

---

I Grandi Matematici Italiani online

# GINO FANO

---

GINO FANO

## Sui postulati fondamentali della Geometria proiettiva

*Rendiconti Circ. Mat. Palermo*, Vol. **9** (1895), p. 79–82

<[http://www.bdim.eu/item?id=GM\\_Fano\\_1895\\_3](http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1895_3)>

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI  
<http://www.bdim.eu/>*

# SUI POSTULATI FONDAMENTALI

DELLA

## GEOMETRIA PROIETTIVA.

*Corrispondenza.*

---

Adunanza dell'11 novembre 1894.

---

### I.

(Lettera del Dr. **G. Fano** al Dr. **F. Enriques**).

.....

La sua pregevolissima Nota « *Sui fondamenti della Geometria Proiettiva* » (Rend. Ist. Lomb., s. II, vol. XXVII) mi suggerisce alcune osservazioni, anche in relazione al mio lavoro sullo stesso argomento escito due anni or sono (Giorn. di Battaglini, vol. XXX).

Dopo quei primi postulati sulle forme fondamentali di prima e seconda specie, postulati che si riducono in sostanza a *tre* distinti e necessari (\*), e che bastano a stabilire, com'Ella osserva, i teoremi sulle *configurazioni*, due vie mi si erano presentate per procedere innanzi, e costruire una Geometria che fosse applicabile allo

---

(\*) Vale a dire: *Due punti determinano UNA retta che li contiene; ogni piano contiene tutta la retta determinata da due suoi punti qualunque; due rette in un piano hanno sempre UN punto a comune.*

spazio quale i sensi ce lo presentano. La prima delle due (cfr. n° 4-13), essendo completamente nuova, fu da me più ampiamente sviluppata, mentre invece assai meno mi sono fermato sulla seconda (n° 14), che già prima era stata seguita dal sig. A modeo (Atti R. Accademia di Torino, vol. XXVI)—per quanto nella pregevole Nota di lui qualche punto restasse ancora da completare—. A questa seconda via Lei pure si è attenuto (\*). Infatti i suoi post. V e VI (tolte le due ultime condizioni del V) corrispondono *press'a poco* ai miei Va e VIa del n° 14. Ciò che io ho chiamato *ordine* non è precisamente ciò che Lei ora indica con questo stesso nome, ma qualcosa che si avvicinerrebbe piuttosto alle Sue *disposizioni circolari*, o meglio al Suo *senso di disposizione circolare*, e perciò appunto nel *carattere proiettivo degli ordini naturali* potevano essere per me ed erano infatti ritenute implicite quelle *permutazioni circolari*, sulle quali Lei è stato così dettagliatamente preciso (\*\*).

A Lei è però riescito più avanti di sopprimere il mio postulato VIIa: « *Esiste un gruppo armonico formato da quattro elementi distinti* ». E la ragione di questo mi sembra stare nell'aver Lei ammesso fin da principio col post. IV (e anche implicitamente, come Lei pure osserva, nelle due ultime condizioni del post. V) *che i punti della retta siano in numero infinito*. In ogni modo però vedo ora con piacere risolta la questione, che era per me allora rimasta insoluta (l. c. pag. 22), se cioè, aggiungendo alle condizioni precedenti questa degli infiniti punti sulla retta, si potesse sopprimere quel mio ultimo postulato. E vedo dunque che (in questo caso) si può effettivamente sopprimerlo.

Ma v'ha di più. Non è nemmeno necessario di ammettere che i punti della retta siano in numero infinito; basta ammettere che

(\*) È infatti la più semplice e la più naturale, per quanto la prima, quella delle *serie armoniche rientranti*, possa forse riescire più interessante. Ma di queste *serie armoniche* non si potrebbe certo parlare p. es. in un corso elementare!

(\*\*) L'*ordine* era per me una specie di *anello* o *catena rientrante*, secondo la quale immaginavo disposti i punti di una retta, senza tuttavia accennare ad un particolare *primo elemento*. E il restare inalterato di un ordine così concepito, senza, ben inteso, che ogni punto rimanga fisso, conduce di necessità alle *permutazioni circolari*.

siano in numero superiore a *tre*. Lei vedrà infatti senza difficoltà che sopra una retta contenente un numero di punti finito ma non inferiore a *quattro* il Suo post. VI non potrebbe in alcun modo sussistere. Come mai si potrebbero allora portare due o, peggio ancora, tre punti dati in altri assegnati ad arbitrio, e ciò con una semplice *permutazione circolare*, più, forse, un'inversione? (\*)—Nel solo caso di *tre* punti, le permutazioni cicliche colle loro inverse — *sei* in tutto — soddisfanno precisamente alle condizioni richieste da quel postulato.

AmMESSO pertanto il Suo post. VI, e, per di più, l'esistenza di almeno quattro punti sulla retta, rimane come solo caso possibile quello degli infiniti punti, e si può applicare di nuovo tutto il Suo ragionamento. Certo che, volendo togliere *ab initio* l'ipotesi degli infiniti punti sulla retta, bisogna anche togliere le condizioni  $4^a$  e  $5^a$  del Suo post. V, nelle quali detta ipotesi è implicitamente contenuta. Ma di queste due condizioni (\*\*) si fa uso in un solo punto del Suo lavoro, nel quale anche (come Lei stesso ebbe a intravedere) un'osservazione semplicissima basta per farne a meno (\*\*).

(\*) Le Sue *permutazioni circolari* si riducono in questo caso a quelle stesse permutazioni di un numero finito di elementi—qui *punti*—che di solito si indicano con questo nome. Le mie configurazioni—e prima fra queste il *piano di 13 punti*, di cui al n° 8—danno facili esempi di proiettività che non conserverebbero gli ordini naturali secondo la data definizione.

(\*\*) E più specialmente della  $4^a$ ; la  $5^a$  è quasi un complemento della  $4^a$ , ma complemento necessario per poter poi concludere che quest'ultima rimane verificata per tutti i diversi ordini *derivati* (con permutazioni circolari e inversioni).

(\*\*\*) Alludo alla dimostrazione del teorema, che due coppie armoniche devono sempre separarsi, e tanto meno quindi l'una di esse può esser costituita da elementi coincidenti, a meno che questi non coincidano tutti due in uno dei limiti comuni.—Basta infatti dimostrare che questa proprietà sussiste per un gruppo armonico, perchè da quest'unico caso essa seguirà per ogni altro. E appunto per questo è anche permesso di scegliere i punti *A, B, C* (cfr. p. 11 della Sua Nota) in modo particolare; e conviene precisamente scegliere *A* e *B* in modo che siano separati da *C* e da un quarto punto della retta *u*, supposto esistente. Questo quarto punto si proietterà allora da *F'* sulla retta *a* in un punto che potremo assumere come *H*. E accertata così l'esistenza di questo punto *H* che con *F* separa la coppia *AE*, si può ripetere parola per parola tutto il Suo ragionamento, basato esclusivamente sopra successive proiezioni.

Mentre dunque il Suo lavoro completa effettivamente il mio (in certi punti), non sarà forse male l'osservare ancora che i postulati in esso veramente necessari si possono ridurre ai primi tre, alle prime tre condizioni del V, e al VI; più la condizione che la retta contenga almeno quattro punti. — D'altra parte anche i primi tre postulati del mio lavoro coincidono completamente con quelli del Suo; il IV dice che su ogni retta stanno più di due punti; il Va e il VIa corrispondono ai Suoi V e VI (nei quali tuttavia gli stessi concetti sono forse meglio precisati), e infine il VIIa dice che « *Esiste un gruppo armonico formato da quattro elementi distinti* ». Quest'ultimo postulato porta con sè, naturalmente, l'esistenza di un quarto punto sulla retta, ma dice anche di più; questo *di più* è ora provato essere già una conseguenza delle cose precedenti.... (\*) (\*\*)

Cognola ai Colli (Verona), settembre 1894.

G. FANO.