \leq n \leq 13$).

(1) Il caso di $n = 5$, nel quale questa superficie non esiste, fu già studiato completamente in A (cfr. n.ⁱ 24-26).

(2) Supposto infatti $R \leq 30$, ne seguirebbe che i coni ellittici della congruenza (i cui vertici sono punti *nonupli* per la curva cuspidale della superficie focale) non potrebbero essere in numero superiore a *sei* (almeno finchè vogliamo stare nell'ipotesi più generale che questa curva non debba *necessariamente* spezzarsi). Escluso perciò ogni cono di ordine ≥ 7 (perchè ne verrebbero di conseguenza già troppi), è chiaro che la somma $\Sigma \binom{h}{2} \alpha_h^{(6)}$ non potrà essere superiore a 90, sicchè (per la prima equazione) $n \leq 10$. E anche il caso di $n = 10$ si può tosto escludere.

Le congruenze (3, n) di genere quattro prive di linea singolare sono tutte di classe ≤ 9 .

L'esame dei diversi casi possibili per $n \leq 9$ è ancora piuttosto lungo, o almeno non mi è riuscito finora di semplificarlo. Convieni perciò distinguere i tre casi di congruenze prive di raggi multipli, congruenze con raggi doppi ma senza raggi tripli, e infine di congruenze con raggi tripli. — Le prime si riducono subito a due sole, e una di queste si può ancora escludere (attenendosi all'ipotesi più generale della curva cuspidale di ordine R irriduttibile). Rimane quindi soltanto la congruenza (3, 5) di cui in A., n° 26; essa contiene quattro coni cubici, ed è contenuta a sua volta in un complesso tetraedrale (il cui tetraedro fondamentale ha per vertici quelli precisamente dei quattro coni).

Per le congruenze con soli raggi doppi occorre richiamare la seconda equazione del n° 6, che qui riesce alquanto modificata per la presenza di nuovi termini corrispondenti ai diversi coni ellittici. Si possono così stabilire per le diverse classi altrettante equazioni diofantiche, dalle quali risulta che solo per $n = 6$ è possibile (ed esiste effettivamente) una congruenza priva di raggi tripli, ma con *tre* raggi doppi. Anche questa è contenuta in un complesso tetraedrale; dai quattro vertici del tetraedro fondamentale escono rispett. un cono cubico e tre coni quartici aventi quei tre raggi, a due a due, per generatrici doppie.

Esistono infine anche congruenze di genere *quattro* e di classe 7, 8 o 9, con raggi tripli; e precisamente per $n = 7$ con un raggio triplo e 4 raggi doppi, per $n = 8$ con 3 raggi tripli e 3 doppi, e per $n = 9$ con 6 raggi tripli. Ciascuna di queste congruenze è ancora contenuta in un complesso tetraedrale; e tutte cinque (anche le due precedenti) si possono generare con due involuipi (∞^2) di piani di terza classe fra loro proiettivi; la classe della congruenza sarà (in generale) $9 - k$, se k (≤ 4) coppie di piani corrispondenti sono venute rispett. a coincidere in altrettanti piani uniti dell'omografia. I raggi doppi e tripli — in quanto ve ne siano — sono sempre spigoli del tetraedro fondamentale del complesso in cui la congruenza è contenuta; dai vertici di questo tetraedro escono rispett. altrettanti coni ellittici di rette della congruenza (per $n = 9$ ad es. ne

escono quattro coni di 6° ordine, ciascuno con tre generatrici triple). Delle facce del tetraedro, sempre k (se $9 - k$ è la classe) contengono fasci di rette della congruenza; le altre $4 - k$ formano la superficie φ (il cui ordine vale qui precisamente $9 - k - 4 - 1 = 4 - k$).

Queste congruenze sono tutte rappresentabili sul piano (con sistemi di sestiche aventi 6 punti doppi e k punti semplici a comune) (1).

Come conclusione ultima, abbiamo dunque questo doppio risultato :

1° *Le congruenze di rette di 3° ordine prive di linea singolare sono tutte di classe ≤ 13 ; e, escluse quelle di genere tre, si può anche dire che la classe loro non può nemmeno essere superiore a 9;*

2° *Tutte queste congruenze (meno forse, se esiste, la (3, 7) di genere 6) sono rappresentabili sul piano.*

(1) Delle congruenze reciproche di queste ultime si troverà un cenno in una nota al n° 26 di A. Ivi è anche notata l'analogia che passa fra queste stesse congruenze e quelle di 2° ordine (o 2ª classe) pure contenute in un complesso tetraedrale. Si possono anzi costruire in modo analogo delle congruenze di un ordine qualunque m e di classe $3m - k$ ($0 \leq k \leq 4$) — o viceversa —

L'Accademico Segretario

GIUSEPPE BASSO.
