GINO FANO

I gruppi di Jonquières generalizzati

Memorie R. Acc. Sci. Torino, Serie 2, Vol. **48** (1898), p. 221–278

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1898_1>

I

GRUPPI DI JONQUIÈRES GENERALIZZATI

MEMORIA

DI

GINO FANO

Approvata nell' Adunanza del 15 Maggio 1898.

1. — La classificazione dei *gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio* è stata iniziata dal Sig. ENRIQUES e da me in una nostra comune Memoria (1), nella quale abbiamo dimostrato che questi gruppi possono tutti ridursi birazionalmente a gruppi di una delle categorie seguenti:

a) gruppi proiettivi;

b) gruppi di trasformazioni conformi (ossia che mutano le sfere in sfere);

c) gruppi che abbiamo chiamati " *di Jonquières generalizzati* ", ossia che trasformano in sè stesso un fascio di piani, ovvero una stella di rette;

d) due gruppi ∞^3 semplici, transitivi, ben determinati, di trasformazioni del 3° o rispett. del 7° ordine.

In particolare, i gruppi *primitivi* si riducono tutti a gruppi delle categorie *a)* e *b)*; e quelli *imprimitivi* a gruppi della categoria *c)*, fatta solo eccezione per i gruppi ∞^3, semplici, transitivi, nei quali le operazioni che lasciano fisso un punto generico dello spazio formano un gruppo finito oloedricamente isomorfo a uno dei tre gruppi dei poliedri regolari (tetraedro, ottaedro, icosaedro): questi gruppi si riducono rispett. a tre tipi ben determinati, vale a dire un gruppo conforme ∞^3 (caso *b*)), e i due gruppi del caso *d*).

Per completare la classificazione dei gruppi cremoniani continui dello spazio — ossia la determinazione di tutti i tipi birazionalmente distinti a cui tali gruppi possono ricondursi — rimarrebbero da assegnare i vari gruppi tipici appartenenti a ciascuna

(1) " Annali di Matem. ", Ser. 2a, t. 26. Per brevità indicherò d'ora in poi questa Memoria colle lettere EF.

delle categorie *a*), *b*), *c*). Per le prime due categorie, la questione è relativamente semplice, trattandosi soltanto di trovare tutti i sottogruppi contenuti in un gruppo ben determinato, rispett. ∞^{15} o ∞^{10}, del quale è nota in ambo i casi la composizione. Si aggiunga che, fra i vari gruppi (tipici) proiettivi e conformi, noi possiamo limitarci a considerare quelli *primitivi*, potendosi gli altri (imprimitivi) far rientrare nella categoria *c*) — ad eccezione del gruppo conforme ∞^3 del tipo tetraedrico —. E questi gruppi primitivi, sia proiettivi che conformi, furono testè assegnati nella mia Nota: " *I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio* " (1), indipendentemente anche dal risultato che, insieme al Sig. Enriques, avevo già ottenuto.

Rimangono perciò a determinarsi soltanto *i tipi birazionalmente distinti di gruppi di Jonquières generalizzati*. La determinazione di essi (o almeno dei gruppi tipici " completi ", nei quali tutti gli altri risultano contenuti come sottogruppi) è appunto oggetto della presente Memoria.

Noi dimostreremo precisamente che *Ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane dello spazio il quale muti in sè stesso un fascio di piani si può ridurre birazionalmente a uno dei gruppi tipici seguenti (o a un loro sottogruppo)* (2):

1°, 2°, 3° *Gruppi che trasformano in sè un fascio di piani e una stella di rette, i cui sostegni (asse e centro) non si appartengono, e che possono perciò generarsi componendo un gruppo di trasformazioni proiettive di quel fascio con un gruppo cremoniano di questa stella* (considerata come forma fondamentale di 2ª specie). Si hanno *tre* diversi gruppi tipici completi (rispett. ∞^{11}, ∞^9, ∞^{n+7}, dove n è numero intero qualsiasi, e composti di trasformazioni rispett. quadratiche, cubiche, e di ordine n), secondo che il gruppo cremoniano subordinato nella stella invariante è equivalente a un gruppo di trasformazioni proiettive, di trasformazioni quadratiche, o di trasformazioni di Jonquières di ordine $n-1$;

4°, 5°, 6° *Gruppi di trasformazioni di un certo ordine n che mutano in sè stesso un sistema lineare di superficie* (*monoidi*) *di ordine n, aventi a comune un punto* ($n-1$)$^{\text{plo}}$ *col relativo cono tangente* (*di ordine $n-1$*) *e, eventualmente, altri elementi ancora.* Questi gruppi sono *equivalenti a gruppi proiettivi sopra coni a tre dimensioni di prima specie;* proprietà che ne rende facile la costruzione. Essi trasformano in sè in ogni caso la stella delle rette uscenti dal punto base ($n-1$)$^{\text{plo}}$ del sistema lineare invariante; e possono trasformare in sè uno più fasci di piani appartenenti a questa stella, ovvero anche un fascio di superficie che non vi appartiene (ma che è trasformabile birazionalmente in un fascio di piani; cfr. n° 14). Anche in questo caso si hanno *tre* diversi tipi di gruppi completi, corrispondentemente ai diversi gruppi che possono venir subordinati nella stella di rette invariante;

7° *Gruppo ∞^{2n+9} delle trasformazioni di ordine n che mutano in sè stesso il sistema lineare ∞^{n+2} dei coni di ordine n aventi una data generatrice* ($n-1$)$^{\text{pla}}$ — *asse di un fascio di piani invariante* — *e gli stessi $n-1$ piani tangenti lungo questa generatrice* (potendo il vertice variare comunque sulla detta generatrice). *Questo gruppo è*

(1) " Atti della R. Acc. di Torino ", vol. XXXIII; 1898.

(2) E poichè, come vedremo al n. 9, ogni gruppo integrabile è riducibile a uno dei tipi 4°, 5°, 6°, così per tutti gli altri gruppi tipici potremo limitarci alla considerazione dei sottogruppi non integrabili.

equivalente al gruppo di tutte le trasformazioni proiettive sopra un cono razionale normale di 2ª specie di ordine n;

8° *Gruppo* ∞^7 *delle trasformazioni di un certo ordine* $m+n-1$ *che mutano in sè il sistema lineare* ∞^{m+n+1} *delle superficie di ordine* $m+n-1$ *aventi due date rette sghembe* — assi entrambe di fasci di piani invarianti — *come multiple di ordini rispett.* $m-1$ *e* $n-1$, *e gli stessi* $m-1$ *e rispett.* $n-1$ *piani tangenti lungo queste rette.* Per queste stesse trasformazioni risulta invariante la congruenza lineare di rette avente le due rette nominate per direttrici. *Questo gruppo è equivalente al gruppo di tutte le trasformazioni proiettive sulla varietà luogo delle rette che si appoggiano a due curve razionali normali di ordini m, n, contenute in spazi indipendenti;*

9° *Gruppo di dimensioni* $p\binom{n+1}{2}-n+p+5$ *delle trasformazioni di ordine np che mutano in sè un sistema lineare di superficie di ordine np con un dato punto* $(np-1)^{\text{plo}}$, *una retta* $(np-n)^{\text{pla}}$ *passante per questo punto, e* $p-1$ *rette* n^{ple} *infinitamente vicine alla precedente;* sistema che verrà definito completamente al n° 26. Rispetto a questo gruppo sono invarianti la stella di rette avente il centro nel punto $(np-1)^{\text{plo}}$, e il fascio di piani avente per asse la retta $(np-n)^{\text{pla}}$ del sistema lineare nominato; in quella stella viene subordinato un gruppo di Jonquières di ordine p, in ciascun piano di questo fascio un gruppo di Jonquières di ordine n;

10° *Gruppo* ∞^3, *semplice, intransitivo, delle trasformazioni di ordine n che lasciano fisso ogni piano di un dato fascio, e mutano pure in sè stesso il sistema lineare* ∞^{n+2} *delle superficie di ordine n aventi la retta asse di quel fascio come multipla di ordine* $n-2$, *gli stessi* $n-2$ *piani tangenti fissi lungo questa retta, e passanti ancora per una data curva piana di ordine n.* Sopra ogni piano del fascio invariante questo sistema lineare sega il sistema (che sarà pure invariante) delle coniche passanti per due punti fissi.

Fra questi gruppi, soltanto il 7° e il 10° non trasformano in sè nessuna stella di rette (o una congruenza equivalente). Gli altri compariranno perciò tutti di nuovo nell'enumerazione dei gruppi tipici con una stella di rette invariante. Ecco pertanto il risultato relativo a questi ultimi gruppi (il quale, insieme al precedente, completa la classificazione dei gruppi di Jonquières generalizzati):

Ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane dello spazio il quale muti in sè stessa una stella di rette può ridursi birazionalmente a uno dei gruppi tipici testè enumerati — esclusi soltanto il 7° e il 10° — e loro sottogruppi, oppure a uno dei gruppi seguenti (senza che per questi occorra tener conto anche dei sottogruppi):

11° *Gruppo* ∞^8 *delle trasformazioni cubiche che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^7 (*di grado 6*) *delle superficie di 3° ordine aventi un dato punto doppio* — centro di una stella di rette invariante — *e passanti ancora per una cubica sghemba che contiene questo punto.* Questo gruppo subordina nella stella invariante il gruppo proiettivo totale ∞^8 di questa stessa forma;

12° *Gruppi tipici* ∞^3, *semplici, transitivi, corrispondenti al caso diedrico di un ordine qualsiasi* $2n$ (tali cioè che le operazioni che lasciano fisso un punto generico dello spazio formino un gruppo finito diedrico di ordine $2n$ — essendo $n \geq 2$ —; cfr. EF, § 23). *Questi gruppi tipici sono:*

per $n=2$, *il sottogruppo* ∞^3 *del precedente gruppo* ∞^8 *ottenuto coll'imporre come fisso un cono quadrico di rette della stella invariante;*

per $n \geq 3$, *il gruppo* ∞^3 *delle trasformazioni di ordine* $2n-5$ *che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^n *delle superficie di ordine* $2n-5$ *aventi una data cubica sghemba come curva* $(n-3)^{\text{pla}}$, *passanti per le* $\binom{n-3}{2}$ *corde di questa cubica che congiungono* $n-3$ *punti di essa a due a due, e tangenti in ogni punto della cubica stessa agli* $n-3$ *piani che dalla retta ivi tangente alla cubica proiettano i detti* $n-3$ *punti di questa curva.*

La stella di rette invariante è qui sostituita dalla congruenza delle corde della cubica. Per $n=3$ si ha il gruppo proiettivo ∞^3 che trasforma questa cubica in sè stessa; per $n>3$ si ha un gruppo equivalente al gruppo di tutte le trasformazioni proiettive sulla varietà delle corde di una C^n razionale normale (EF, § cit.).

Ciascuno di questi gruppi tipici risulterà definito — come appare già da questi enunciati — mediante un sistema lineare di superficie invariante rispetto ad esso; e sarà perciò equivalente (come in qualche caso si è pure accennato) a un gruppo proiettivo sulla varietà a tre dimensioni rappresentata dal detto sistema lineare (supposto semplice). Di ciascun gruppo assegneremo altresì una legge di generazione — ossia il modo di costruirne l'operazione più generale —; e ne daremo pure le equazioni (finite) (1).

Riunendo pertando i risultati ottenuti in EF e in questa mia Memoria, diremo: *Ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane dello spazio (dipendente da un numero finito di parametri) può ridursi con un'ulteriore trasformazione cremoniana a un gruppo proiettivo, a un gruppo di trasformazioni conformi, a uno dei dodici gruppi qui enumerati e loro sottogruppi, ovvero ai gruppi tipici* ∞^3 *del caso ottaedrico e icosaedrico che sono assegnati in* EF, §§ 26-27.

In tutto sono dunque *sedici* gruppi tipici completi (mentre nel piano se ne hanno soltanto tre); oltre al gruppo proiettivo, abbiamo *due* gruppi di trasformazioni quadratiche (il gruppo conforme, e il 1° della nostra enumerazione), *tre* gruppi di trasformazioni cubiche (2°, 11°, e gruppo ∞^3 ottaedrico), *uno* di trasformazioni del 7° ordine (gruppo ∞^3 icosaedrico), mentre per gli altri *nove* è determinato il tipo, ma l'ordine può assumere qualsiasi valore (e può anzi dipendere da due, o anche da tre numeri interi positivi arbitrari).

Infine, per quanto si riferisce alla *irriducibilità* di questi varî gruppi tipici (completi), possiamo osservare anzitutto che i gruppi 1°, 2° e 3° sono i soli che contengano un sottogruppo invariante doppiamente intransitivo il quale operi in modo ∞^3 sulle singole traiettorie (fisse): essi si distinguono poi fra loro per i gruppi rispett. subordinati nelle congruenze (invarianti) formate da queste traiettorie. Altrettanto dicasi dei gruppi 4°, 5° e 6°, colla sola differenza che i loro (analoghi) sottogruppi invarianti operano in modo ∞^2 sulle proprie traiettorie (senza che questi nuovi gruppi siano o possano ridursi a sottogruppi dei precedenti). Infine, fra i gruppi tipici che rimangono (e che neppure sono o possono ridursi a sottogruppi di quelli già considerati), i gruppi corrispondenti ai casi 11° e 12° (dei cui sottogruppi non occorre

---

(1) In una prossima Nota mi propongo di mettere in relazione queste mie ricerche con quelle del sig. Lie sulla classificazione dei gruppi continui di trasformazioni puntuali dello spazio (*Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, cap. 8, p. 141 e seg.); e darò pure i simboli delle trasformazioni infinitesime mediante le quali i gruppi tipici qui enumerati possono generarsi.

tener conto) sono i soli che non trasformino in sè nessun fascio di superficie; il 7°, 9° e 10° ammettono un solo fascio invariante di superficie, e si distinguono fra loro per i gruppi rispett. subordinati sopra queste superficie; e l'8° trasforma in sè due diversi fasci di superficie, senza poter essere sottogruppo di nessuno dei tre ultimi — e non potrebbe esserlo tutt'al più che del 9° — perchè non sono contenuti l'uno nell'altro i gruppi da essi subordinati sulle dette superficie.

2. — Anche in questa Memoria (come pure in EF, e nella mia Nota cit. sui gruppi primitivi) ci varremo continuamente della possibilità di ridurre birazionalmente ogni gruppo cremoniano continuo dello spazio S_3 a un gruppo proiettivo sopra una varietà M_3 di un certo spazio S_r — ossia di costruire, per ogni gruppo cremoniano proposto, una varietà M_3 la quale possa rappresentarsi sopra S_3 in modo che a questo gruppo corrisponda su di essa un gruppo proiettivo — (cfr. EF, § 2).

Accenniamo ora brevemente la via che ci proponiamo di seguire nella determinazione dei vari gruppi tipici testè enumerati.

Nel cap. I ci occuperemo di quei gruppi che trasformano in sè, in pari tempo, un fascio di piani e una stella di rette i cui sostegni (asse e centro) *non* si appartengono (di modo che ogni punto dello spazio potrà individuarsi come intersezione di un piano e di un raggio appartenenti rispett. a queste due forme). Troveremo così *tre* gruppi tipici completi, che incontreremo anche più volte in seguito, ma che è bene studiare fin d'ora a parte, per metterne in evidenza l'accennato carattere comune. Daremo anche alcuni criteri che si dimostreranno sufficienti per affermare che un dato gruppo può ridursi a uno di questi tipi.

Nel cap. II ci occuperemo di un altro caso, che è anche bene studiare da principio, per poterne poi prescindere ogni qual volta questo ci riescirà opportuno: il caso dei *gruppi integrabili.* Noi dimostreremo che ogni gruppo continuo integrabile di trasformazioni cremoniane dello spazio è equivalente a un gruppo proiettivo sopra un cono (razionale, a tre dimensioni) di prima specie (¹): e vedremo anzi subito come si possano costruire tutti i gruppi, anche non integrabili, equivalenti a gruppi proiettivi siffatti.

Dopo di ciò passeremo a classificare ordinatamente *tutti i gruppi cremoniani continui che trasformano in sè un fascio di piani.* Partendo dalla considerazione del gruppo subordinato in un piano generico di questo fascio, vedremo (cap. III) che questi gruppi cremoniani sono birazionalmente equivalenti a gruppi proiettivi sopra varietà (razionali) M_3 di opportuni spazi S_r, le quali (corrispondentemente al fascio di piani invariante in S_3) contengono una serie razionale ∞^1 di piani, di quadriche (a due dimensioni), o di coni. Dovremo perciò esaminare separatamente questi tre casi, dei quali i primi due (cap. IV e V) si esauriranno facilmente; mentre invece il terzo (cap. VI: varietà luoghi di ∞^1 coni) richiederà considerazioni più lunghe, se non più complicate.

Ci resteranno infine da studiare quei gruppi pei quali è invariante (soltanto) una stella di rette, potendosi ora supporre che non sia contemporaneamente invariante

(¹) O considerabile come tale: ossia eventualmente anche di seconda specie, purchè il gruppo, di cui si tratta, lasci fisso almeno un punto della retta asse.

nessun fascio di piani appartenente questa stella. Dalla nota classificazione dei gruppi cremoniani continui del piano (1) (ossia di una forma di 2ª specie) segue pertanto che *il gruppo (cremoniano) subordinato in questa stella invariante potrà supporsi proiettivo.* E anzi, fra i gruppi proiettivi di questa stella, potremo limitarci a considerare i seguenti (che soli non lasciano fisso alcun fascio di piani) (2):

1° *I gruppi primitivi* (ossia il gruppo totale ∞^8, e i gruppi ∞^6 e ∞^5 con *un* piano fisso);

2° *Il gruppo* ∞^3 *con un cono quadrico fisso.*

Basterà dunque che ci occupiamo di quei gruppi cremoniani di S_3 che, nella stella di rette invariante, subordinano un gruppo proiettivo primitivo (cap. VII), oppure il gruppo proiettivo ∞^3 con un cono quadrico fisso (cap. VIII).

CAPITOLO I.

Gruppi che trasformano in sè una stella di rette e un fascio di piani non appartenente a questa stella.

3. — Ogni trasformazione cremoniana dello spazio la quale muti in sè stesso un fascio di piani di asse a e una stella di rette il cui centro P non stia su a, è completamente individuata dalla trasformazione proiettiva ch' essa subordina nel fascio a e dalla trasformazione cremoniana subordinata nella stella P (e risulta precisamente da una *composizione* di queste due). Segue da ciò che anche ogni *gruppo* di trasformazioni cremoniane rispetto al quale siano invarianti il fascio di piani a e la stella di rette P potrà ottenersi per composizione di un gruppo proiettivo di quel fascio e di un gruppo cremoniano di questa stella: l'uno e l'altro di questi gruppi potendo venir assegnato completamente ad arbitrio.

La nota classificazione dei gruppi cremoniani del piano (ossia di una forma di 2ª specie) ci conduce pertanto a distinguere in questo caso *tre* diversi gruppi tipici (coi relativi sottogruppi), secondo che il gruppo subordinato nella stella P può ridursi birazionalmente — e noi lo supporremo già ridotto — a un gruppo proiettivo, a un gruppo di trasformazioni quadratiche (con due fasci di piani invarianti), oppure a un gruppo di Jonquières di un dato ordine (con *un* fascio di piani invariante).

4. — Se nella stella P viene subordinato un gruppo proiettivo (al più ∞^8), avremo nello spazio un gruppo cremoniano di dimensione ≤ 11, rispetto al quale saranno invarianti il fascio di piani a, e anche la *stella di piani* P: quindi il sistema lineare (completo) somma di questi due, ossia il sistema lineare ∞^5 delle quadriche passanti per la retta a e per il punto P.

---

(1) Enriques, " Rend. Acc. dei Lincei ", maggio 1893. Dei gruppi tipici — proiettivi, conformi e di Jonquières — i primi sono i soli che possano non trasformare in sè alcun fascio di rette.

(2) Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, p. 94: Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen*, p. 276.

Abbiamo dunque, come primo tipo di gruppo completo, *il gruppo* ∞^{11} *delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^5 *delle quadriche passanti per una retta fissa e per un punto fisso non appartenente a questa retta* (1). Un'operazione generica di questo gruppo fa corrispondere ai piani dello spazio le quadriche del nominato sistema ∞^5 che hanno a comune anche una seconda retta incidente alla prima (2). — L'intero gruppo ∞^{11} è equivalente al gruppo di tutte le trasformazioni proiettive della varietà M_3^3 di S_5 (contenente una serie ∞^1 razionale normale di piani, e ∞^2 direttrici rettilinee) rappresentata da quello stesso del sistema ∞^5 di quadriche.

Assunti, in coordinate cartesiane non omogenee, il punto P e la retta a rispett. come punto all'infinito dell'asse z e come retta all'infinito del piano xy, il gruppo totale ∞^{11} sarà rappresentato dalle equazioni:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a_2 x + b_2 y + c_2}\,; \qquad y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\,; \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

colle condizioni $[ab_1 c_2] = 1$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. E sarà allora invariante il sistema lineare ∞^5 di paraboloidi iperbolici:

$$z(ax + by) + cx + dy + ez + f = 0.$$

5. — Supponiamo ora che nella stella P venga subordinato un gruppo (al più ∞^6) di trasformazioni quadratiche, con due fasci di piani invarianti. Sostituendo alla considerazione della stella di rette P quella di questi due fasci, potremo dire che il nostro gruppo cremoniano di S_3 è completamente definito dal trasformare in sè ciascuno di *tre* fasci di piani, cogli assi comunque disposti, perchè non passanti tutti per uno stesso punto; e in particolare anche disposti secondo i lati di un triangolo. Questo gruppo potrà quindi determinarsi per composizione di altrettanti gruppi proiettivi comunque assegnati nei tre fasci invarianti. Esso dipenderà da 9 parametri al più, e trasformerà in sè il sistema lineare somma dei tre fasci considerati, ossia il sistema lineare ∞^7 delle superficie cubiche passanti per le rette assi dei fasci medesimi, e aventi un punto doppio in ciascun punto nel quale eventualmente si incontrino due di questi assi. (I vari casi che così si ottengono non sono birazionalmente distinti.)

Fissandoci sul caso dei tre assi disposti secondo i lati di un triangolo, potremo assumere come secondo tipo di gruppo completo *il gruppo* ∞^9 *delle trasformazioni cubiche che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^7 *delle superficie del 3° ordine aventi tre dati punti doppi.* Un'operazione generica del gruppo trasforma i piani in super-

(1) È questo appunto uno dei cinque *gruppi continui di trasformazioni quadratiche dello spazio*, già enumerati dal signor NOETHER (*Ueber continuirliche Gruppen von Cremona-Transformationen*, " Jahresber. d. Deut. Matem.-Ver. ", 1896).

(2) E, in tutto, hanno perciò a comune una conica (degenere) e un punto fuori di questa conica. Questi sistemi omaloidici di quadriche furono già considerati nelle Memorie del Prof. CREMONA (" Rend. Ist. Lomb. ", t. 4°, 1871; " Annali di Matem. ", S. 2ª, t. 5°, 1872).

ficie di questo sistema lineare, le quali avranno ancora a comune una cubica sghemba passante per i tre punti doppi. — L'intero sistema lineare ∞^7 di superficie cubiche rappresenta una varietà M_3^6 dello spazio S_7, a curve sezioni ellittiche (1), sulla quale al nominato gruppo ∞^9 corrisponderà un gruppo proiettivo.

Assunti i tre punti basi doppi del sistema lineare invariante di superficie cubiche come punti all'infinito dei tre assi coordinati, il sistema stesso sarà rappresentato dall'equazione:

$$axyz + byz + czx + dxy + ex + fy + gz + h = 0$$

e le equazioni del gruppo totale ∞^9 assumeranno la forma semplicissima:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}\,; \qquad y' = \frac{a_2 y + b_2}{c_2 y + d_2}\,; \qquad z' = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}$$

colle tre condizioni $a_i\, d_i - b_i\, c_i = 1$ (2).

6. — Supponiamo infine che nella stella di rette P venga subordinato un gruppo di Jonquières di un certo ordine $n - 1$, il quale trasformi perciò in sè, entro questa stella, un fascio di piani di asse b (certo distinto dal fascio a), e il sistema lineare ∞^n dei coni di ordine $n - 1$ (γ^{n-1}) aventi b come generatrice $(n - 2)^{\text{pla}}$ e toccati lungo questa retta da uno stesso gruppo di $n - 2$ piani.

Oltre alla stella di rette P, sarà pure invariante il sistema ∞^2 delle rette intersezioni di due piani variabili appartenenti rispett. ai fasci a e b, vale a dire, secondo che le stesse a, b sono sghembe o si incontrano, la congruenza lineare di direttrici a, b, oppure la stella di rette di centro ab. In ciascun piano del fascio b verrà subordinato un gruppo di trasformazioni quadratiche, rispetto al quale saranno invarianti i due fasci di rette aventi i centri rispett. in P e nell'intersezione del piano stesso con a: invece in ciascun piano del fascio a verrà subordinato un gruppo di Jonquières di ordine $n - 1$.

Il gruppo proposto, trasformando in sè il fascio di piani a e il sistema ∞^n di coni γ^{n-1} della stella P (già definito), dovrà mutare in sè stesso anche il sistema lineare di superficie di ordine n somma dei precedenti. Dalla considerazione degli elementi basi si deduce facilmente che questo sistema lineare ha la dimensione $2n + 1$ e il grado $3(n - 1)$. Così pure, essendo $= n + 4$ la dimensione massima del gruppo (di ordine $n - 1$) subordinato nella stella P, ne segue che la dimensione massima del nostro gruppo di S_3 (per un dato n) sarà $= (n + 4) + 3 = n + 7$.

Il terzo gruppo tipico completo di questa prima categoria è pertanto *il gruppo* ∞^{n+7} *delle trasformazioni cremoniane di ordine n che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^{2n+1}

(1) Enriques, " Rend. Acc. dei Lincei ", giugno 1894, p. 536 e seg.

(2) Queste trasformazioni rientrano come caso particolare in quelle (pure del 3° ordine) che si possono rappresentare analiticamente con tre equazioni bilineari, e furono studiate dal sig. Noether nella Memoria: *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen*... (" Math. Ann. ", vol. III). La sestica fondamentale di genere 3 è qui spezzata in una cubica sghemba, e in tre rette di uno stesso piano.

(di grado $3\{n-1\}$) delle superficie di ordine n aventi a comune un punto $(n-1)^{\text{plo}}$, una retta $(n-2)^{\text{pla}}$ passante per questo punto, gli $n-2$ piani tangenti lungo questa retta, e infine una retta (semplice) non passante per il punto $(n-1)^{\text{plo}}$ (1). Se però questa retta semplice (a) si appoggia all'altra $(n-2)^{\text{pla}}$ (b), il loro punto d'incontro deve anche essere $(n-1)^{\text{plo}}$ per queste superficie.

Il sistema lineare ∞^{2n+1} testè considerato rappresenta una varietà $M_3^{3(n-1)}$ di uno spazio S_{2n+1}, sulla quale ai piani del fascio a corrispondono coni Γ^{n-1} (di spazi S_n) e ai piani del fascio b quadriche (di spazi S_3). Ai coni γ^{n-1} della stella P corrispondono rigate razionali $R^{2(n-1)}$ di spazi S_{2n-1} con ∞^1 direttrici minime di ordine $n-1$. La varietà $M_3^{3(n-1)}$ può generarsi riferendo proiettivamente il fascio delle direttrici minime di una tal rigata a una punteggiata il cui sostegno non incontri lo spazio S_{2n-1} della rigata stessa, e proiettando ciascuna di quelle direttrici dal punto corrispondente di questa punteggiata. Si hanno così precisamente gli ∞^1 coni Γ^{n-1}.

I gruppi cremoniani di questo terzo caso saranno equivalenti a gruppi proiettivi su questa $M_3^{3(n-1)}$ di S_{2n+1}. La veduta rappresentazione spaziale di questa varietà $M_3^{3(n-1)}$ nasce da un'opportuna sua proiezione sopra S_3; e questo permette di stabilire come sia costituito il sistema omaloidico che determina una trasformazione generica del gruppo. Se le rette a e b non si incontrano, si ottiene un tale sistema prendendo quelle superficie del sistema complessivo ∞^{2n+1} che passano ancora: 1°) per una C^{n-1} piana intersezione di un piano per a con un cono γ^{n-1}; 2°) per $n-2$ generatrici di questo cono le quale formino sul cono stesso (per $n-2\geq 4$) un gruppo proiettivo a quello degli $n-2$ piani tangenti fissi ai coni γ^{n-1} lungo b. Se a e b si incontrano, quel cono γ^{n-1} e la sua sezione piana C^{n-1} si spezzano rispett. in piani passanti per b e in rette uscenti dal punto ab.

Si hanno così esempi di sistemi omaloidici di superficie di un ordine qualunque n, e precisamente di *monoidi* (anzi, se a e b si incontrano, monoidi in due modi diversi). Questi sistemi differiscono da quelli di De Paolis (1) — i soli, ch'io sappia almeno, finora considerati —, perchè il cono tangente a una superficie generica del sistema nel punto $(n-1)^{\text{plo}}$ P non è fisso, ma comprende un piano variabile.

Per scrivere le equazioni del sistema lineare invariante e del gruppo totale ∞^{n+7}, possiamo mandare all'infinito le rette a e b, ad es. sui piani xy e yz, e far coincidere fra loro (e precisamente col piano all'infinito) gli $n-2$ piani tangenti fissi lungo quest'ultima retta (il che non costituisce una particolarità del punto di vista birazionale). Il punto P sia poi il punto all'infinito dell'asse z. Allora il sistema lineare ∞^n dei coni γ^{n-1} potrà rappresentarsi coll'equazione $y=f_{n-1}(x)$, essendo f_{n-1} un polinomio arbitrario di grado $n-1$ in x. E il sistema lineare invariante ∞^{2n+1} di monoidi, somma del sistema precedente e del fascio di piani $z=$ cost., sarà rappresentato dall'equazione:

$$ay+f_{n-1}(x)+bzy+z\,.\,\varphi_{n-1}(x)=0$$

---

(1) Per $n=2$ si ritrova un sottogruppo del gruppo completo considerato al n° 4.

(1) “Giornale di Matem.„, vol. XIII (1895). Cfr. anche la Nota del Bianchi nel vol. XVI dello stesso Periodico.

contenente $2n+2$ parametri omogenei, cioè a, b e i $2n$ coefficienti dei due polinomi f_{n-1} e φ_{n-1}. Le equazioni del gruppo ∞^{n+7} saranno allora le seguenti:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}\,; \qquad y' = \frac{\lambda y + \psi_{n-1}(x)}{(c_1 x + d_1)^{n-1}}\,; \qquad z' = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

colle condizioni $a_1 d_1 - b_1 c_1 = a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1$, ed essendo $\psi_{n-1}(x)$ ancora un polinomio qualunque di grado $n-1$ in x.

7. — Ai gruppi tipici finora incontrati si possono ridurre tutti i gruppi cremoniani che trasformano in sè un fascio di superficie razionali e una congruenza del 1° ordine di curve unisecanti queste superficie, bastando perciò riferire quel fascio proiettivamente a un fascio di piani e questa congruenza birazionalmente (in modo opportuno) a una stella di rette (il cui centro non stia sull'asse di quel fascio).

Diremo perciò: *Ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane dello spazio, il quale muti in sè stesso un fascio di superficie razionali e una congruenza del 1° ordine di curve unisecanti queste superficie, può ridursi birazionalmente a uno dei seguenti gruppi completi, o a un loro sottogruppo:*

1° *Gruppo* ∞^{11} *delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^5 *delle quadriche passanti per una retta fissa e per un punto fuori di questa retta;*

2° *Gruppo* ∞^9 *delle trasformazioni cubiche che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^7 *delle superficie del 3° ordine aventi tre punti doppi fissi;*

3° *Gruppo* ∞^{n+7} *delle trasformazioni di ordine* n *che mutano in sè stesso il sistema lineare* ∞^{2n+1}, *di grado* $3(n-1)$, *delle superficie di ordine* n *aventi due dati punti* $(n-1)^{\text{pli}}$, *gli stessi* $n-2$ *piani tangenti fissi lungo la retta* (necessariamente $(n-2)^{\text{pla}}$) *che congiunge questi due punti, e contenenti ancora una retta (semplice) passante per uno di questi punti* (1).

Ora, vi sono alcuni casi in cui, dal fatto che è invariante una congruenza di linee soddisfacente a certe condizioni, si può concludere senz'altro che deve essere invariante anche un fascio di superficie (razionali) unisecanti le linee di questa congruenza, oppure inversamente. È notevole ad es. la proposizione seguente, della quale dovremo valerci in seguito:

Un gruppo cremoniano G il quale trasformi in sè ogni curva di una certa congruenza (Γ) *e subordini sopra ciascuna di queste curve* ∞^3 *trasformazioni diverse, deve trasformare in sè anche un fascio di superficie unisecanti queste stesse curve.*

Infatti la congruenza Γ potrà certo trasformarsi birazionalmente in una stella di rette (2), e il gruppo G quindi in un gruppo G_1, il quale dovrà lasciar fisso ogni raggio a, e perciò anche ogni piano α di questa stella. In ciascuno di questi piani risulterà così subordinato un gruppo *intransitivo, non integrabile;* dal che si trae che questo stesso gruppo vi ammetterà, oltre al fascio di raggi a, un secondo fascio inva-

(1) Le rette a e b del n° prec. sono qui supposte incidenti.

(2) Cfr. EF, § 8.

riante di curve p, unisecanti le a. (Ciò perchè il gruppo stesso deve essere equivalente al gruppo proiettivo ∞^3 di una quadrica di S_3, sulla quale si siano fisssate tutte le generatrici di un dato sistema; queste generatrici corrisponderebbero alle a, quelle dell'altro sistema alle p). Le ∞^1 curve p uscenti da un punto qualunque dello spazio (e contenute rispett. negli ∞^1 piani α che passano per questo punto) avranno per luogo una superficie π unisecante l'intera stella delle a, la quale risulterà invariante quando sia tale quel punto. A punti di uno stesso raggio a corrisponderanno superficie π formanti un fascio, il quale sarà invariante rispetto al gruppo G_1; anzi questo fascio sarà sempre lo stesso, qualunque sia il raggio a che si considera, perchè il fascio invariante di curve che ne viene segato sopra ogni piano α non può essere distinto da quello delle p, sicchè ogni superficie π dovrà contenere tutte le p uscenti da uno qualunque dei suoi punti, e risulterà perciò già individuata da quest'unico suo punto (arbitrario). Anche il gruppo G dovrà dunque trasformare in sè un fascio di superficie unisecanti le curve proposte: *esso sarà perciò un gruppo semplice* ∞^3 (*doppiamente intransitivo*).

Più generalmente, potremo dire che rientrano nei tipi già considerati anche *tutti i gruppi cremoniani che trasformano in sè una congruenza di linee, e contengono un sottogruppo (necessariamente invariante) che lascia fissa ciascuna di queste linee, subordinando su di essa* ∞^3 *trasformazioni diverse.* Sarà infatti invariante anche rispetto al gruppo complessivo quel fascio (unico) di superficie unisecanti queste linee che è trasformato in sè dal sottogruppo (∞^3) considerato. — È chiaro che si trovano in queste condizioni *tutti i gruppi cremoniani che trasformano in sè una congruenza di linee, subordinano in questa congruenza un gruppo imprimitivo, e operano in modo* ∞^3 *sulle singole linee della stessa congruenza.* Infatti, imposta come fissa una generica di queste linee, risulterà subordinato sopra questa linea un gruppo semplice ∞^3, e nella congruenza un gruppo integrabile; si potranno dunque staccare dal sottogruppo così ottenuto ulteriori sottogruppi invarianti entro di esso e di dimensioni decrescenti di un'unità per volta, fino a un ultimo gruppo, contenuto invariantivamente anche nel gruppo proposto, il quale lascerà fisse tutte le linee della congruenza considerata, operando su di esse ancora in modo ∞^3.

Vi sono anche alcuni criteri analoghi, i quali dall'esistenza di un fascio invariante di superficie soddisfacente a certe condizioni permettono di dedurre quella di una congruenza, pure invariante, di linee unisecanti queste superficie: ma non ci fermiamo ad esporli, perchè non avremo occasione di applicarli.

CAPITOLO II.

Gruppi integrabili.
Gruppi equivalenti a gruppi proiettivi sopra coni.

8. — È noto (cfr. EF, § 9) che *ogni gruppo continuo integrabile di trasformazioni cremoniane dello spazio può ridursi birazionalmente a un gruppo trasformante in sè una stella di rette.*

Sia pertanto G un gruppo cremoniano integrabile trasformante in sè una stella di rette di centro P. Tra gli infiniti sistemi lineari di superficie invarianti rispetto ad esso costruiamone uno (Σ) composto di monoidi, ossia di superficie di un certo ordine n aventi il punto P come $(n-1)^{\text{plo}}$; basta perciò applicare la generazione di sistemi lineari invarianti esposta in EF, § 2, a un qualunque monoide o sistema di monoidi (i quali siano tali rispetto al punto P). Indichiamo con k la dimensione di questo sistema lineare, e con k' ($\leq k-1$) quella del massimo sistema lineare di coni (Σ') in esso contenuto (la quale al pari di k, può ritenersi grande a piacere).

Ciò posto, se $k > k'+1$, il gruppo G (che si suppone integrabile) oltre ai sistemi Σ e Σ' dovrà trasformare in sè (almeno) una serie di sistemi lineari, a due a due appartenentisi e tutti contenenti Σ' e contenuti in Σ, di dimensioni crescenti di un'unità per volta da k' a k. Fra questi ve ne sarà uno di dimensione $=k'+1$, il quale potrà ritenersi individuato da $k'+1$ coni indipendenti contenuti in Σ', e da una $(k'+2)^{\text{ma}}$ superficie la quale non sia più un cono di vertice P; dal che si trae che tutte le superficie di questo sistema $\infty^{k'+1}$ avranno come cono tangente in P lo stesso cono (di ordine $n-1$) che è ivi tangente a quest'ultima superficie.

Diremo pertanto: *Il gruppo G, supposto integrabile, deve trasformare in sè un sistema lineare di superficie di un certo ordine n aventi a comune un punto $(n-1)^{\text{plo}}$ col relativo cono tangente, e, eventualmente, altri elementi ancora.*

Si aggiunga che questo sistema lineare invariante può supporsi semplice, bastando perciò che sia tale il sistema Σ' come sistema di coni nella stella P (ossia che questo sistema non appartenga ad alcuna involuzione di raggi della stella medesima). Indicatane pertanto con $r=k'+1$ la dimensione, esso rappresenterà una varietà M_3 di uno spazio S_r, contenente ∞^2 rette (corrispondenti ai raggi della stella P) e incontrata da tutti gli iperpiani (di un sistema lineare ∞^{r-1}, ossia) passanti per un certo punto secondo rigate aventi le generatrici fra quelle ∞^2 rette: tale M_3 sarà pertanto un cono col vertice in questo punto. Concludiamo perciò:

Ogni gruppo continuo integrabile di trasformazioni cremoniane dello spazio è equivalente a un gruppo proiettivo sopra un cono (a tre dimensioni) di un certo spazio S_r (e precisamente sopra un cono di prima specie, o che almeno possa considerarsi come tale: sia cioè eventualmente anche di seconda specie, purchè soltanto il gruppo di cui si tratta vi ammetta un punto unito fisso sopra la retta asse).

9. — Viceversa è anche facile vedere come si possano costruire tutti i gruppi cremoniani di S_3 equivalenti a gruppi proiettivi sopra coni razionali di spazi S_r (i quali siano, o possano considerarsi come di prima specie). Fra essi saranno certo compresi tutti i gruppi integrabili.

Partiamo perciò dal sistema lineare ∞^r rappresentativo di un tal cono, il quale, facendo corrispondere alle generatrici del cono medesimo rette di una stella P, risulta appunto composto di superficie di un certo ordine n aventi il punto P come $(n-1)^{\text{plo}}$ e uno stesso cono tangente in questo punto; più, eventualmente, altri elementi ancora a comune. Si tratta ora di costruire il massimo gruppo cremoniano trasformante in sè questo sistema lineare (Σ), e così pure il sistema lineare ∞^{r-1} (Σ') dei coni di vertice P in esso contenuti. (Questa seconda condizione è conseguenza della prima se il cono di S_r considerato non è luogo di ∞^1 piani). Per determinare pertanto la trasformazione più generale di questo gruppo, si cominci coll'assegnare ad arbitrio nella stella P una trasformazione cremoniana la quale muti in sè il sistema lineare (di coni) Σ': trasformazione che dipenderà da un certo numero $s\,(\geq 0)$ di parametri. Dopo di ciò si facciano ancora corrispondere fra loro due qualunque superficie F, F′ del sistema Σ, non contenute in Σ' (con che verremo a disporre di r ulteriori parametri). Allora, indicato con Γ un cono (certo esistente) del sistema Σ' il quale sia invariante rispetto alla trasformazione assegnata nella stella P, dovranno corrispondersi proiettivamente (entro Σ) i due fasci Γ . F e Γ . F′; e per individuare questa corrispondenza (di cui si conosce già l'elemento unito Γ e la coppia F, F′) occorrerà un nuovo $(r+s+1)^{\text{mo}}$ parametro. Risulterà così individuata una trasformazione cremoniana dello spazio — composta mediante la trasformazione assegnata nella stella P e la proiettività fra i fasci Γ . F e Γ . F′ — la quale evidentemente muterà in sè il sistema Σ (e così pure Σ'), e sarà anche la più generale fra le trasformazioni che godono di questa proprietà. Concludiamo perciò:

Ogni sistema lineare ∞^r del tipo indicato (Σ) è invariante rispetto a un gruppo cremoniano ∞^{r+s+1}, dove $s(\geq 0)$ è la dimensione del massimo gruppo cremoniano della stella P *che muta in sè stesso il sistema lineare ∞^{r-1} dei coni di questa stella contenuti nel sistema proposto* (∞^r).

Il gruppo ∞^{r+s+1} ottenuto in S_3 è integrabile sempre e solo quando è tale quest'ultimo gruppo ∞^s (oppure quando, per generare il primo, se ne consideri soltanto un sottogruppo integrabile).

Ora, questo gruppo ∞^s subordinato dal gruppo complessivo G nella stella di rette P può sempre supporsi ridotto:

a un gruppo proiettivo;

a un gruppo di trasformazioni quadratiche, trasformante in sè due diversi fasci di piani (i cui assi indicheremo con p, q); — ovvero:

a un gruppo di trasformazioni di Jonquières di un certo ordine m, trasformante in sè stesso il sistema lineare ∞^{m+1} dei coni di ordine m che hanno una data generatrice p come $(m-1)^{\text{pla}}$ e gli stessi $m-1$ piani tangenti (π_1, π_2, ...) lungo di essa.

In ciascuno di questi casi sappiamo che G dovrà trasformare in sè stesso un sistema lineare ∞^r (Σ) di superficie di un certo ordine n colla multiplicità $n-1$ nel punto P, e contenente un sistema lineare ∞^{r-1} (Σ') di coni di vertice P. Supponiamo ora che lo stesso gruppo G trasformi in sè, oltre a Σ', anche un sistema lineare più ampio Σ'_0 (contenente il precedente) di coni di vertice P, aventi lo stesso ordine n; e la dimensione di quest'ultimo sistema si indichi con $k-1$ ($\geq r$). Allora i due sistemi lineari Σ e Σ'_0, composti entrambi di superficie di ordine n, saranno contenuti in uno stesso sistema lineare ∞^k (Σ_0), il quale sarà pure invariante rispetto a G (e sarà dello stesso tipo di Σ).

Nel primo caso — quando cioè G opera proiettivamente sulla stella P — si può assumere come sistema Σ_0' il sistema lineare di *tutti* i coni di ordine n appartenenti alla stella P.

Nel secondo caso il sistema Σ' — comprendendovi eventualmente il piano (fondamentale) pq contato un certo numero di volte [1] — si comporrà di coni di un certo

[1] Nel qual caso questo piano dovrà intendersi aggiunto uno stesso numero di volte, come parte fissa, a tutto il sistema Σ.

ordine $m+n$ avente le rette p e q come multiple di ordini rispett. m e n; e allora potremo assumere come sistema Σ'_0 quello di tutti i coni di ordine $m+n$ aventi queste stesse multiplicità lungo p e q.

Nel terzo caso infine, se i coni del sistema Σ' incontrano i piani del fascio p secondo n rette variabili, questi stessi coni, comprendendovi eventualmente i piani fondamentali π_i con opportune multiplicità, dovranno avere le rette infinitamente vicine a p in questi stessi piani come multiple di ordine n, e quindi la p come multipla di ordine $\geq (m-1)\,n$; e poniamo sia di ordine $=(m-1)\,n+l$, essendo allora $mn+l$ l'ordine dei coni medesimi. Allora assumeremo come sistema Σ'_0 il sistema di tutti i coni di ordine $mn+l$ aventi le accennate multiplicità lungo p e le altre rette ad essa infinitamente vicine.

Per la rappresentazione analitica, possiamo supporre di mandare il punto P all'infinito sull'asse z, e di far coincidere nel secondo caso il piano pq e nel terzo caso tutti i piani π_i col piano all'infinito. Di più, si supponga scelto il sistema Σ in modo che il cono tangente P_∞ alle superficie di esso, e quindi anche a tutte le superficie di Σ_0, si riduca pure al piano all'infinito, contato un numero opportuno di volte [1].

Allora, nel primo caso, il sistema lineare invariante Σ_0 sarà rappresentato dall'equazione semplicissima:

$$z = F_n(x\,y)$$

dove F_n è un polinomio affatto arbitrario di grado n in x, y; tale sistema ha la dimensione $r=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ed è invariante rispetto al gruppo rappresentato dalle equazioni:

$$x' = \frac{ax+by+c}{a_2x+b_2y+c_2}\,; \quad y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\,; \quad z' = \frac{z+\Phi_n(xy)}{(a_2x+b_2y+c_2)^n}$$

dove Φ_n è anche un polinomio arbitrario di grado n nelle variabili x, y; questo gruppo dipende da $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+9$ parametri.

Nel secondo caso, se i due fasci di piani di assi p, q si assumono rispett. come fasci $x=\text{cost.}$, $y=\text{cost.}$, il sistema Σ_0 sarà rappresentato da un'equazione del tipo:

$$z = F_{m+n}(x\,y)$$

nel cui secondo membro x e y entrino a gradi rispett. $\leq m$ e $\leq n$; possiamo perciò scrivere:

$$z = x^m f_0(y) + x^{m-1} f_1(y) + \ldots + f_m(y)$$

dove le f sono tutte polinomi di grado n in y. La dimensione r di questo sistema

---

(1) La riduzione di questo cono tangente a un piano multiplo può sempre ottenersi con un'opportuna proiezione del cono a tre dimensioni rappresentante il sistema Σ.

vale $(m+1)(n+1)$; e il sistema stesso è invariante rispetto al gruppo (di dimensione $(m+1)(n+1)+7$):

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}\,; \qquad y' = \frac{a_2 y + b_2}{c_2 y + d_2}\,; \qquad z' = \frac{\lambda z + x^m \varphi_0(y) + x^{m-1}\varphi_1(y) + \ldots + \varphi_m(y)}{(c_1 x + d_1)^m (c_2 y + d_2)^n}$$

dove le φ sono polinomi di grado n in y, e si può ritenere $a_1 d_1 - b_1 c_1 = a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1$.

Nel terzo caso infine il sistema lineare (di coni) Σ'_0 sarà la somma del fascio di piani di asse p — e sia il fascio $x = \text{cost.}$ — contato l volte, e di un sistema lineare del tipo $y = \psi_m(x)$ contato n volte: perciò il sistema Σ_0 sarà rappresentato da un'equazione del tipo:

$$z = y^n f_l(x) + y^{n-1} f_{l+m}(x) + \ldots + f_{l+mn}(x)$$

dove le f sono polinomi in x di gradi eguali ai rispettivi indici. La dimensione r di questo sistema vale $m\binom{n+1}{2} + (n+1)(l+1)$. E poichè in questo caso si ha $s = m + 5$, così il detto sistema sarà invariante rispetto a un gruppo dipendente da

$$m\binom{n+1}{2} + (n+1)(l+1) + m + 6$$

parametri, il quale si rappresenterà colle equazioni:

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}\,; \qquad y' = \frac{\lambda y + \mathrm{F}_m(x)}{(cx + d)^m}\,; \qquad z' = \frac{\mu z + y^n \varphi_l(x) + y^{n-1}\varphi_{l+m}(x) + \ldots + \varphi_{l+mn}(x)}{(cx + d)^{l+mn}}$$

dove F_m e le φ sono sempre polinomi arbitrari, di gradi eguali ai rispettivi indici, e si può ritenere $ad - bc = 1$.

Questi gruppi tipici completi sono tutti *non integrabili.* Però dal secondo e dal terzo si staccano sottogruppi integrabili imponendo come fissi rispett. un raggio della stella o un piano dell'unico fascio invariante; e nel primo di essi il massimo sottogruppo integrabile si ottiene imponendo come fissi un raggio e un piano della stella invariante i quali si appartengano.

CAPITOLO III.

Un teorema generale sui gruppi cremoniani con un fascio invariante di piani.

10. — Premessi i casi più semplici che formano oggetto dei precedenti Cap. I e II, cominciamo ora lo studio ordinato di tutti i diversi tipi di gruppi di Jonquières generalizzati, e, per prima cosa, di quei gruppi G che trasformano in sè un fascio di piani (π). Dimostreremo a tal uopo la proposizione seguente, la quale ci condurrà a una prima classificazione di questi gruppi:

Ogni gruppo cremoniano continuo dello spazio S_3 *il quale trasformi in sè un fascio di piani è equivalente a un gruppo proiettivo sopra una varietà* M_3 *di uno spazio* S_r, *la quale* (corrispondentemente a quel fascio invariante di piani) *contiene:*

I. *o una serie* ∞^1 (*razionale, normale*) *di piani;*

II. *oppure una serie razionale* ∞^1 (*fascio*) *di quadriche* (*a due dimensioni*);

III. *oppure una serie razionale* ∞^1 (*fascio*) *di coni* (*razionali, normali, di un certo ordine* n).

Questi tre casi corrispondono evidentemente ai tre tipi di gruppi cremoniani che possono venire subordinati da G nei singoli piani π.

Per dimostrare la proposizione enunciata basterà costruire in S_3 un sistema lineare di superficie (Σ), semplice e invariante rispetto a G, il quale sopra ogni piano π seghi o una rete omaloidica, oppure un sistema lineare equivalente a quello delle coniche passanti per due punti fissi, ovvero anche un sistema equivalente a quello delle curve di un certo ordine n aventi a comune un punto $(n-1)^{\text{plo}}$ colle relative tangenti. E la costruzione di questo sistema Σ si riconduce a sua volta ad individuare sopra ciascun piano π il sistema lineare di curve φ che deve esserne segato; poichè, conosciuto quest'ultimo (per ogni piano π), si potrà tosto costruire Σ applicando la generazione esposta in EF, § 2 a una superficie o sistema di superficie già incontranti i piani π secondo curve φ. È chiaro altresì che, fra i sistemi così ottenibili (e la cui dimensione può essere grande a piacere), ve ne saranno di quelli semplici, completi, e seganti anche sopra ciascun piano π l'intero sistema lineare proposto di curve φ (così risulteranno normali la varietà rappresentativa di Σ e le superficie che su di essa corrispondono ai piani π).

Ciò posto, si costruisca un sistema lineare qualunque (T) di superficie, invariante rispetto a G; questo sistema segherà sopra ogni piano π un sistema lineare di curve ψ, invariante rispetto al gruppo subordinato da G in detto piano. Questo stesso gruppo (del piano π) trasformerà in sè anche ciascuno dei successivi aggiunti puri del sistema delle ψ, l'ultimo dei quali sarà un determinato sistema lineare, almeno ∞^1, composto di curve ψ' *razionali* o *ellittiche.*

Supponiamo anzitutto che queste curve siano razionali. In tal caso il loro sistema, supposto di dimensione > 1 (1):

a) o è una rete omaloidica, e allora esso può assumersi senz'altro come sistema lineare di curve φ (atto a costruire il sistema Σ);

b) oppure è trasformabile birazionalmente nel sistema lineare ∞^5 di tutte le coniche del piano; e allora come sistema lineare di curve φ può assumersi la rete omaloidica (ben determinata) che contemporaneamente si trasforma nel sistema ∞^2 delle rette;

c) o infine esso è il sistema rappresentativo di una certa rigata razionale normale, e allora si potranno assumere come curve φ quelle che corrispondono alle direttrici di questa rigata di ordine immediatamente superiore alle direttrici minime. Queste curve (che potrebbero anche essere le stesse ψ') formano infatti un sistema lineare rappresentante una quadrica o un cono razionale normale (di ordine ≥ 1), e certo invariante rispetto al gruppo subordinato da G in ogni singolo piano π.

---

(1) Noether, " Mathem. Ann. ", vol. III, V; Guccia, " Rend. di Palermo ", 1886.

Rimane il caso in cui le curve (razionali) ψ' formino in ciascun piano π soltanto un fascio. Allora, fra gli infiniti sistemi lineari completi di curve unisecanti le ψ' (quindi anche razionali) e invarianti rispetto al gruppo subordinato in questo piano, se ne prenda uno di dimensione minima (purchè >1). Questo sistema lineare $|\xi|$, rappresenterà ancora una quadrica o un cono (di ordine ≥ 1), e potrà perciò assumersi come sistema lineare di curve φ ogni qual volta esso sia *unico* (con quella data dimensione) nel proprio piano, ovvero anche qualora, essendovene altri, esso possa staccarsi razionalmente da questi — descriva cioè, al variare del proprio piano, un sistema ∞^1 non contenente questi altri —. *Dico che, se ciò non avviene, il gruppo G è necessariamente integrabile* (e equivalente quindi a un gruppo proiettivo sopra un cono, sul quale al fascio dei piani π corrisponderà un fascio invariante di coni a due dimensioni; sicchè il teorema enunciato sarà vero anche in questo caso).

Per dimostrare che G è integrabile, basterà far vedere ch'esso subordina un gruppo integrabile tanto nel fascio dei piani π, quanto in ciascuno di questi piani. Ora, al variare di un piano π, uno qualunque dei sistemi $|\xi|$ in esso contenuti descrive una serie ∞^1, della quale dobbiamo supporre che ciascun piano π contenga due o più elementi; in questa serie nasce così un'involuzione invariante rispetto a G, sicchè G stesso non potrà operare su di essa, e quindi sul fascio dei piani π, che in modo al più ∞^1. — D'altra parte in ciascun piano π viene subordinato un gruppo equivalente a un gruppo proiettivo sopra una quadrica o cono, su cui deve ancora risultare invariante un sistema lineare identico a quello delle sezioni (iper)piane, ma da esso distinto. E un tal gruppo è certo integrabile; perchè in nessuno dei casi — tutti noti — di gruppi proiettivi non integrabili sopra le dette superficie esiste un siffatto (ulteriore) sistema lineare invariante.

Supponiamo infine che le curve ψ' costruite in ogni singolo piano π siano ellittiche. Il loro sistema sarà allora birazionalmente equivalente a uno dei sistemi seguenti: (1)

a) sistema lineare di quartiche con due punti basi doppi;

b) sistema lineare di cubiche;

c) fascio di curve di ordine $3r$ con 9 punti basi r^{pli}.

Nel caso *a*), insieme al sistema lineare delle ψ', sarà pure invariante in π quel sistema lineare ∞^3 di grado due (corrispondente al sistema di coniche cogli stessi due punti basi) di cui il primo è *doppio:* questo potrà allora assumersi come sistema lineare di curve φ.

Nei casi *b*) e *c*) risulta invariante in π almeno una rete omaloidica (2). Se questa è unica, o può staccarsi razionalmente dalle altre pure invarianti, la assumeremo come sistema delle φ; in caso contrario, lo stesso ragionamento di poc'anzi prova che il gruppo G deve ancora essere integrabile.

Risulta pertanto vero in ogni caso il teorema enunciato al principio di questo n°. Per determinare tutti i tipi di gruppi cremoniani continui trasformanti in sè un

---

(1) Bertini, " Annali di Matem. ", S. 2ª, vol. 8°; Guccia, " Rend. di Palermo ", 1887.

(2) Enriques, " Rend. Acc. dei Lincei ", maggio 1893; p. 470. In questa Nota è anzi applicato l'intero ragionamento di cui qui ci siamo valsi alla riduzione dei gruppi cremoniani continui del piano a tipi determinati.

fascio di piani basterà pertanto esaminare tutti i possibili gruppi proiettivi sopra varietà M_3 contenenti un fascio (serie razionale ∞^1 d'indice uno) di piani, di quadriche, e di coni (razionali normali). È quello che noi faremo appunto nei prossimi tre capitoli.

CAPITOLO IV.

Gruppi equivalenti a gruppi proiettivi sopra varietà contenenti una serie ∞^1 razionale normale di piani.

11. — La determinazione dei diversi gruppi tipici di questa categoria si effettua assai facilmente in base al teorema seguente:

Ogni gruppo proiettivo sopra una varietà contenente una serie ∞^1 razionale normale di piani è equivalente a un gruppo anche proiettivo sopra un'analoga varietà razionale normale di piani la quale sia:

o una M_3^3 di S_5 (con ∞^2 direttrici rettilinee);

oppure un cono (di prima o di seconda specie).

È stato infatti dimostrato dal Sig. Segre (¹) che ogni varietà M_3^n contenente una serie ∞^1 razionale normale di piani appartiene a uno spazio S_{n+2}, e, quando non sia un cono, deve ammettere:

o un sistema ∞^2 di direttrici (minime) di ordine $\frac{n}{3}$, formanti una congruenza del primo ordine;

oppure una sola, o anche un sistema ∞^1 di direttrici minime di un certo ordine $m < \frac{n}{3}$, formanti in quest'ultimo caso una rigata minima di ordine $2m$.

D'altra parte, un gruppo proiettivo sopra una tale M_3^n di S_{n+2} deve sempre trasformare in sè, oltre al sistema lineare delle sezioni iperpiane di questa varietà, anche il sistema residuo di esso rispetto a un numero qualunque di piani (ossia il sistema lineare segato dagli S_{n-1} passanti per questi piani). — Ora, se vi sono ∞^2 direttrici minime di ordine $\frac{n}{3}$, gli S_{n+1} passanti per $\frac{n}{3}-1$ piani qualunque segheranno sulla M_3^n un sistema lineare ∞^5, rappresentante una varietà di piani con ∞^2 direttrici rettilinee; e questa varietà sarà appunto una M_3^3 (non conica) di S_5: (per $n = 3$, la M_3^n sarebbe essa stessa una tale M_3^3). Ogni gruppo proiettivo sulla M_3^n sarà allora equivalente a un gruppo anche proiettivo su questa M_3^3.

Se invece la M_3^n contiene almeno una direttrice di ordine $m < \frac{n}{3}$, gli S_{n+1} passanti per m sui piani arbitrari l'incontreranno ulteriormente secondo un sistema lineare di grado $n - 3m$ e dimensione $n - 3m + 2$ (perciò almeno ∞^3) di rigate di ordine $n - m$. Perciò ogni gruppo proiettivo sulla data M_3^n sarà equivalente a un

(¹) *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* („ Atti del R. Acc. di Torino „, vol. XXI, 1885).

gruppo anche proiettivo sulla varietà M_3^{n-3m} di S_{n-3m+2} rappresentata da quest'ultimo sistema (e che sarà ancora varietà normale di piani). E poichè il passaggio per una direttrice C^m della M_3^n non impone alle superficie (rigate) del detto sistema lineare che una sola condizione, così si conclude che alle stesse C^m dovranno corrispondere sulla M_3^{n-3m} altrettanti punti comuni agli ∞^1 piani; vale a dire questa M_3^{n-3m} sarà un cono, di prima o seconda specie (con un unico vertice cioè, o con una retta asse) secondo che la M_3^n conteneva una sola direttrice C^m, oppure un sistema ∞^1 di tali curve.

Il teorema enunciato è dunque completamente dimostrato; e nella determinazione dei gruppi tipici di questa categoria noi possiamo perciò limitarci a considerare i gruppi proiettivi sulle M_3^3 di S_5 e sui coni contenenti ∞^1 piani.

12. — Ora, ogni gruppo proiettivo sopra una M_3^3 di S_5 (contenente ∞^1 piani e ∞^2 direttrici rettilinee) è equivalente a un gruppo al più ∞^{11} di trasformazioni quadratiche del tipo incontrato al n° 4.

E sappiamo pure che ogni gruppo proiettivo sopra un cono razionale, a tre dimensioni, di 1ª specie (composto o no di una serie ∞^1 di piani) è equivalente a un gruppo di trasformazioni cremoniane di un certo ordine n di uno dei tipi incontrati al n° 9.

Resta soltanto a vedere come si rappresentino sullo spazio S_3 i coni razionali normali di 2ª specie, e quali trasformazioni cremoniane vengano così a corrispondere alle trasformazioni proiettive su di essi.

Per rappresentare birazionalmente sopra S_3 un cono Γ^n di S_{n+2} (di 2ª specie), possiamo proiettarlo da $n-1$ suoi punti, presi su altrettanti piani distinti (più generalmente, da un S_{n-2} che l'incontri (soltanto) in $n-1$ punti, i quali potrebbero anche essere, tutti o in parte, infinitamente vicini). I piani del cono Γ^n si proiettano allora in piani di un fascio; e le sue ∞^{n+2} sezioni iperpiane si proiettano in coni di ordine n col vertice sull'asse r di quel fascio, e con quest'asse come generatrice $(n-1)^{\text{pla}}$. Lungo questa generatrice i detti coni saranno tutti tangenti agli stessi $n-1$ piani (immagini dei centri di proiezione su Γ^n). Da queste condizioni il sistema lineare ∞^{n+2} rappresentativo di Γ^n è già completamente individuato, perchè vi sono appunto ∞^{n+1} coni soddisfacenti alle condizioni stesse e aventi il vertice in un punto arbitrario della r.

Alle trasformazioni proiettive del cono Γ^n corrisponderanno in S_3 trasformazioni cremoniane, le quali dovranno mutare in sè stesso questo sistema ∞^{n+2} di coni. Il gruppo più ampio di tali trasformazioni — ossia il gruppo di tutte le trasformazioni proiettive sopra un cono Γ^n di S_{n+2} di seconda specie — dipende da $2n+9$ parametri. (Infatti, fissando un punto della retta asse, il che equivale a una sola condizione, devono restar disponibili, secondo il risultato del n° 9, $r+s+1$ parametri, essendo precisamente $r=n+2$, $s=n+5$; onde $r+s+1=2n+8$). Per $n=1$ si ha il gruppo proiettivo ∞^{11} con una retta fissa; per $n=2$ si ha un gruppo ∞^{13} di trasformazioni quadratiche, di cui è fatto cenno nella comunicazione cit. del Sig. NOETHER (cfr. n° 4).

Diremo perciò: *I gruppi cremoniani equivalenti ai gruppi proiettivi sopra coni di specie si riducono birazionalmente a gruppi* (*di dimensione* $\leq 2n+9$) *di trasforma-*

zioni di ordine n, che lasciano invariato il sistema lineare ∞^{n+2} dei coni di ordine n aventi a comune una generatrice $(n-1)^{\text{pla}}$ coi relativi $n-1$ piani tangenti.

Fissando un punto qualunque della retta r, generatrice $(n-1)^{\text{pla}}$ comune di questi ∞^{n+2} coni e asse del fascio di piani invariante, risulta pure fissa la stella di raggi avente quel punto per centro, e in questa stella il gruppo complessivo ∞^{2n+9} subordina un gruppo ∞^{n+5} di trasformazioni di Jonquières di ordine n, completamente definito dal sistema lineare ∞^{n+1} di coni della stella medesima (contenuto nel sistema totale ∞^{n+2}) che deve risultare invariante. Componendo i gruppi ∞^{n+5} subordinati in *due* stelle siffatte — coll'avvertenza di comporre soltanto trasformazioni subordinanti la medesima omografia nel fascio di piani (invariante) comune alle stelle medesime — si ha in S_3 un gruppo cremoniano di dimensione $2(n+5)-3=2n+7$; e, al variare della coppia di stelle considerata, si hanno tutte le ∞^{2n+9} trasformazioni del gruppo totale.

Assunta la retta r come retta $x_1=x_2=0$, e indicata con $f_{n-1}(x_1\,x_2)=0$ l'equazione complessiva degli $n-1$ piani tangenti lungo di essa ai coni del sistema invariante ∞^{n+2}, quest'ultimo sistema sarebbe rappresentato dall'equazione seguente:

$$(\lambda x_3+\mu x_4)f_{n-1}(x_1\,x_2)+f_n(x_1\,x_2)=0$$

con $n+3$ parametri omogenei, vale a dire λ, μ e gli $n+1$ coefficienti della forma f_n.

Le equazioni del gruppo totale ∞^{2n+9} possono allora mettersi sotto la forma:

$$x'_1=ax_1+bx_2$$

$$x'_2=cx_1+dx_2$$

$$x'_3f_{n-1}(x'_1x'_2)=(\alpha x_3+\beta x_4)f_{n-1}(x_1x_2)+\varphi_n(x_1x_2)$$

$$x'_4f_{n-1}(x'_1x'_2)=(\gamma x_3+\delta x_4)f_{n-1}(x_1x_2)+\psi_n(x_1x_2)$$

ovvero

$$x'_3=\frac{(\alpha x_3+\beta x_4)f_{n-1}(x_1x_2)+\varphi_n(x_1x_2)}{f_{n-1}(ax_1+bx_2,\,cx_1+dx_2)}\qquad x'_4=\frac{(\gamma x_3+\delta x_4)f_{n-1}(x_1x_2)+\psi_n(x_1\,x_2)}{f_{n-1}(ax_1+bx_2,\,cx_1+dx_2)}$$

con $2n+10$ parametri, vale a dire a, b, c, d, α, β, γ, δ e i $2(n+1)$ coefficienti delle forme φ_n e ψ_n; sono parametri omogenei gli ultimi $2n+6$ fra questi e le potenze n^{sime} delle a, b, c, d.

In coordinate cartesiane non omogenee:

$$x=\frac{x_3}{x_2},\qquad y=\frac{x_4}{x_2},\qquad z=\frac{x_1}{x_2},$$

facendo coincidere gli $n-1$ piani $f_{n-1}(x_1x_2)=0$ col piano all'infinito, risulterebbe invariante il sistema lineare ∞^{n+2} di cilindri:

$$\lambda x+\mu y+f_n(z)=0$$

colle generatrici tutte parallele al piano xy. E le equazioni del gruppo totale sarebbero:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta y + \varphi_n(z)}{(cz+d)^n}\,; \qquad y' = \frac{\gamma x + \delta y + \psi_n(z)}{(cz+d)^n}\,; \qquad z' = \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

Dal sistema invariante ∞^{n+2} di coni si possono estrarre i sistemi omaloidici determinanti le diverse trasformazioni del gruppo, prendendo quei coni che passano per $n-1$ punti i quali, se $n > 5$, vengano proiettati da r secondo un gruppo di piani proiettivo al gruppo dei piani tangenti fissi lungo r medesima. Questi sistemi omaloidici, e le relative trasformazioni cremoniane, furono studiati recentemente dal Sig. Del Pezzo (1).

Concludiamo pertanto:

I gruppi cremoniani equivalenti a gruppi proiettivi sopra varietà contenenti una serie ∞^1 di piani si riducono tutti birazionalmente a uno dei seguenti casi tipici:

1° *Gruppi al più ∞^{11} di trasformazioni quadratiche da noi incontrati al n° 4;*

2° *Gruppi di trasformazioni monoidali di un certo ordine n incontrati al n° 9* (anzi casi particolari di questi);

3° *Gruppi al più ∞^{2n+9} di trasformazioni coniche di un certo ordine n costruiti in questo stesso n° 12.*

Ciascuno di questi gruppi opera *proiettivamente* sui singoli piani del fascio invariante.

CAPITOLO V.

Gruppi equivalenti a gruppi proiettivi sopra varietà contenenti un fascio di quadriche.

13. — A partire da questo momento ci conviene introdurre l'ipotesi (che non risultava ancora necessaria nel cap. prec.) che *il gruppo proposto sia non integrabile.* E possiamo introdurla, avendo già determinati nel cap. II tutti i tipi di gruppi integrabili.

Indichiamo con μ_3 una varietà a tre dimensioni di uno spazio S_r contenente un fascio di quadriche Q, e con G un gruppo (non integrabile) di trasformazioni proiettive sopra questa varietà. — È importante per noi la considerazione del gruppo (proiettivo) g subordinato da G sopra una Q generica. Dico che *ogni qualvolta g non coincida precisamente col gruppo proiettivo ∞^3 che lascia fissa una conica* (*non degenere*) *della quadrica* Q, *sempre il gruppo* G *è equivalente a uno dei gruppi cremoniani tipici di* S_3 *da noi già incontrati* (e possiamo quindi prescindere dall'occuparcene ulteriormente).

Anzitutto, se il gruppo g si suppone integrabile, esso (o eventualmente il massimo suo sottogruppo continuo) dovrà lasciar fissa sulla quadrica Q almeno una generatrice di ciascun sistema, e quindi almeno un punto: perciò anche la rete oma-

(1) *Le trasformazioni coniche dello spazio* (" Rend. Acc. di Napoli ", 1896).

loidica delle sezioni piane della Q passanti per questo punto. Di qui si trae (ripetendo il ragionamento del n° 10) che il gruppo G deve esssere equivalente a un gruppo anche proiettivo sopra una varietà contenente una serie ∞^1 di piani (cap. IV), purchè soltanto quella rete omaloidica possa staccarsi razionalmente dalle altre pure invarianti eventualmente esistenti sulla stessa Q. E allo stesso n° 10 si è pure veduto che questo deve esser possibile ogni qual volta il gruppo G sia non integrabile.

Supponiamo ora che anche il gruppo g sia non integrabile. Risulta allora dall'enumerazione di tutti i possibili gruppi proiettivi (non integrabili) sopra una Q (¹) (e lo si vedrebbe anche direttamente) che g stesso contiene certo un sottogruppo invariante ∞^3 il quale lascia fisse tutte le generatrici a di un determinato sistema sulla Q — e opera perciò in modo ∞^3 sopra queste generatrici —, a meno che esso non coincida precisamente col gruppo ∞^3 (continuo o misto) delle trasformazioni proiettive che lasciano fissa sopra Q una certa conica (non degenere) q.

Escludiamo pertanto quest'ultima ipotesi. Allora il gruppo G dovrà anch'esso subordinare su ciascuna di quelle generatrici a (ossia su ciascuna generatrice di almeno un determinato sistema sopra ogni Q) ∞^3 trasformazioni diverse. D' altra parte il gruppo subordinato da G nella congruenza delle a è imprimitivo (poichè nella congruenza stessa è invariante il sistema ∞^1 delle schiere rigate giacenti sulle singole Q). Ciò basta per concludere (in base all'ultimo enunciato del n° 7) che la congruenza delle a (è del 1° ordine (²), e) ammette un fascio di superficie unisecanti, invariante rispetto a G. Questo gruppo potrà perciò ricondursi a uno dei tipi studiati nel Cap. I (e precisamente nei nⁱ 5 e 6).

14. — Basterà dunque esaminare il caso in cui sopra ogni Q viene subordinato da G *il gruppo proiettivo* ∞^3 *con una conica fissa* (q).

Imposta come fissa una quadrica Q generica, occorrono al più due condizioni per render fisse anche le rimanenti, e staccare così da G un sottogruppo invariante intransitivo (G_1), il quale muti in sè stessa ciascuna delle Q. — Questo gruppo G_1 dovrà subordinare su quella prima (e quindi sopra ogni) Q un sottogruppo invariante del gruppo ∞^3 colla conica q fissa, e contenente al più due parametri di meno di quest'ultimo (dunque almeno ∞^1). Tale sottogruppo dovrà dunque coincidere con quello stesso gruppo ∞^3 (che è privo di sottogruppi invarianti di dimensione > 0); e perciò concludiamo: *Il gruppo G, se transitivo, contiene tuttavia un sottogruppo invariante intransitivo* G_1, *il quale muta in sè stessa ogni quadrica* Q, *subordinandovi ancora tutte le* ∞^3 *trasformazioni che lasciano fissa la conica* q.

Dico ora che *questo gruppo* G_1 *è esso stesso un gruppo semplice* ∞^3. Ciò sarebbe evidente qualora le coniche q delle diverse quadriche Q fossero tutte coincidenti; perchè, fissando tre e quindi tutti i punti di questa conica, si avrebbe l'identità su ogni Q, e quindi su μ_3. Se invece le q non coincidono, ma hanno per luogo una certa superficie φ, il gruppo G_1 subordinerà sopra questa superficie un gruppo pro-

(¹) Cfr. ad es. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, cap. 10°.

(²) E perciò i due sistemi di rette di ciascuna Q descrivono, al variare di questa Q, due congruenze distinte (del 1° ordine). La congruenza cui sopra si accenna è appunto una di queste due.

iettivo, non integrabile e intransitivo; il che basta per concludere che questo stesso gruppo (subordinato sopra φ) è equivalente al gruppo proiettivo di una quadrica sulla quale siano fisse tutte le generatrici di un determinato sistema. A questo sistema di generatrici corrisponderanno sopra φ le coniche q; all'altro sistema corrisponderà un fascio, pure invariante, di curve f unisecanti le q (e ciascuna delle quali si ridurrebbe a un punto, se le q coincidessero). Con tre sole condizioni si potrà dunque render fissa ogni curva f, e quindi anche ogni punto di φ e della varietà μ_3.

Ora, le generatrici delle ∞^1 quadriche Q potranno formare o due distinte congruenze del 1° ordine, contenenti rispett. le due diverse schiere rigate delle singole Q, oppure una congruenza unica (irriducibile) del 2° ordine. Nel primo caso, entro ciascuna delle due congruenze, quelle generatrici che si appoggiano a una medesima curva f formeranno una rigata (R, R′) la quale, al variare della f, descriverà un fascio invariante rispetto a G. Ogni punto di μ_3 potrà perciò individuarsi come intersezione (unica) di tre superficie Q, R, R′ descriventi ciascuna un determinato fascio. Ricadiamo così nel gruppo tipico già incontrato al n° 5.

Se invece le generatrici delle Q formano una congruenza unica (irriducibile, del 2° ordine), le schiere rigate delle stesse Q formeranno un unico sistema ∞^1 (irriducibile), entro il quale sarà invariante l'involuzione (quadratica, razionale) delle coppie di schiere coniugate (contenute cioè in una stessa Q). Di qui si trae che, se il gruppo G è transitivo (più ampio cioè di G_1), esso dovrà operare in modo soltanto ∞^1 sul detto sistema di schiere rigate, e quindi anche sul fascio delle Q; esso sarà perciò un gruppo (precisamente) ∞^4. In questo caso il sistema ∞^1 delle schiere rigate delle Q sarà certo razionale, mentre invece se G è intransitivo (e perciò $\equiv G_1$) esso potrà essere iperellittico di genere qualunque.

Se G è transitivo e ∞^4, possiamo ridurlo molto facilmente a un gruppo proiettivo di S_3. Consideriamo perciò in S_3 un fascio di quadriche Σ mutuamente tangenti lungo una conica (non degenere) s; e riferiamo proiettivamente:

1° Il fascio di curve f contenuto nella superficie φ dianzi considerata al sistema dei punti della conica s;

2° Il sistema (razionale) ∞^1 delle schiere rigate delle quadriche Q all'analogo sistema sulle Σ, in modo che si corrispondano le involuzioni delle coppie di schiere coniugate.

Componendo queste due proiettività, otteniamo una determinata corrispondenza birazionale fra le due congruenze di 2° ordine formate rispett. dalle generatrici delle Q e delle Σ. Infatti ogni retta della prima (seconda) congruenza appartiene a una determinata schiera rigata di una Q (di una Σ), e si appoggia a una determinata f (passa per un determinato punto di s). — E poichè a ogni coppia di rette della prima congruenza incontrantisi in un punto generico di μ_3 (e contenute perciò in schiere diverse di una stessa Q) corrisponde una coppia di rette della seconda congruenza (contenute in schiere diverse di una stessa Σ, e perciò) incontrantisi in un punto pure generico di S_3, avremo così rappresentata birazionalmente la varietà μ_3 sopra S_3. — Dalla legge di generazione del gruppo G, la cui operazione generica può ottenersi componendo una proiettività arbitraria nel fascio delle f sopra φ e una proiettività opportuna nel sistema ∞^1 delle schiere rigate delle Q (e precisamente una delle ∞^1 proiettività che mutano schiere coniugate in schiere coniugate), segue immediatamente la legge di generazione del gruppo corrispondente in S_3; e quest'ultimo gruppo viene precisamente a coincidere col gruppo proiettivo ∞^4 che trasforma in sè il fascio delle quadriche Σ (ossia la conica base di questo fascio, e il polo comune del piano di essa rispetto a tutte le Σ).

Rappresentato il fascio delle quadriche Σ coll'equazione:

$$x_3^2 - x_2 x_4 = k x_1^2$$

questo gruppo tipico ∞^4 sarebbe a sua volta rappresentato dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= a^2 x_2 + 2ab x_3 + b^2 x_4 \\ x'_3 &= ac x_2 + (ad + bc) x_3 + bd x_4 \\ x'_4 &= c^2 x_2 + 2cd\, x_3 + d^2 x_4 \end{aligned}$$

coi parametri a, b, c, d tutti indipendenti. Questo gruppo trasforma in sè la stella di rette avente per centro il punto ($x_1 \neq 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$), e può quindi considerarsi come (equivalente a) un gruppo proiettivo sopra un cono di 1ª specie (di ordine 1). Esso rientra precisamente come sottogruppo nel 1° tipo del n° 9 (per $n = 1$).

Se G è intransitivo, ma il sistema ∞^1 delle schiere rigate delle Q è ancora razionale, potrà G stesso ridursi al sottogruppo invariante ∞^3 del gruppo tipico precedente (ottenibile col porre $ad - bc = 1$). Se invece questo sistema non è razionale, occorre un'altra rappresentazione spaziale della varietà μ_3, la quale potrà tuttavia applicarsi anche al caso precedente.

15. — Se il gruppo G è intransitivo, le coniche q e i loro piani saranno tutti invarianti rispetto ad esso; e la varietà μ_3 si proietterà perciò da uno qualunque di questi piani (supposti non coincidenti) in una varietà analoga, sulla quale a G corrisponderà ancora un gruppo proietttivo. Questa proiezione sarà certo univoca (essendo tale per l'intera varietà normale M_4 luogo degli spazi S_3 delle quadriche Q), e si potrà ripetere finchè i piani delle q non vengano tutti a coincidere [1]; sicchè noi possiamo supporre addirittura che sopra μ_3 questi piani (e queste coniche) coincidano, e gli spazi S_3 delle Q formino perciò un cono (razionale, normale) di 3ª specie. — Avvertiamo ancora che il piano dell'unica conica q si può supporre non contenuto in μ_3 — in altri termini, si può supporre che nessuna Q si riduca a questo piano contato due volte — potendo il sistema lineare invariante (Σ) costruito al n° 10 esser scelto in modo da segare sopra ogni piano π (senza eccezioni) un sistema lineare completo ∞^3 (anzichè soltanto ∞^2) equivalente a un sistema di coniche.

L'ordine della varietà μ_3 sarà quindi doppio di quello del cono di 3ª specie for-

[1] Ciascuna di queste proiezioni riduce di un'unità l'ordine delle curve f considerate al n° prec.^{e}, dopo che queste si saranno ridotte a rette, un'ultima proiezione farà coincidere i piani di tutte le q, e anzi queste stesse coniche.

mato dagli spazi S_3 delle quadriche Q, e poniamo sia $= 2(n-1)$. La varietà stessa apparterrà allora a uno spazio S_{n+2}; e possiamo supporre $n \geq 2$, se no si ricadrebbe nel gruppo proiettivo del n° prec.).

Per rappresentare questa varietà μ_3 sullo spazio S_3 possiamo anzitutto proiettarla da un punto qualunque P della (unica) conica q in un cono razionale normale, a tre dimensioni, di seconda specie, di ordine $n-1$, i cui piani saranno rispett. immagini delle quadriche Q; e poi proietteremo ancora questo cono, come già al n° 12, da $n-2$ suoi punti, tracce ad es. di altrettante generatrici del cono $\gamma^{2(n-1)}$ formato da quelle rette (di ambo i sistemi) delle quadriche Q che escono dal punto P. Alle quadriche Q corrisponderanno così in S_3 i piani passanti per una certa retta r; e alle sezioni iperpiane di μ_3 corrisponderanno superficie F di ordine $2(n-1)-(n-2)=n$, aventi la retta r come $(n-2)^{\text{pla}}$, e $n-2$ piani tangenti fissi lungo questa retta. Queste stesse superficie conterranno ancora la curva (piana) φ^n immagine del cono $\gamma^{2(n-1)}$ (la quale avrà un punto $(n-2)^{\text{plo}}$, con tangenti ben determinate, nell' intersezione del proprio piano colla retta r). In particolare alle sezioni iperpiane di μ_3 passanti per il punto P corrisponderanno superficie di ordine n contenenti come parte fissa il piano della curva φ^n; e astraendo da questo piano rimarrà un cono di ordine $n-1$, variabile entro un sistema lineare ∞^{n+1} identico a quello considerato al n° 12 (¹).

L'analisi fatta in questo cap. V ci conduce dunque a aggiungere ai casi già noti un solo gruppo tipico: *il gruppo ∞^3 intransitivo delle trasformazioni di un certo ordine n, che mutano in sè tutti i piani di un certo fascio, e un sistema lineare ∞^{n+2} di superficie di ordine n, aventi la retta asse di questo fascio come multipla di ordine $n-2$, più $n-2$ piani tangenti fissi lungo questa retta, e passanti ancora per una data curva piana di ordine n.*

La congruenza (unica) delle generatrici delle Q viene così rappresentata dalla congruenza del 2° ordine delle rette che si appoggiano alla r e alla curva φ^n (la quale ultima ha sopra r un punto $(n-2)^{\text{plo}}$); alle schiere rigate delle Q corrispondono i fasci di rette contenuti in questa congruenza, e i centri di questi fasci hanno per luogo la curva iperellittica φ^n.

Ogni operazione del nostro gruppo tipico continuo ∞^3 lascia fisso ciascuno di questi fasci di rette. Per costruire quindi la più generale di queste operazioni basta assegnare ad arbitrio una proiettività sulla retta r, e comporre, in ciascuno dei piani passanti per questa retta, le proiettività che risultano determinate per proiezione entro ciascuno dei due fasci di rette della congruenza contenuti nel piano stesso.

Assumendo r come retta $x_1 = x_2 = 0$, e supponendo la curva φ^n contenuta nel piano $x_3 = 0$ e ivi rappresentata dall'equazione

$$x_4^2 f_{n-2} + x_4 f_{n-1} + f_n = 0$$

dove le f contengono le sole coordinate x_1, x_2, si vede facilmente che il sistema lineare ∞^{n+2} delle superficie F si potrà rappresentare coll'equazione:

$$x_3([\alpha x_3 + \beta x_4] f_{n-2} + \varphi_{n-1}) = x_4^2 f_{n-2} + x_4 f_{n-1} + f_n \tag{1}$$

(¹) Per $n=2$ la varietà μ_3 è una quadrica di S_4, la quale viene semplicemente proiettata sopra S_3 da un suo punto P.

nella quale sono parametri variabili (non omogenei) α, β, e gli n coefficienti della forma $\varphi_{n-1}(x_1\, x_2)$, mentre invece sono costanti i coefficienti di tutte le f.

Per trovare le equazioni del gruppo ∞^3, possiamo osservare che deve essere trasformato in sè stesso il sistema ∞^1 (d'indice due) dei coni che dai vari punti di r proiettano la curva φ^n. L'equazione di questo sistema ∞^1 di coni è la seguente:

$$(x_4 + kx_3)^2 f_{n-2} + (x_4 + kx_3) f_{n-1} + f_n = 0 \tag{1}$$

ovvero:

$$k^2 . x_3^2 f_{n-2} + kx_3 (2x_4 f_{n-2} + f_{n-1}) + (x_4^2 f_{n-2} + x_4 f_{n-1} + f_n) = 0 \tag{1'}$$

Il nostro gruppo ∞^3 subordinerà in questo sistema ∞^1 tutte le possibili ∞^3 trasformazioni proiettive, le quali si rappresenteranno analiticamente mediante sostituzioni lineari del parametro k. Alle singole superficie del sistema (1) o (1') corrisponderanno pertanto, in una qualunque operazione del gruppo, le superficie:

$$\left(x_4 + \frac{ak+b}{ck+d}\, x_3\right)^2 f_{n-2} + \left(x_4 + \frac{ak+b}{ck+d}\, x_3\right) f_{n-1} + f_n = 0 \tag{2}$$

ottenute rispett. per gli stessi valori di k, e per valori delle a, b, c, d variabili da un'operazione all'altra e che possiamo supporre legati dalla relazione $ad - bc = 1$. Se dunque le equazioni (1) e (2) — quest' ultima moltiplicata per $(ck + d)^2$ — si mettono rispett. sotto la forma:

$$k^2 \mathrm{F} + 2k\mathrm{F}' + \mathrm{F}'' = 0$$

$$k^2 \Phi + 2k\Phi' + \Phi'' = 0$$

dovranno queste, come equazioni di secondo grado in k, dare per k gli stessi valori ogni qual volta in esse si sostuiscano rispett. le coordinate di due punti omologhi in una data operazione (definita dai valori particolari delle a, b, c, d); e dovrà perciò essere, per ogni operazione del gruppo:

$$\frac{\mathrm{F}}{\Phi} = \frac{\mathrm{F}'}{\Phi'} = \frac{\mathrm{F}''}{\Phi''} .$$

Introducendo pertanto in luogo di F e F', Φ e Φ' le loro espressioni rispett. date dalla (1') e ricavabili dalla (2), dando gli apici alle coordinate in F e F', e dividendo queste due funzioni per $x'_3 f'_{n-2}$ e le Φ, Φ' per $x_3 f_{n-2}$, avremo, a meno eventualmente di uno stesso fattore:

$$x'_3 = \frac{1}{x_3 f_{n-2}} \left[(ax_3 + cx_4)^2 f_{n-2} + c(ax_3 + cx_4) f_{n-1} + c^2 f_n\right]$$

$$\left[x_4 + \frac{f_{n-1}}{2 . f_{n-2}}\right]' = \frac{1}{x_3 f_{n-2}} \Big[(ax_3 + cx_4)(bx_3 + dx_4) f_{n-2} +$$
$$+ \frac{1}{2} \left\{ c(bx_3 + dx_4) + d(ax_3 + cx_4) \right\} f_{n-1} + cdf_n \Big]$$

dove il fattore omesso — sostituendo nell'equazione del sistema lineare invariante — si trova essere eguale all'unità, qualora si assuma $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$.

Con qualche trasformazione, e valendosi della relazione $ad - bc = 1$, si ha pure:

$$x'_1 = x_1 \qquad x'_2 = x_2$$

$$x'_3 = \frac{(ax_3 + cx_4)^2 f_{n-2} + c(ax_3 + cx_4) f_{n-1} + c^2 f_n}{x_3 f_{n-2}}$$

$$x'_4 = \frac{(ax_3 + cx_4)(bx_3 + dx_4) f_{n-2} + c(bx_3 + dx_4) f_{n-1} + cd f_n}{x_3 f_{n-2}}.$$

Ponendo in queste equazioni $x_1 = x_2 = 0$, si ha il gruppo subordinato sulla retta r, che è appunto il gruppo proiettivo totale:

$$\frac{x'_3}{x'_4} = \frac{ax_3 + cx_4}{bx_3 + dx_4}.$$

Per $c = 0$ si ha un settogruppo ∞^2, composto delle omologie aventi $x_3 = 0$ come piano di punti uniti e il centro variabile sulla retta $x_1 = x_3 = 0$.

CAPITOLO VI.

Gruppi equivalenti a gruppi proiettivi sopra varietà contenenti un fascio di coni razionali.

16. — Indicheremo con μ_3 una varietà razionale a tre dimensioni di uno spazio S_r, la quale si componga di un fascio di coni razionali normali (Γ) di un certo ordine n. Indicheremo altresì con a una qualunque delle ∞^2 rette generatrici dei coni Γ^n, e con G un gruppo di trasformazioni proiettive sulla varietà μ_3. Dobbiamo determinare tutti i possibili tipi (birazionalmente distinti) di questi gruppi G, coi tipi di gruppi cremoniani di S_3 ad essi rispett. equivalenti (in cui cioè essi si trasformano mediante rappresentazioni spaziali della varietà μ_3). A tal uopo, ci sarà utile stabilire fin d'ora la proposizione seguente:

Se i coni (razionali normali) Γ^n *appartengono allo spazio complessivo* S_r (*se si ha cioè* $r = n + 1$), *il gruppo* G *è certo integrabile* (e quindi riducibile a un gruppo cremoniano di categorie già note — cfr. n° 9 —; sicchè di questo caso potremo non occuparci ulteriormente).

Infatti, se G fosse un gruppo non integrabile, esso conterrebbe (almeno) un sottogruppo semplice ∞^3, e quest'ultimo conterrebbe a sua volta (almeno) un sottogruppo ∞^2 trasformante in sè un dato cono Γ^n (arbitrario). Ora, dall'esame dei vari gruppi proiettivi semplici ∞^3 dello spazio $S_r \equiv S_{n+1}$ [1], risulta facilmente che, fra questi gruppi, i soli che contengano un sottogruppo ∞^2 trasformante in sè stesso un cono razionale normale Γ^n sono il gruppo proiettivo di una C^{n+1}, e il gruppo semplice ∞^3 con un punto fisso e una C^n pure fissa e contenuta in un iperpiano non

---

[1] Cfr. la mia Memoria: *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè* (“Mem. Acc. di Torino„, Ser. 2ª, t. 46; 1896).

passante per quel punto. D'altra parte, in questo secondo caso l'unico cono Γ^n invariante per un qualsiasi sottogruppo ∞^2 è pure invariante per l'intero gruppo ∞^3; e, nel primo caso, il cono Γ^n invariante per un dato sottogruppo ∞^2 varia con questo sottogruppo, ma non descrive un fascio, bensì una serie d'indice due, sulla varietà delle corde della C^{n+1}. Concludiamo pertanto che nessun gruppo semplice ∞^3 di S_{n+1} può trasformare in sè una serie ∞^1 di coni Γ^n quale a noi occorre; sicchè, se la varietà μ_3 si compone di coni Γ^n appartenenti allo stesso suo spazio, il gruppo G non potrà contenere nessun sottogruppo semplice ∞^3, e sarà perciò appunto un gruppo integrabile.

17. — Supposto pertanto che il gruppo G sia non integrabile, i coni Γ^n dovranno stare in spazi minori (S_{n+1}) contenuti in S_r, e potremo considerare, entro quest'ultimo spazio, la varietà M_{n+2} luogo di tali S_{n+1}; varietà che sarà anche normale, se lo è la varietà μ_3. (Per $r = n + 2$, questa M_{n+2} sarebbe lo stesso S_r considerato come luogo di un fascio di iperpiani).

Il gruppo G trasformerà in sè anche questa M_{n+2}, e opererà proiettivamente su di essa. Ora, dalle proprietà delle direttrici minime delle varietà composte di serie semplici razionali di spazi si trae facilmente (con un ragionamento analogo a quello del n° 11) che ogni gruppo proiettivo sopra una tale M_{n+2} è equivalente a un gruppo anche proiettivo sopra un'analoga M_{n+2}, la quale

o contiene ∞^{n+1} direttrici rettilinee;

oppure è un cono (si compone cioè di spazi S_{n+1} aventi un certo S_h a comune, dove $0 \leq h \leq n$).

Alla varietà μ_3 proposta potremo dunque sostituire quella che così viene a corrisponderle sulla nuova M_{n+2} (la quale conterrà pure un fascio di coni Γ^n); in altri termini, potremo supporre che gli spazi S_{n+2} dei coni Γ^n formino già una M_{n+2} soddisfacente a una delle due condizioni accennate.

La prima ipotesi comprende il caso che ci si è già presentato al n° 6; la varietà μ_3 è allora luogo di ∞^2 direttrici della M_{n+2}, le quali punteggiano proiettivamente i coni Γ^n. — Escluso questo caso, gli ∞^3 punti di μ_3 dovranno distribuirsi sopra un egual numero (∞^3) di direttrici; e in questo sistema ∞^3 di rette verrà subordinato un gruppo oloedricamente isomorfo a G stesso (in senso gruppale). D'altra parte questo sistema ∞^3 di direttrici può considerarsi come una varietà analoga a μ_3 entro lo spazio Σ_{n+1} di tutte le direttrici rettilinee della M_{n+2}; e precisamente come una varietà μ_3 i cui coni (analoghi ai) Γ^n appartengono allo spazio complessivo Σ_{n+1}. Da ciò si trae che il gruppo subordinato nello stesso sistema ∞^3 di direttrici, e quindi anche G, è integrabile.

Concludiamo perciò: *Se il gruppo* G *non è integrabile, potremo supporre che i coni* Γ^n *appartengano a spazi minori* S_{n+1} *formanti un cono* (di dimensione $n + 2$), e aventi perciò uno spazio S_h a comune $(0 \leq h \leq n)$.

18. — Il gruppo G, essendo non integrabile, dovrà subordinare nella congruenza delle rette a un gruppo di trasformazioni anche non integrabile [1], ed equivalente

---

[1] Se no dovrebbe esservi un sottogruppo non integrabile per il quale risultino fisse tutte le rette a; il che non è possibile.

a un gruppo proiettivo sopra una quadrica o sopra un cono di un certo ordine $p \geq 1$. Nel primo caso esso, quindi anche ogni suo sottogruppo, trasformerà in sè, oltre al fascio dei coni Γ^n, anche un secondo fascio di rigate appartenenti alla congruenza delle a. Ciò avverrà in particolare per ogni sottogruppo semplice ∞^3 (G') contenuto in G; e ogni gruppo siffatto dovrà operare in modo ∞^3 sopra uno almeno di questi due fasci invarianti. Si può anzi supporre che vi sia un gruppo G' il quale operi in modo ∞^3 sul *secondo* fascio, e quindi in modo almeno ∞^2 sulla serie delle generatrici di ciascun cono Γ^n; perchè in caso contrario basterebbe supporre scambiati i due fasci, ossia ridotto il secondo a un fascio di coni $\Gamma^{n'}$ o di quadriche (cap. V) — indipendentemente dal fatto se ai coni Γ^n continuerebbero o no a corrispondere dei coni sulla nuova varietà —.

Invece se G opera sulla congruenza delle a come un gruppo proiettivo sopra un cono Λ^p, ogni suo sottogruppo semplice ∞^3 opererà in modo anche ∞^3 sul fascio dei coni Γ^n, e subordinerà un gruppo ∞^1 non parabolico nella serie delle generatrici di ciascuno di questi coni: di più, questo sottogruppo non trasformerà in sè nessun altro fascio di rigate appartenente alla detta congruenza.

Questi due casi ci condurranno rispett. a due nuovi gruppi cremoniani tipici (cfr. n[i] 19-20 e 22-26).

19. — Cominciamo col supporre che G operi sulla congruenza delle a come un gruppo proiettivo sopra una quadrica (di S_3). Indicando allora con G' un suo sottogruppo semplice ∞^3, potremo ritenere che quest'ultimo gruppo operi in modo almeno ∞^2 sul sistema delle generatrici di ciascun cono Γ^n; e, per maggior chiarezza, distinguiamo il caso in cui esso opera su questo sistema in modo ∞^3 dal caso in cui vi opera in modo soltanto ∞^2.

Nella prima ipotesi ciascun cono Γ^n sarà già invariante per l'intero gruppo $(\infty^3) G'$; e, entro l'S_{n+1} cui esso appartiene, saranno fissi il punto vertice del cono stesso e un S_n non passante per questo punto (e non altri spazi minori). Lo spazio S_h che supponiamo comune agli S_{n+1} dei vari coni Γ^n (cfr. n° 17) sarà pertanto un punto o un S_n; anzi precisamente un S_n, se escludiamo (perchè già trattato al n° 9) il caso di cui gli ∞^1 coni Γ^n abbiano tutti lo stesso vertice, e μ_3 sia perciò anche un cono. Questo spazio fisso $S_h \equiv S_n$ dovrà evidentemente incontrare i vari coni Γ^n secondo una stessa curva C^n (razionale, normale) — perchè un gruppo proiettivo ∞^3 entro di esso non può trasformare in sè ∞^1 di queste curve —; e la varietà μ_3 sarà perciò luogo delle ∞^2 rette che si appoggiano a due curve razionali fisse: la C^n, e la curva γ luogo dei vertici dei coni Γ^n. Osserviamo inoltre che la C^n è normale e sta in un S_n non incontrante lo spazio cui appartiene γ (se no il gruppo G' non potrebbe operare su di essa in modo ∞^3); di qui si trae che, se μ_3 è normale (e tale possiamo supporla), sarà normale anche la curva γ (se no non sarebbe completo il sistema lineare di coni segato su μ_3 dagli iperpiani passanti per C^n).

Dico ora che la varietà μ_3 è di questo stesso tipo anche se il gruppo G' opera in modo soltanto ∞^2 sul sistema delle generatrici di ciascun cono Γ^n (e quindi in modo ∞^3 sul fascio dei coni stessi). Osserviamo intanto che le ∞^2 operazioni di G' che mutano in sè un dato cono Γ^n ne lasceranno fissa *una* generatrice, con tutti gli spazi osculatori al cono lungo di essa — i quali si apparterranno a due a due —;

ma non lasceranno fissi (nel relativo S_{n+1}) altri spazi minori passanti pel vertice del cono. Ora il gruppo G', oltre allo spazio S_h comune agli S_{n+1} dei coni Γ^n, dovrà lasciar fisso un S_{r-h-1} non incidente a questo S_h [1] e incontrante i detti S_{n+1} secondo spazi S_{n-h}; e anzi, se la curva γ luogo dei vertici dei coni Γ^n non è contenuta in quello spazio S_h (e appartiene perciò a uno spazio non incontrante affatto l'S_h medesimo) dovrà risultar fisso un S_{r-h-1} passante per tale curva (γ). Di qui si trae che il gruppo ∞^2 subordinato da G' nell'S_{n+1} di un cono Γ^n vi lascerà fissi due spazi minori indipendenti, un S_h e un S_{n-h}, uno dei quali passerà per il vertice del cono stesso; sarà dunque fisso anche lo spazio che da questo vertice proietta l'altro di quei due (supposto di dimensione $< n$); con che risulterebbero fissi in S_{n+1} due spazi (di dimensione > 0) uscenti dal vertice del cono Γ^n e aventi questo solo vertice a comune. Ma abbiamo visto poc'anzi che ciò, nelle ipotesi fatte, non può avvenire; dovranno dunque le due dimensioni h e $n - h$ essere eguali l'una a *zero* (corrispondentemente a uno spazio che si ridurrà al vertice del cono), l'altra a n; e anzi, se la varietà μ_3 non è un cono, sarà ancora, come nel caso precedente, $h = n$; ossia gli S_{n+1} dei coni Γ^n avranno a comune uno spazio S_n, che dovrà pure incontrare i coni stessi secondo una medesima curva C^n.

La varietà μ_3 è dunque, in qualsiasi caso non riducibile ai precedenti, *la varietà luogo delle* ∞^2 *rette che si appoggiano a due curve razionali normali* C^m, C^n *poste in spazi indipendenti entro un* S_{m+n+1}. Vediamo ora quale sia il massimo gruppo continuo di trasformazioni proiettive su di essa, e qual gruppo cremoniano corrisponda al detto gruppo proiettivo in un' opportuna rappresentazione spaziale della varietà medesima.

20. — La varietà μ_3 definita al n° prec. è di ordine mn, e negli ∞^1 punti di una qualunque delle sue rette (a) essa ammette uno stesso S_3 tangente: lo spazio determinato dai piani tangenti ai coni Γ^m e Γ^n in essa contenuti e passanti per la retta considerata.

Il gruppo G *di tutte le trasformazioni proiettive di questa varietà in sè stessa è evidentemente* ∞^7; queste trasformazioni mutano infatti in sè stessa ciascuna delle due direttrici C^m e C^n; e dopo aver imposti come fissi tutti i punti di queste direttrici, per il che occorrono $3 + 3 = 6$ condizioni, rimane ancora (soltanto) un gruppo ∞^1 di omografie rigate.

Per rappresentare questa varietà sullo spazio S_3 possiamo proiettarla dallo spazio Σ_{m+n-3} determinato da $m - 1$ punti ($A_1 \dots A_{m-1}$) della direttrice C^m e da $n - 1$ punti ($B_1 \dots B_{n-1}$) della C^n. Queste direttrici si proietteranno allora secondo due rette sghembe u, v, e la congruenza delle a secondo la congruenza lineare che ha queste due rette per direttrici: la proiezione di μ_3 sarà dunque univoca.

Poichè la varietà μ_3 è incontrata dallo spazio Σ_{m+n-3} secondo le $(m - 1)(n - 1)$ rette $A_i B_k$ (ma non ulteriormente), così le sue sezioni iperpiane si proietteranno in superficie F di ordine:

$$mn - (m - 1)(n - 1) = m + n - 1.$$

[1] Cfr. la mia Memoria cit., *Sulle varietà algebriche, ecc.*, § 2.

Queste superficie conterranno le rette u, v come multiple di ordini rispett. $n-1$, $m-1$, poichè ad es. ogni punto di u è immagine del gruppo delle $n-1$ rette a che congiungono un determinato punto della direttrice C^m ai vari punti B_k. Di più, gli spazi S_3 tangenti a μ_3 lungo le ∞^1 rette a uscenti da uno stesso punto B_k (o A_i) si proiettano tutti secondo un medesimo piano passante per u (o v), il quale risulterà perciò tangente a tutte le F lungo quest'intera retta. Questi $n-1$ (rispett. $m-1$) piani saranno quelli che da u (o v) proiettano gli $n-1$ (rispett. $m-1$) punti di v (o u) che corrispondono ai punti B_k di C^n (o A_i di C^m). Infine, le $(m-1)(n-1)$ rette intersezioni di questi due gruppi di piani dovranno ancora appartenere a tutte le F, avendo già con esse n intersezioni coincidenti sopra u e m sopra v.

Il sistema lineare rappresentativo della varietà μ_3 si compone dunque delle superficie di ordine $m+n-1$ aventi due rette sghembe come multiple di ordini rispett. $m-1$ e $n-1$, e tangenti lungo queste rette agli stessi $m-1$ o rispett. $n-1$ piani fissi. — Queste superficie contengono in conseguenza le $(m-1)(n-1)$ rette intersezioni di questi due gruppi di piani tangenti.

Il sistema lineare delle superficie F (che è di dimensione $m+n+1$, e di grado mn) risulta già completamente individuato dalle condizioni testè enunciate (come si può anche verificare direttamente).

Troviamo pertanto come nuovo gruppo tipico completo (corrispondente al 1° caso del n° 18) il *gruppo ∞^7 delle trasformazioni cremoniane di un certo ordine $m+n-1$, che mutano in sè stesso il sistema lineare (di dimensione $m+n+1$, e grado mn) delle superficie di ordine $m+n-1$ che hanno due date rette sghembe come multiple di ordini rispett. $m-1$ e $n-1$, e ammettono lungo queste rette gli stessi $m-1$ o rispett. $n-1$ piani tangenti fissi.*

In questo gruppo tipico alla stella di rette che dovrebbe risultare invariante è sostituita la congruenza lineare avente per direttrici le due rette (u, v) considerate.

Assumendo queste due direttrici u, v rispett. come rette $x_3=x_4=0$ e $x_1=x_2=0$ del sistema di coordinate, e indicando con $f_{n-1}(x_3x_4)=0$ e $f_{m-1}(x_1x_2)=0$ le equazioni complessive dei piani tangenti comuni alle superficie F lungo le rette stesse, l'equazione del sistema lineare ∞^{m+n+1} delle F sarebbe la seguente:

$$f_{m-1}(x_1x_2)\,.\,\varphi_n(x_3x_4)+f_{n-1}(x_3x_4)\,\varphi_m(x_1x_2)=0 \tag{1}$$

la quale contiene $m+n+2$ parametri omogenei, dati dagli $(n+1)+(m+1)$ coefficienti delle due forme binarie φ_n e φ_m.

Per costruire l'operazione più generale del gruppo possiamo anzitutto assegnare ad arbitrio una proiettività nella congruenza lineare di direttrici u, v [1] (il che implica 6 condizioni). Allora di ogni gruppo di piani $\varphi_n(x_3x_4)=0$ o $\varphi_m(x_1x_2)=0$ passanti per l'una o per l'altra di queste direttrici sarà determinato il gruppo di piani corrispondente $\varphi_n'=0$, $\varphi_m'=0$; e al fascio di superficie F

$$f_{m-1}\varphi_n+\lambda f_{n-1}\varphi_m=0$$

dovrà corrispondere il fascio:

$$f_{m-1}\varphi'_n+\mu f_{n-1}\varphi'_m=0.$$

---

[1] Ossia una trasformazione la quale muti, entro la congruenza, fasci di rette in fasci di rette, e precisamente fasci col centro sopra u o v in fasci aventi anche il centro rispett. sopra u o v.

Assegnando ancora, tra due fasci qualunque di questo tipo, una qualsiasi delle ∞^1 proiettività $\lambda = \text{cost.}\ \mu$, verremo a individuare nel modo più generale un'operazione del nostro gruppo ∞^7 (risultante dalla composizione di questa proiettività con quella assegnata nella congruenza di rette invariante).

Risulta pure da quanto si è detto che le equazioni di questo gruppo ∞^7 dovranno essere del tipo:

$$x'_1 = \xi(ax_1 + bx_2) \qquad y'_3 = \eta(\alpha x_3 + \beta x_4)$$
$$x'_2 = \xi(cx_1 + dx_2) \qquad x'_4 = \eta(\gamma x_3 + \delta x_4)$$

essendo ξ, η certe funzioni delle quali rimane a determinare il rapporto. Per determinarlo, sostituiamo queste espressioni nell' equazione del sistema lineare invariante (1); si ha allora (dividendo per $\xi^{m-1}\eta^{n-1}$):

$$\eta \,.\, f_{m-1}(ax_1 + bx_2,\, cx_1 + dx_2)\,\varphi'_n(x_3x_4) + \xi \,.\, f_{n-1}(\alpha x_3 + \beta x_4,\, \gamma x_3 + \delta x_4)\,\varphi'_m(x_1x_2) = 0$$

dove φ'_n e φ'_m sono nuovi polinomi analoghi rispett. a φ_n e φ_m. Perchè quest'equazione coincida colla (1) è necessario e sufficiente che sia:

$$\frac{\eta \,.\, f_{m-1}(ax_1+bx_2,\, cx_1+dx_2)}{f_{m-1}(x_1x_2)} = \frac{\xi \,.\, f_{n-1}(\alpha x_3+\beta x_4,\, \gamma x_3+\delta x_4)}{f_{n-1}(x_3x_4)}\,.$$

Si possono perciò prendere per ξ, η i valori che rendono queste frazioni eguali all'unità; e avremo allora le equazioni:

$$x'_1 = \frac{f_{n-1}(x_3x_4)}{f_{n-1}(\alpha x_3+\beta x_4,\, \gamma x_3+\delta x_4)}(ax_1 + bx_2);\quad x'_3 = \frac{f_{m-1}(x_1x_2)}{f_{m-1}(ax_1+bx_2,\, cx_1+dx_2)}(\alpha x_3 + \beta x_4)$$
$$x'_2 = \frac{f_{n-1}(x_3x_4)}{f_{n-1}(\alpha x_3+\beta x_4,\, \gamma x_3+\delta x_4)}(cx_1 + dx_2);\quad x'_4 = \frac{f_{m-1}(x_1x_2)}{f_{m-1}(ax_1+bx_2,\, cx_1+dx_2)}(\gamma x_3 + \delta x_4)$$

essendo a, b, c, d, α, β, γ, δ otto parametri, tali che risultano parametri omogenei le potenze m^{sime} dei primi quattro e le potenze n^{sime} dei rimanenti.

In coordinate cartesiane (non omogenee) $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$, facendo coincidere gli $m-1$ piani $f_{m-1}(x_1x_2)=0$ col piano $x=0$ e gli $n-1$ piani $f_{n-1}(x_3x_4)=0$ col piano all'infinito, il sistema lineare invariante sarà rappresentato dall'equazione:

$$\varphi_m(xy) + x^{m-1}\varphi_n(z) = 0$$

dove φ_m è polinomio *omogeneo* di grado m nelle x, y. E le equazioni del nostro gruppo ∞^7 diventano allora:

$$x' = \frac{(ax+by)^m}{x^{m-1}.\,(\gamma z+\delta)^n}\,; \qquad y' = \frac{(ax+by)^{m-1}(cx+dy)}{x^{m-1}.\,(\gamma z+\delta)^n}\,; \qquad z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\,.$$

21. — *Gruppi ∞^3, semplici, transitivi del tipo ciclico.* Se sulla varietà μ_3 del n° prec. noi ci limitiamo a considerare quelle trasformazioni proiettive che mutano in sè una proiettività $\mathfrak{P}$, assegnata ad arbitrio, fra le direttrici C^m e C^n, e quindi la rigata di ordine $m+n$ che ne risulta generata, veniamo a staccare dal gruppo complessivo ∞^7 un sottogruppo ∞^4, contenente a sua volta (come sottogruppo invariante) *un* gruppo semplice ∞^3, transitivo rispetto a μ_3.

Questo gruppo ∞^3 appartiene certamente al caso ciclico (EF, § 21), il solo nel quale possa risultare invariante qualche fascio di superficie. È interessante determinare di qual ordine sia il gruppo finito formato da quelle operazioni di esso che lasciano fisso un punto generico di μ_3.

Un tal punto *generico* P appartiene ad una retta a congiungente due punti A, B′ delle curve C^m e C^n, i quali non dovranno corrispondersi nella proiettività $\mathfrak{P}$. Imposto come fisso P, risulteranno pure fissi A e B′ coi loro corrispondenti A′ e B (rispett. su C^n e C^m); e sarà anche fisso ogni punto della retta APB′.

Ora, il sottogruppo ∞^1 per il quale sono punti uniti fissi A, B, A′, B′ (e non ancora P) può rappresentarsi con equazioni del tipo:

$$x'_0 = a^m x_0 \qquad x'_1 = a^{m-1} d x_1 \quad . \; . \; . \quad x'_m = d^m x_m$$

$$y'_0 = a^n y_0 \qquad y'_1 = a^{n-1} d y_1 \quad . \; . \; . \quad y'_n = d^n y_n$$

dove a, d sono parametri legati dalla relazione $ad = 1$, e A, B, A′, B′ sono i punti fondamentali per cui sono diverse da zero rispett. le coordinate x_0, x_m, y_0, y_n (¹). —

Possiamo quindi anche scrivere:

$$x'_0 = a^m x_0 \qquad x'_1 = a^{m-2} x_1 \quad . \; . \; . \quad x'_m = a^{-m} x_m$$

$$y'_0 = a^n y_0 \qquad y'_1 = a^{n-2} x_1 \quad . \; . \; . \quad y'_n = a^{-n} y_n .$$

Perchè dunque sia unito il punto P, e con esso ogni punto della retta AB′, è necessario e sufficiente che sia:

$$a^m = a^{-n} \qquad \text{ossia} \qquad a^{m+n} = 1$$

vale a dire *a deve essere una radice* $(m+n)^{\text{sima}}$ *dell'unità.* — Resta ora a vedere se queste $m+n$ radici dell' unità diano luogo, o meno, ad operazioni tutte distinte; se cioè sia o non sia possibile di avere l'identità su μ_3 anche per $a \neq 1$. È evidente (e fu anche osservato in EF, § 18) che ciò può avvenire soltanto quando sia $a^m = a^{m-2} = \ldots$, vale a dire $a^2 = 1$, e quindi $a = \pm 1$; ma, corrispondentemente al valore $a = -1$, si ha la trasformazione identica solo quando $m+n$ è numero pari (ossia m, n sono entrambi pari, o entrambi dispari). Invece se $m+n$ è dispari, per $a = -1$ si ha un'omografia rigata involutoria.

Avremo dunque un gruppo ciclico di ordine $\dfrac{m+n}{2}$ *se* $m+n$ *è numero pari; e di ordine* $m+n$ *se questo stesso numero è dispari.*

In quest'ultimo caso, e allora soltanto, il gruppo ∞^3 considerato è *di seconda specie* (EF, § 18) — contiene cioè un sottogruppo finito invariante d'ordine 2, ottenuto appunto per $a = \pm 1$ —; e vediamo così confermato che le operazioni che la-

(¹) Cfr. la mia Memoria cit.: *Sulle varietà algebriche ecc.,* § 3 („ Mem. Acc. di Torino „, 1896).

sciano fisso un punto generico formano in questo caso un gruppo ciclico di ordine sempre *dispari* (EF, § 19). Possiamo perciò completare il risultato già ottenuto dicendo:

Se $m+n$ è numero dispari, abbiamo un gruppo ∞^3 di seconda specie, corrispondente al caso ciclico di ordine (dispari) $m+n$. Se $m+n$ è numero pari, abbiamo un gruppo di prima specie corrispondente al caso ciclico di ordine (pari o dispari) $\frac{m+n}{2}$.

Abbiamo così *esempi* di tutti i casi possibili (esclusi soltanto i gruppi di 2ª specie di ordine 1, che sappiamo già ridursi a gruppi conformi).

D'altra parte due gruppi cremoniani ∞^3 della stessa specie e appartenenti al caso ciclico di uno stesso ordine sono sempre fra loro equivalenti. Noi possiamo infatti riferirli biunivocamente in modo che si corrispondano entro di essi i gruppi finiti che lasciano fissi rispett. due punti generici P, P'; allora, assumendo come omologhi in S_3 due punti qualunqne i quali nascano da P, P' mediante operazioni corrispondenti dei gruppi (∞^3) medesimi, verremo a definire in S_3 una trasformazione birazionale che muterà questi due gruppi l'uno nell'altro.

Diremo quindi:

I gruppi ∞^3 di prima specie appartenenti al caso ciclico di ordine h sono riducibili birazionalmente a gruppi di trasformazioni di ordine $2h-1$ (in particolare, per $h=1$, a gruppi proiettivi).

I gruppi ∞^3 di seconda specie appartenenti al caso ciclico di ordine dispari $2i+1$ $(i \geq 1)$ sono riducibili birazionalmente a gruppi di trasformazioni di ordine $2i$.

Questi gruppi ∞^3 tipici lasciano tutti invariata una congruenza lineare di rette, e risultano completamente definiti dalle cose dette al nº prec. Le loro equazioni possono ottenersi da quelle scritte alla fine del nº prec. identificando i parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rispett. con a, b, c, d, e ponendo fra questi la relazione $ad-bc=1$.

22. — Supponiamo ora che il gruppo G operi sulla congruenza delle a (cfr. nº 18) come un gruppo proiettivo sopra un cono Λ^p. Conviene distinguere due casi:

1º Lo spazio S_h comune agli S_{n+1} dei coni Γ^n (cfr. nº 17) contiene la linea γ luogo dei vertici di questi coni. *Dico che questa linea è allora una retta* (in quanto non sia μ_3 stessa un cono).

Vi è infatti in ogni sottogruppo semplice ∞^3 (G′) di G un sottogruppo ∞^1 (parabolico) che lascia fisso un (solo) cono Γ^n con tutte le sue generatrici; e quindi anche tutte le rette uscenti dal vertice C di questo cono e contenute nel relativo S_{n+1}. Fra queste rette vi sono in particolare quelle che da C proiettano i vertici (supposti distinti) degli altri coni Γ^n (poichè questi vertici stanno in S_h, e quindi nel detto S_{n+1}): perchè dunque tali rette risultino tutte invarianti senza che siano tali gli ∞^1 coni Γ^n, è necessario che le rette stesse coincidano, ossia che γ sia una retta, c. s. v. d. — *La varietà μ_3 si comporrà pertanto di ∞^1 coni Γ^n aventi i vertici su di una retta e contenuti in spazi S_{n+1} passanti per questa retta.* Di questo caso ci occuperemo al nº seg.

2º Lo spazio S_h non contiene la linea γ luogo dei vertici dei coni Γ^n. In tal caso ogni sottogruppo ∞^1 parabolico di un gruppo G′ lascerà fisso (se $h>0$) ogni punto di questo spazio (perchè, essendo fisse tutte le generatrici di un cono Γ^n, devono risultar fissi tutti i punti di ogni spazio invariante contenuto nell'S_{n+1} di questo cono e non passante pel vertice di esso). Di qui si trae che G′ non potrà più operare in modo ∞^3 sul sistema dei punti di detto S_h, e dovrà perciò lasciar fisso anch'esso ciascuno di questi punti. Saranno allora invarianti rispetto a G' anche un S_{r-h-1} non incontrante quell'S_h e contenente la linea γ, nonchè tutti gli S_{r-h} che da esso proiettano i singoli punti dell'S_h medesimo (1). Il gruppo G' risulterebbe perciò intransitivo rispetto a μ_3, e vi ammetterebbe tutto un fascio di rigate invarianti, appartenenti alla congruenza delle a, e contenute in spazi S_{r-h} per l'S_{r-h-1} considerato. E ciò è incompatibile coll'ipotesi fatta che G' operi sulla congruenza delle a come un gruppo proiettivo semplice ∞^3 sopra un cono (poichè un tal gruppo deve essere transitivo rispetto al cono stesso).

Rimane soltanto a esaminare il caso $h=0$; il caso cioè in cui gli spazi S_{n+1} dei coni Γ^n abbiano un solo punto P a comune (il quale non sia vertice di tutti questi coni). Questo caso si riduce ai precedenti mostrando come il punto P debba certo appartenere a ciascuno dei coni Γ^n. E infatti, se così avviene, la varietà μ_3 si proietterà univocamente da questo punto in una varietà analoga μ'_3, nella quale i coni Γ^n saranno sostituiti da coni, pure razionali normali, di ordine $n-1$; e al gruppo G verrà a sostituirsi un gruppo anche proiettivo sulla nuova varietà, sulla quale si potrà pertanto ragionare come su μ_3 (e il procedimento ha in ogni caso termine).

Gli spazi S_{n+1} dei coni Γ^n, formando (per ipotesi) una M_{n+2} normale, e non contenendo tutti la curva γ luogo dei vertici dei coni medesimi, dovranno incontrare lo spazio Σ_i di questa curva secondo spazi minori formanti una varietà anche normale e invariante rispetto a G; e perciò, necessariamente, nei punti stessi di γ (soltanto). Le ∞^2 rette a della varietà μ_3 verranno perciò proiettate *univocamente* da Σ_i secondo spazi S_{i+1}, i quali potranno considerarsi come elementi di una superficie φ, appartenente allo spazio lineare costituito da tutti gli S_{i+1} passanti per Σ_i; e dimostrare che il punto P appartiene alla varietà μ_3 equivarrà a dimostrare che lo spazio $\Sigma_i P$ è un elemento di questa superficie (φ). Ora, sopra questa superficie ogni gruppo G' opererà (come sulla congruenza delle a, ossia) come un gruppo proiettivo semplice ∞^3 sopra un cono Λ^p; e di qui si può appunto dedurre che l'elemento (fisso) $\Sigma_i P$ deve appartenere alla superficie φ. Noi lo dedurremo dalla determinazione di tutte le superficie che ammettono un gruppo siffatto (semplice, ∞^3) di trasformazioni proiettive; determinazione della quale dovremo occuparci al n° seg. (cfr. in particolare la nota alla fine del n° stesso). A parte questo, non ci resterà da esaminare che il caso 1° di questo n°.

23. — Supponiamo dunque che la varietà μ_3 contenga un fascio di coni Γ^n coi vertici sopra una retta b e gli spazi S_{n+1} passanti tutti per questa retta, e ricordiamo altresì che la varietà deve ammettere un gruppo continuo G di trasformazioni proiettive, operante sulla congruenza delle rette a (generatrici dei coni Γ^n) come un gruppo proiettivo non integrabile sopra un cono razionale normale Λ^p ($p \geq 1$).

Per trarre da quest'ultimo fatto le opportune conseguenze relative alla varietà μ_3, conviene fissare per ora l'attenzione, anzichè sulla congruenza stessa delle a, sulla

(1) Cfr. la mia Mem. cit.: *Sulle varietà algebriche ecc.*, § 2.

varietà ∞^2 dei piani che proiettano (univocamente) queste rette dalla b; varietà che può considerarsi come una superficie Φ dello spazio Σ_{r-2} costituito dai piani dello spazio complessivo S_r che passano per b stessa [1]. Questa *superficie* risulterà così riferita al cono Λ^p in modo che alle trasformazioni su di essa determinate da G corrisponderanno trasformazioni proiettive di questo cono; e le generatrici di Λ^p saranno immagini di curve γ^{n-1} sopra Φ (costituite dai sistemi ∞^1 di piani che proiettano da b le generatrici dei singoli coni Γ^n).

Immaginiamo rappresentato il cono Λ^p sopra un piano mediante il sistema lineare delle curve di ordine p aventi a comune un punto $(p-1)^{\text{plo}}$M e $p-1$ punti semplici N_i infinitamente vicini ad M (ossia le $p-1$ tangenti in M stesso). Alle sezioni iperpiane della superficie Φ — già riferita a Λ^p — corrisponderanno su questo piano delle curve φ incontranti i raggi del fascio M in $n-1$ punti variabili, e aventi in particolare la multiplicità $n-1$ in ciascuno dei punti N_i (che sono immagini di altrettante generatrici del cono Λ^p). Ne segue che la multiplicità del punto M per le φ sarà di ordine $\geq (n-1)(p-1)$, e si potrà perciò porre $=(n-1)(p-1)+l$, essendo allora $(n-1)p+l$ l'ordine delle φ medesime, e $l(\geq 0)$ l'ordine della curva di Φ che corrisponde al punto M del piano rappresentativo, ossia al vertice del cono Λ^p. Infine questo sistema lineare di curve φ deve essere completo — determinato cioè dai soli punti basi — perchè la superficie Φ risulta normale se è tale la varietà μ_3; e non può nemmeno avere altri punti basi (all'infuori dei punti M e N_i), perchè è invariante rispetto a un gruppo di Jonquières non integrabile, le cui trasformazioni non ammettono altri punti fissi (o fondamentali). Esso dovrà quindi comporsi di *tutte* le curve soddisfacenti alle condizioni accennate (aventi cioè le accennate multiplicità nei punti M e N_i). Si può dunque facilmente calcolarne la dimensione, che si trova $=p\binom{n}{2}+n(l+1)-1$. Tale sarà perciò la dimensione dello spazio cui appartiene la superficie Φ, e la dimensione dello spazio S_r della varietà μ_3 sarà del tipo $r=p\binom{n}{2}+n(l+1)+1$.

Ogni gruppo proiettivo semplice ∞^3 trasformante in sè la superficie Φ opererà in modo anche ∞^3 sul fascio delle curve γ contenute in Φ, e lascerà fisse sopra Φ stessa due diverse curve unisecanti le γ, e precisamente la curva di ordine l corrispondente al vertice del cono Λ^p e una curva corrispondente a una sezione iperpiana (irriducibile) di questo cono, il cui ordine risulta $=(n-1)p+l$. E poichè da quest'ultima curva la superficie Φ si proietta in una superficie dello stesso tipo, per la quale soltanto il numero n risulta diminuito di un'unità (sostituito cioè da $n-1$), così, ricordando anche le proprietà dei gruppi proiettivi semplici ∞^3 di uno spazio qualunque, si conclude facilmente che, nello spazio della superficie Φ (ma fuori di questa), saranno pure invarianti rispetto al gruppo ∞^3 considerato altre $n-2$ curve aventi ordini del tipo $ip+l$ per $1\leq i\leq n-2$. Su ciascuna di queste curve il gruppo stesso opererà in modo anche ∞^3; esse dovranno appartenere a spazi tutti indipendenti, e lo spazio cui appartiene Φ sarà il minimo spazio contenente questi ultimi

[1] La retta b, comune agli spazi S_{n+1} dei coni Γ^n, deve essere altresì generatrice comune di tutti questi coni, perchè se no (come facilmente si vede) la varietà ∞^2 di piani considerata (ossia la superficie Φ) non sarebbe normale, mentre invece deve esserlo se è tale la varietà μ_3.

e quelli delle due curve fisse sopra Φ medesima, come è anche confermato dal fatto che la somma delle dimensioni di questi spazi aumentate di un'unità eguaglia la dimensione $(r-2)$ dello spazio di Φ, aumentata anche di un'unità:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(ip+l+1)=\binom{n}{2}p+n(l+1)\ (^1).$$

24. — Nello spazio $S_r\equiv\left[\binom{n}{2}p+n(l+1)+1\right]$ della varietà μ_3 saranno perciò invarianti, rispetto a ogni sottogruppo semplice ∞^3 (G') contenuto in G, altrettanti coni di seconda specie di ordini $ip+l$ aventi la retta b per asse, e quindi anche altrettante curve di questi stessi ordini, poste in spazi non incontranti la retta b e non incontrantisi nemmeno fra loro. (Anche questo segue dalle note proprietà dei gruppi proiettivi semplici ∞^3).

Ora il fatto che la varietà μ_3 deve contenere un fascio di coni Γ^n razionali normali (mentre finora questi avrebbero potuto essere coni anche non normali, purchè contenuti in coni razionali normali di 2ª specie di ordine $n-1$, aventi la retta b per asse) ci permette di concludere che il numero l (finora indeterminato) deve essere precisamente $=p-1$.

Ponendo per brevità $ip+l=k_i$ il gruppo G' potrà infatti rappresentarsi con equazioni del tipo (§ 3 della mia Mem. cit.):

$$\bar{x}_0=\alpha x_0+\beta x_1 \qquad \bar{x}_1=\gamma x_0+\delta x_1$$
$$\bar{y}_0^{(i)}=\alpha^{k_i}y_0^{(i)}+k_i\alpha^{k_i-1}\beta y_1^{(i)}+\dots\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

essendo $i=0, 1, \dots n-1$; i parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ legati dalla relazione $\alpha\delta-\beta\gamma=1$; e la retta b il luogo dei punti per cui sono nulle tutte le coordinate y. Ponendo in queste equazioni $\gamma=0$ $\left(\text{quindi } \delta=\frac{1}{\alpha}\right)$ si stacca da G' un sottogruppo ∞^2 (G'') rispetto al quale è invariante quel cono Γ^n il cui vertice B ha nulla anche la coordinata x_1 (e perciò soltanto $x_0\neq 0$). Lo spazio S_{n+1} di questo cono sarà quello rappresentato dall'annullarsi di tutte le coordinate y meno le $y_0^{(i)}$. Perciò il sottogruppo (∞^1) subordinato da G'' nella forma ∞^n delle rette uscenti da B entro questo S_{n+1} sarà rappresentato dalle equazioni:

$$\bar{x}_1=\frac{1}{\alpha}x_1; \qquad \bar{y}_0^{(i)}=\alpha^{k_i}y_0^{(i)}\equiv\alpha^{ip+l}y_0^{(i)}$$

dove ancora $i=0, 1, \dots n-1$. Ora, perchè questo gruppo trasformi in sè uno, e quindi anche infiniti coni razionali normali di ordine n uscenti da B, è necessario (e sufficiente) che gli esponenti del parametro α:

$$-1 \qquad l \qquad p+l \qquad 2p+l\ .\ .\ .\ (n-1)p+l$$

(1) Essendo $p>0$, il solo di questi spazi minori fissi che possa ridursi a un punto è quello che corrisponde al valore $i=0$; quello cioè che incontra Φ secondo la curva fissa di ordine l. Perchè esso si riduca effettivamente a un punto, occorre altresì che sia $l=0$; e questo punto sta allora sopra Φ. Risulta così dimostrato quanto avevamo asserito alla fine del nº prec.

siano in progressione aritmetica [1], il che richiede precisamente $l+1=p$, ossia $l=p-1$, c. s. v. d.

Di qui risulta pure confermato (cfr. la prima nota al n° 23) che i coni Γ^n conterranno tutti la retta b come generatrice, e sarà $l=p-1$ l'ordine del cono di 2ª specie formato dai piani tangenti ad essi lungo b stessa. E *lo spazio cui appartiene la varietà* μ_3 *sarà di dimensione* $r=\binom{n+1}{2}p+1$.

25. — Ci rimane ora a determinare l'ordine della varietà μ_3, e la dimensione del massimo gruppo G di trasformazioni proiettive su di essa (o almeno del massimo gruppo proiettivo trasformante in sè la congruenza delle a).

Quanto all'ordine di μ_3, possiamo considerare lo spazio di dimensione $p\binom{n}{2}+1$ contenente gli S_n osculatori a tutti i coni Γ^n lungo b, e osservare che la sezione determinata in μ_3 da un iperpiano qualunque passante per questo spazio deve comporsi (soltanto) di un certo numero di coni Γ^n. Questo numero non è altro che quello da noi già indicato con k_{n-1}, e perciò $=(n-1)p+l=np-1$. *La varietà* μ_3 *sarà perciò di ordine* $n(np-1)$.

Quanto alla dimensione del massimo gruppo G, osserviamo anzitutto che sulla congruenza delle a questo gruppo dovrà operare come il massimo gruppo proiettivo sul cono Λ^p, e quindi in modo ∞^{p+5}.

Rimane ora a vedere quante trasformazioni proiettive sopra μ_3 possano avere le a come traiettorie. Queste trasformazioni si ripartiranno in gruppi ∞^1 di omografie rigate paraboliche, ciascuno dei quali, avendo le traiettorie appoggiate alla retta b, dovrà lasciar fissi tutti gli iperpiani passanti per b stessa, e quindi anche tutti i punti di uno spazio S_{r-2} passante pure per b. Questo S_{r-2} dovrà incontrare gli S_{n+1} dei coni Γ^n secondo spazi S_n (in modo che detti S_{n+1} ne vengano proiettati univocamente secondo iperpiani di un fascio); esso starà perciò in un iperpiano (S_{r-1}) collo spazio S_{n+1} di un qualunque cono Γ^n. Inversamente, ogni iperpiano passante per un tale S_{n+1} segherà ulteriormente la M_{n+2} luogo degli stessi S_{n+1} secondo una varietà appartenente a uno spazio S_{r-2}, il quale sarà luogo di punti uniti per un gruppo ∞^1 di collineazioni assiali paraboliche, aventi le rette a per traiettorie, e trasformanti μ_3 in sè stessa. Il numero di tali S_{r-2} è perciò infinito di dimensione:

$$(r-1)-(n+1)=\binom{n+1}{2}p-n-1.$$

Sarà dunque questa, aumentata di un'unità, la dimensione del gruppo delle omografie rigate sulla varietà μ_3, e perciò *il gruppo di tutte le trasformazioni proiettive della varietà* μ_3 *in sè stessa sarà di dimensione* $\binom{n+1}{2}p-n+p+5$.

Un caso particolare molto semplice si ha per $n=2$, $p=1$. La varietà μ_3 è allora una quadrica non degenere di S_4, sulla quale si considera (soltanto) il gruppo ∞^7

---

[1] Se no ad es. i coni invarianti entro lo spazio a tre dimensioni $y_0^{(2)}=y_0^{(3)}=\ldots=y_0^{(n-1)}=0$ — le cui equazioni sarebbero $y_0^{(0)\,l+p+1}=Cx_1^p y_0^{(1)\,l+1}$ — non potrebbero essere (come qui occorre) coni quadrici. Per $l=p-1$ queste equazioni rappresentano invece gruppi di p coni quadrici.

delle trasformazioni proiettive che lasciano fissa una data retta (e che è appunto il massimo gruppo il quale trasformi in sè la congruenza delle rette della quadrica che si appoggiano a questa retta fissa).

26. — Si tratta ora di rappresentare sullo spazio S_3 la varietà μ_3 e il gruppo complessivo G delle trasformazioni proiettive su di essa.

In particolare, possiamo proporci di stabilire una rappresentazione tale che alle rette a corrispondano raggi di una stella, e alle rigate sezioni di μ_3 con iperpiani passanti per b corrispondano coni di questa stella formanti un sistema lineare identico a quello delle curve φ (di ordine $(n-1)p+l=np-1$), considerato al n° 23. — E poichè la rappresentazione piana della superficie Φ mediante il sistema delle φ poteva ottenersi con un'opportuna proiezione di questa superficie, così potremo ora rappresentare la varietà μ_3 nel modo richiesto, proiettandola da uno spazio Σ_{r-4} contenuto in un opportuno S_{r-3} passante per la retta b (e incontrante perciò esso stesso la b in un punto B). Questo S_{r-3} dovrà incontrare μ_3 secondo una rigata R, avente a comune con ogni cono Γ^n (all'infuori di b) $n-2$ generatrici, e avente perciò b stessa come direttrice $(n-2)^{\text{pla}}$, nonchè come generatrice multipla di ordine $l=p-1$. L'ordine di questa rigata si può facilmente calcolare, e si trova essere $=n(np-1)-np$; come pure si trova che lo stesso spazio S_{r-3} dovrà ancora incontrare μ_3 secondo altre $p-1$ rette (a) isolate. Tutto ciò si deduce facilmente, dalla rappresentazione piana della congruenza delle a mediante il sistema lineare delle curve φ, e dal fatto che all' intersezione di μ_3 col detto S_{r-3} deve corrispondere una curva residua di una retta generica rispetto al sistema delle stesse φ (curva che contiene necessariamente le $p-1$ rette fondamentali MN_i).

Lo spazio Σ_{r-4} (generico entro l'S_{r-3} considerato) incontrerà perciò μ_3 secondo una curva σ di ordine $n(np-1)-np$, più altri $p-1$ punti $C_1\, C_2 \dots C_{p-1}$ fuori di questa curva. Con ogni cono Γ^n esso avrà comuni $n-1$ punti posti sopra σ, uno dei quali sarà sempre l'intersezione (unica) B di σ con b. Però ciascuno dei $p-1$ coni passanti rispett. per i punti C_i $(i=1,2\dots p-1)$ sarà incontrato da Σ_{r-4} in n punti (lo stesso C_i, e altri $n-1$ sopra σ).

La proiezione di μ_3 da un tale spazio Σ_{r-4} è univoca perchè ogni S_{r-2} condotto per questo spazio e per la retta b incontra ulteriormente μ_3 stessa secondo *una* retta a. Le rette a si proietteranno in raggi di una stella A; i coni Γ^n secondo piani α di un certo fascio (di asse a_0) entro questa stella.

Le sezioni iperpiane di μ_3 si proietteranno secondo superficie F di ordine

$$n(np-1)-[n(np-1)-np]=np$$

aventi a comune con ogni raggio della stella A un solo punto variabile, e incontranti i piani α secondo curve variabili di ordine n: tali superficie avranno perciò il punto A come multiplo di ordine $np-1$, e la retta a_0 come multipla di ordine $np-n=n(p-1)$.

I $p-1$ coni Γ^n passanti rispett. per i punti C_i si proietteranno secondo altrettante rette c_i (della stella A) infinitamente vicine alle a_0, le quali saranno multiple di ordine n per tutte le superficie F. E le generatrici di quel cono Γ^n che ha il vertice in B (intersezione di Σ_{r-4} con b) si proietteranno rispett. nei punti di una curva γ di ordine n, contenuta in un piano del fascio a_0, per la quale dovranno anche passare tutte le F.

Alla rigata R sopra μ corrisponderà nella stella A un cono di ordine $np-p-1$, avente la retta a_0 come generatrice $(n-1)(p-1)^{\text{pla}}$ e ciascuna delle c_i come generatrice $(n-2)^{\text{pla}}$, il quale sarà tangente nel punto A a tutte le F. A questo cono si aggiungeranno, come piani tangenti in A alle F, i $p-1$ piani fissi che congiungono a_0 alle rette c_i ad essa infinitamente vicine; e, infine, un piano α variabile (corrispondente a quel cono Γ^n, pel cui vertice passa la sezione di μ_3 che si proietta nella F considerata). — Il cono tangente complessivo in A (di ordine $np-1$) ha dunque la generatrice a_0 come multipla di ordine $n(p-1)+1$, e incontra perciò ogni piano α secondo $n-2$ rette, in generale distinte da a_0, le quali insieme ad a_0 stessa (contata una sol volta) sono le tangenti comuni in A alle curve di ordine n segate dalle F su quel piano.

Con due sole condizioni (ad es. imponendo come tangenti in A due diversi raggi non contenuti in uno stesso piano α) si viene a staccare dal sistema delle F un sistema lineare di coni, i quali, prescindendo dal piano della curva γ che ne risulta parte fissa, si riducono all' ordine $np-1$ ed hanno la multiplicità $np-n$ lungo a_0 e $n-1$ lungo le c_i. Questo sistema lineare di coni è appunto identico a quello delle curve φ considerate al n° 23.

Si può anche dimostrare che le condizioni enunciate individuano completamente il sistema lineare rappresentante la varietà μ_3.

Troviamo perciò come nuovo gruppo tipico completo (corrispondente al 2° caso del n° 18) *il gruppo delle trasformazioni cremoniane di un certo ordine np, dipendenti da* $p\binom{n+1}{2}-n+p+5$ *parametri, le quali mutano in sè stesso il sistema lineare di dimensione* $p\binom{n+1}{2}+1$ *delle superficie di ordine np che hanno a comune:*

1° *Un punto* $(np-1)^{plo}$ (A);

2° *Una retta multipla di ordine* $np-n$ *passante per questo punto* (a_0);

3° $p-1$ *rette* n^{ple} *passanti per lo stesso punto e infinitamente vicine alla precedente;*

4° *Un cono tangente fisso in* A *di ordine* $np-p-1$, *al quale vanno aggiunti* $p-1$ *piani fissi e un piano variabile passanti per* a_0 (i piani fissi essendo quelli che contengono rispett. le $p-1$ *rette* n^{ple});

5° *Una curva di ordine n contenuta in un piano per* a_0.

Queste trasformazioni lasciano pure invariato nella stella A il sistema lineare ∞^{p+1} dei coni V^p (di ordine p) aventi a_0 come generatrice $(p-1)^{\text{pla}}$ e passanti ancora per le $p-1$ rette c_i infinitamente vicine ad a_0.

Una volta noto questo sistema lineare invariante (Σ) di superficie di ordine np, è facile costruire l'operazione più generale del gruppo totale di cui trattasi, e quindi il gruppo stesso.

Osserviamo perciò che, imponendo come piano tangente ulteriore alle F un determinato piano α (generico), noi veniamo a staccare dal sistema Σ (∞^r) un sistema lineare Σ' di dimensione $r-1$, contenente ancora tutti gli ∞^{r-2} coni di Σ stesso, e invariante per un sottogruppo integrabile del gruppo totale, contenente un solo parametro di meno di quest'ultimo. Questo sottogruppo si può costruire colla regola generale data al n° 9 per i gruppi integrabili tipici, avvertendo tuttavia: 1° che nella stella A esso subordina soltanto le ∞^{p+4} trasformazioni che, oltre al sistema lineare dei coni V^p, lasciano fisso il piano α considerato; 2° che le superficie luoghi di punti uniti per quelle operazioni di questo sottogruppo che lasciano fisso ogni raggio della stella A non sono tutte quelle del sistema Σ, ma soltanto quelle fra esse che contengono come parte un piano α generico, ad es. il piano considerato — per il che occorrono $n+2$ ulteriori condizioni —.

Questo è confermato dal fatto che la dimensione del nominato gruppo integrabile risulta

$$=(p+4)+\left[p\binom{n+1}{2}-n-1\right]+1=p\binom{n+1}{2}-n+p+4.$$

Costruendo gli ∞^1 sottogruppi integrabili di questo tipo (trasformanti in sè i singoli piani α) si ha dal loro insieme il gruppo totale di cui trattasi.

Il gruppo complessivo G subordina nella stella di rette A un gruppo di Jonquières di ordine p, e in ogni piano α un gruppo di Jonquières di ordine n. Il primo può assegnarsi completamente ad arbitrio; quanto al secondo, rimangono ancora disponibili, per un certo numero di piani α, dei parametri in numero decrescente da $n-2$ a zero.

Per trovare infine l'equazione del sistema lineare Σ, assumiamo il punto A come punto $x_1=x_2=x_3=0$, la retta a come retta $x_1=x_2=0$, il piano della curva γ come piano $x_1=0$; sia inoltre $f(x_1, x_2)=0$ l'equazione complessiva (di grado $p-1$) del sistema dei piani ac_i. Il sistema lineare dei coni V^p sarà allora rappresentato dall'equazione:

$$x_3 f(x_1 x_2)+F_p(x_1 x_2)=0$$

nella quale si suppongono variabili i $p+1$ coefficienti di F_p. Formando di questo sistema lineare la potenza $(n-1)^{\text{sima}}$, e sommandovi il sistema di tutti i gruppi di $l=p-1$ piani del fascio a_0, abbiamo l'equazione generale:

$$(x_3 f)^{n-1}\varphi_{p-1}+(x_3 f)^{n-2}\varphi_{2p-1}+\dots+\varphi_{np-1}=0$$

la quale al variare di tutti i coefficienti delle forme φ (di gradi eguali ai rispettivi indici, e contenenti le sole x_1, x_2) rappresenterà il sistema lineare di tutti i coni (di ordine $np-1$) contenuti in Σ. L'equazione generale del sistema Σ sarà pertanto del tipo:

$$x_1\sum_{i=1}^{n}\left[x_3 . f(x_1 x_2)\right]^{n-i}\varphi_{ip-1}(x_1 x_2)]=x_4(\alpha x_1+x_2) . f(x_1 x_2) . \Phi_{np-p-1}(x_1 x_2 x_3)+\Psi_{np}(x_1 x_2 x_3)$$

essendo α un nuovo parametro, $\Phi=0$ l'equazione del cono tangente comune alle F in A (astraendo dai piani ac_i), e Ψ una forma di grado np a coefficienti costanti, tale che sia $x_4 x_2 f\Phi+\psi=0$ una superficie arbitraria del sistema Σ, tangente in A al piano $x_2=0$ (che è un piano generico del fascio a_0). D'altra parte l'equazione $\Psi=0$

dovrà rappresentare un cono di vertice A e avente anche la retta a_0 come $(np-n)^{\text{pla}}$ e le c_i come n^{ple} (ma non passante per Υ); dal che si trae che sarà:

$$\Psi \equiv (x_3 f)^n + (x_3 f)^{n-1}\psi_p + \ldots + \psi_{np}$$

dove le ψ_{ip} contengono le sole x_1, x_2, e possono ridursi alle sole potenze $x_2{}^{ip}$, inglobando gli altri termini nei prodotti $x_1\,\varphi_{ip-1}$ al primo membro. L' equazione del sistema Σ potrà pertanto scriversi sotto la forma seguente:

$$x_1 \sum_{i=1}^{n} [x_3 f(x_1 x_2)]^{n-i}\,\varphi_{ip-1}(x_1 x_2)] = x_4[\alpha x_1 + x_2]\, f(x_1 x_2)\,\Phi\,(x_1 x_2 x_3) + \sum_{j=0}^{n} a_j\,[x_3 f(x_1 x_2)]^{n-j} x_2^{jp} \quad (1)$$

dove le a_j si suppongono costanti, e i parametri (non omogenei) sono dati da α e dai coefficienti delle φ_{ip-1} in numero totale di $1+p\binom{n+1}{2}$.

Per semplificare quest' equazione, possiamo far coincidere fra loro i $p-1$ piani tangenti lungo a_0 ai coni V^p; di modo che, assunto quest' unico piano come piano $x_2=0$, sarà $f \equiv x_2{}^{p-1}$. Allora potremo anche far coincidere il cono $\Phi = 0$ (di ordine $np-p-1$) con questo stesso piano, contato un numero opportuno di volte (onde $\Phi \equiv x_2{}^{np-p-1}$), bastando perciò scegliere in modo conveniente lo spazio Σ_{r-4} da cui deve proiettarsi la varietà μ_3 (¹). — Passando pertanto a coordinate non omogenee $x = \frac{x_1}{x_2}$, $y = \frac{x_3}{x_2}$, $z = \frac{x_4}{x_2}$, il sistema lineare Σ risulterà rappresentato dall'equazione:

$$x\,\{ y^{n-1}\varphi_{p-1} + y^{n-2}\varphi_{2p-1} + \ldots + \varphi_{np-1} \} = (\alpha x + 1) z + a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n \quad (1')$$

dove le φ sono polinomi in x, di gradi eguali ai rispettivi indici.

Per trovare le equazioni del gruppo complessivo G, ci converrà considerare separatamente diverse schiere di trasformazioni in esso contenute, e scrivere le equazioni di queste, moltiplicando infine tali schiere l'una per l'altra.

Anzitutto, le trasformazioni — dipendenti da $p\binom{n+1}{2} - n$ parametri — rispetto alle quali sono invarianti tutti i raggi della stella A — ossia le rette $x =$ cost. $y =$ cost. —, si rappresentano ponendo:

$$x' = x; \qquad y' = y; \qquad z' = z + x\,\{ y^{n-1}\xi_{p-2} + y^{n-2}\xi_{2p-2} + \ldots + \xi_{np-2} \}$$

dove le ξ sono ancora polinomi arbitrari nella sola x, di gradi eguali ai rispettivi indici: ciò segue immediatamente dal fatto che il luogo dei punti uniti di una tale trasformazione, insieme a un piano qualunque del fascio $x =$ cost., deve sempre formare una superficie (e precisamente un cono) del sistema Σ.

(¹) Ricordiamo che questo spazio doveva essere proiettato dalla retta b (ad essa incidente) secondo un S_{r-3} incontrante μ_3 in una rigata di ordine $n(np-1) - np = n(np-p-1)$, più altre $p-1$ rette: quella rigata deve ora ridursi a un unico cono Γ^n contato $np-p-1$ volta, e queste $p-1$ rette devono coincidere con una medesima generatrice (distinta da b) dello stesso cono Γ^n.

Queste trasformazioni devono poi moltiplicarsi per altre ∞^{p+5}, le quali nella stella di rette $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$ devono subordinare il gruppo (pure ∞^{p+5}):

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}\,; \qquad y' = \frac{y+\eta_p(x)}{(cx+d)^p}$$

dove η_p è simbolo di polinomio affatto arbitrario di grado p (in x). Quest' ultimo gruppo può considerarsi come risultante dalla moltiplicazione delle tre schiere:

I	$x' = ax$	$y' = y + x \,.\, \eta_{p-1}(x)$
II	$x' = \dfrac{x}{cx+d}$	$y' = \dfrac{y+k}{(cx+d)_p}$
III	$x' = x + b$	$y' = y.$

Corrispondentemente alle equazioni I, il sistema (1′) rimane invariato col porre semplicemente $z' = z$.

Le equazioni II lasciano invariato lo stesso sistema quando ad esse si aggiunga l'altra:

$$z' = \frac{1^{\cdot}}{d\,(cx+d)^{np-1}}\left\{z + a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n - [a_0(y+k)^n + a_1 d^p (y+k)^{n-1} + \ldots + a_n d^{np}]\right\}.$$

E queste sono tutte trasformazioni che lasciano fisso il piano $x = 0$. Invece le operazioni a cui conducono le equazioni III mutano questo piano nel piano $x+b=0$, in modo precisamente che i punti della curva γ^n, contenuta nel piano $x = 0$, hanno per corrispondenti i raggi $y = \text{cost.}$ del piano $x + b = 0$, e corrispondono a lor volta ai raggi $y = \text{cost.}$ del piano $x - b = 0$. Supposto perciò di voler far corrispondere a sè stessa (il che è certo possibile) la superficie $z + a_0 y^n + \ldots + a_n = 0$, dovremo scrivere che al sistema formato (in coordinate con apici) dalla superficie $z' + a_0 y'^n + \ldots = 0$ e dal piano $x' - b = 0$ (ossia $x = 0$) corrisponde il sistema formato dalla superficie $z + a_0 y^n + \ldots = 0$ e dal piano $x + b = 0$. Dovremo cioè porre:

$$z' + a_0 y'^n + \ldots + a_n = \text{cost.}\,\frac{x+b}{x}\,(z + a_0 y^n + \ldots + a_n)$$

e si trova allora che il sistema lineare (1′) risulta invariante (per $x' = x + b$, $y' = y$) quando quest'ultima costante sia $= 1$, e perciò si ponga:

$$z' = \frac{x+b}{x}\,z + \frac{b}{x}\,(a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n).$$

Componendo infine queste diverse schiere, dipendenti rispett. da $p\binom{n+1}{2} - n$, $p + 1$, 3, e 1 parametro (in tutto dunque appunto $p\binom{n+1}{2} - n + p + 5$), si hanno le equazioni complessive del gruppo sotto la forma:

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad\qquad y' = \frac{y+k+x\,.\,\eta_{p-1}(x)}{(cx+d)^p}$$

$$z' = \frac{1}{(cx+d)^{np-1}} \left[\frac{ax+b}{(ad-bc)x} \left\{ \begin{array}{l} z + x[y^{n-1}\xi_{p-2} + y^{n-2}\xi_{2p-2} + \ldots + \xi_{np-2}] \\ + [a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n] - [a_0(y+k)^n + a_1 d^p (y+k)^{n-1} + \ldots + a_n d^{np}] \\ + \dfrac{d}{cx+d}[a_0(y+k+x.\eta_{p-1})^n + a_1(y+k+x.\eta_{p-1})^{n-1}(cx+d)^p + \ldots + a_n(cx+d)^{np}] \end{array} \right\} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{cx+d}[a_0(y+k+x.\eta_{p-1})^n + a_1(y+k+x.\eta_{p-1})^{n-1}(cx+d)^p + \ldots + a_n(cx+d)^{np}] \right]$$

l'ultima delle quali può anche scriversi così:

$$z' = \frac{1}{(cx+d)^{np-1}} \left[\frac{ax+b}{(ad-bc)x} \left\{ \begin{array}{l} z + x[y^{n-1}\xi_{p-2} + y^{n-2}\xi_{2p-2} + \ldots + \xi_{np-2}] \\ + [a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n] - [a_0(y+k)^n + a_1 d^p (y+k)^{n-1} + \ldots + a_n d^{np}] \end{array} \right\} \right.$$
$$\left. + \frac{b}{(ad-bc)x}[a_0(y+k+x\,.\,\eta_{p-1})^n + a_1(y+k+x\,.\,\eta_{p-1})^{n-1}(cx+d)^p + \ldots + a_n(cx+d)^{np}] \right]$$

CAPITOLO VII.

Gruppi con una stella invariante di rette, entro la quale viene subordinato un gruppo primitivo.

27. — Dobbiamo ora occuparci dei gruppi cremoniani che trasformano in sè una stella di rette, e subordinano in questa stella o un gruppo primitivo — che può supporsi proiettivo (∞^5, ∞^6, ∞^8) — oppure il gruppo proiettivo ∞^3 con un cono quadrico fisso. Cominciamo dal primo di questi due casi; dell'altro ci occuperemo al successivo Cap. VIII.

Indichiamo con A il vertice della stella invariante, con a e α rispettivamente un raggio e un piano generico di questa stella, e con G un gruppo cremoniano qualunque, il quale subordini nella stella A un gruppo proiettivo primitivo.

Costruiamo (come già al n° 8) un sistema lineare Σ di superficie unisecanti i raggi a (quindi di un certo ordine n, colla multiplicità $n-1$ nel punto A) il quale sia invariante rispetto a G; e da questo sistema stacchiamo quante più volte è possibile un piano α generico. Avremo nuovi sistemi lineari (residui) invarianti di dimensioni decrescenti. Ci arresteremo giungendo a un sistema Σ_1 (certo esistente) di dimensione >0, il quale:

a) non contenga più la stella dei piani α (non contenga cioè nessuna superficie contenente a sua volta [o coincidente con] un piano α generico); — oppure:

b) sia tale che il sistema residuo di un piano α generico (astrazion fatta da un'eventuale parte fissa) sia un sistema di soli coni (di dimensione ≥ 0).

L'ipotesi *a)* comprende in particolare i casi in cui l'accennata costruzione conduce ad un *fascio* o ad una *rete* (invariante) di superficie unisecanti le a. — Se è invariante un fascio di tali superficie, il gruppo G si potrà ridurre a uno dei gruppi di trasformazioni quadratiche incontrati al n° 4. Si ha invece un tipo nuovo e interessante quando risulti invariante una rete di superficie unisecanti le a.

28. — Supposta invariante rispetto a G una rete di superficie π unisecanti le a, sarà pure invariante la congruenza (del 1° ordine) delle linee p intersezioni variabili di questa superficie; e quindi il sistema ∞^2 dei coni che da A proiettano le linee stesse. E poichè, nella stella A, il gruppo G non trasforma in sè nessun altro sistema ∞^2 di coni all'infuori del sistema dei piani α, così le linee p staranno rispettivamente in questi piani. Infine, poichè con *due* sole condizioni si può imporre come fissa una superficie π, e quindi il sistema ∞^1 dei piani α contenenti le relative curve p, così si conclude che questi ∞^1 piani formeranno sempre un fascio (unico sistema ∞^1 che possa rendersi invariante con due sole condizioni). In altri termini: Le superficie π sono luoghi delle curve p uscenti dai punti di uno stesso raggio a (e contenute perciò nei piani α che passano per questo raggio).

Il gruppo G è in questo caso oloedricamente isomorfo al gruppo (al più ∞^8) da esso subordinato nella stella A: infatti ogni operazione di esso la quale muti in sè ogni raggio a e ogni piano α lascierà pure fissa ogni curva p, e quindi ogni punto dello spazio. Possiamo anzi limitarci al caso in cui G sia un gruppo ∞^8 (isomorfo dunque al gruppo di tutte le omografie piane), perchè negli altri casi, essendo invariante (un piano α, e quindi) un sistema ∞^1 di fasci di piani α, sarebbe pure invariante un sistema ∞^1, e precisamente un fascio di superficie π; e si ricadrebbe quindi in uno dei gruppi quadratici del n° 4.

Possiamo ora procurarci facilmente un gruppo tipico ∞^8 al quale ridurre G.

Per il punto A, centro della stella invariante, facciamo passare una cubica sghemba s. Consideriamo poi la congruenza (del 1° ordine) delle corde c di questa cubica [1], e riferiamola (birazionalmente) alla congruenza delle p, facendo corrispondere fra loro due linee qualunque proiettate da A secondo (ossia contenute in) un medesimo piano α. Questa corrispondenza è a sua volta contenuta in una corrispondenza cremoniana dello spazio (di punti), determinata dall'ulteriore condizione di lasciar fisso ogni raggio a (e di mutare quindi ogni punto dello spazio, come intersezione di una p con un raggio a, nel punto intersezione dello stesso raggio a colla corda c corrispondente a quella p). Quest'ultima corrispondenza trasforma la rete delle superficie π in quella delle quadriche Q passanti per la cubica s, e quindi il gruppo G in un nuovo gruppo G′ che opererà ancora proiettivamente sulla stella A, e trasformerà in sè la congruenza delle rette (corde) c, e la rete di quadriche Q.

Essendo pertanto invarianti rispetto a G la stella dei piani α e la rete delle quadriche Q, sarà pure invariante il sistema lineare (completo) somma di questi due,

---

(1) In luogo di questa congruenza si potrebbe anche considerare una congruenza lineare di rette. Ciò equivarrebbe a far spezzare la cubica s nelle due direttrici di quest'ultima congruenza e nella retta della congruenza stessa che passa per A. Si potrebbe anzi ricorrere, più generalmente, a qualsiasi congruenza del 1° ordine composta di curve contenute rispett. negli ∞^2 piani α e unisecanti i raggi a giacenti rispett. in questi piani.

ossia *il sistema lineare* ∞^7 *delle superficie del* 3° *ordine passanti per la cubica* S *e aventi in* A *un punto doppio.*

Il gruppo stesso si comporrà di trasformazioni cubiche, determinate da sistemi omaloidici di superficie contenute nel sistema anzidetto, e passanti ancora per una seconda cubica sghemba uscente da A.

Il nuovo gruppo tipico che ci si presenta è dunque *il gruppo* ∞^8 *delle trasformazioni cubiche che mutano in sè il sistema lineare* ∞^7 *(di grado 6) delle superficie di* 3° *ordine passanti per una cubica sghemba, e aventi un punto doppio fisso sopra questa curva.*

Per costruire l'operazione più generale di questo gruppo ∞^8 basta assegnare ad arbitrio una collineazione nella stella (invariante) A. Allora ai punti di un raggio qualunque a di questa stella dovranno corrispondere i punti del raggio a' ad esso omologo in quella collineazione; di più, considerate le quadriche (completamente determinate) che passano per la cubica s e rispettivamente per i due raggi a e a', si dovranno sempre corrispondere due punti P e P' di questi raggi, tali che i piani ivi tangenti alle quadriche stesse risultino omologhi nella collineazione assegnata entro la stella A: questi piani tangenti proiettano infatti da A le corde di s passanti rispettivamente per P e P'.

Volendo trovare le equazioni di questo gruppo, possiamo assumere A come punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Abbiamo allora subito le prime tre equazioni:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 \\ x'_2 &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 \\ x'_3 &= a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 \end{aligned} \tag{1}$$

coi nove parametri omogenei a_i, b_i, c_i. La cubica s (passante per A) sia rappresentata dalle equazioni:

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\| = 0$$

e quindi la rete delle quadriche Q dall'equazione:

$$\lambda_1 (x_2 x_4 - x_3^2) + \lambda_2 (x_2 x_3 - x_1 x_4) + \lambda_3 (x_1 x_3 - x_2^2) = 0 \tag{2}$$

la quale, per una data terna di valori delle λ_i, rappresenta precisamente quella quadrica (in generale unica) della rete che contiene il raggio (della stella A);

$$\frac{x_1}{\lambda_1} = \frac{x_2}{\lambda_2} = \frac{x_3}{\lambda_3}$$

ovvero, in coordinate u_i di piani nella stella medesima:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0. \tag{3}$$

Ora il nostro gruppo ∞^8 deve operare sulla rete di quadriche (2) nello stesso modo in cui opera sul sistema lineare (3) — che è il sistema dei raggi della stella A, considerati come inviluppi di piani —. Perciò i binomi $(x_2 x_4 - x_3^2)'$, ... (contenenti le coordinate cogli apici) si esprimeranno mediante gli analoghi $(x_2 x_4 - x_3^2)$, ... — a meno di un eventuale fattore comune — nello stesso modo in cui le u'_i si esprimono mediante le u_i. Limitandoci pertanto a considerare i rapporti dei detti binomi, indicando con A_i, B_i, C_i i subdeterminanti contenuti in $[a_1 b_2 c_3]$, e ponendo per brevità:

$$\Sigma_i = A_i(x_2 x_4 - x_3^2) + B_i(x_2 x_3 - x_1 x_4) + C_i(x_1 x_3 - x_2^2);$$

avremo:

$$\frac{(x_2 x_4 - x^2_3)'}{(x_1 x_3 - x^2_2)'} = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_3}; \qquad \frac{(x_2 x_3 - x_1 x_4)'}{(x_1 x_3 - x^2_2)'} = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_3}$$

e di qui ricaviamo subito per x'_4 due diverse espressioni, le quali coincidono perchè, eguagliate, conducono subito all'identità:

$$x'_1 \Sigma_1 + x'_2 \Sigma_2 + x'_3 \Sigma_3 = 0.$$

Potremo quindi ritenere ad es.:

$$x'_4 = \frac{A_1(x_2 x_4 - x^2_3) + B_1(x_2 x_3 - x_1 x_4) + C_1(x_1 x_3 - x^2_2)}{A_3(x_2 x_4 - x^2_3) + B_3(x_2 x_3 - x_1 x_4) + C_3(x_1 x_3 - x^2_2)} \cdot \frac{x'_1 x'_3 - x'^2_2}{x'_2} + \frac{x'^2_3}{x'_2}$$

dove a x'_1, x'_2, x'_3 si devono intendere sostituiti i valori dati dalle (1). Il sistema delle (1) e di quest'ultima equazione rappresenterà il nostro gruppo ∞^8.

L'equazione del sistema lineare invariante ∞^7 di superficie cubiche (somma del sistema (2) e della stella di piani $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$) è la seguente:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(x_2 x_4 - x_3^2) + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3)(x_2 x_3 - x_1 x_4) +$$
$$+ (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)(x_1 x_3 - x_2^2) = 0$$

dove si è soppresso il termine contenente il prodotto

$$x_3(x_1 x_3 - x_2^2) \equiv - x_1(x_2 x_4 - x_3^2) - x_2(x_2 x_3 - x_1 x_4)$$

Questo sistema lineare rappresenta una varietà M_3^6 dello spazio S_7, a curve sezioni ellittiche (¹), sulla quale alle rette a e c corrispondono ancora rette, formanti due congruenze del 1° ordine (con proprietà identiche); e ai piani α e alle quadriche Q corrispondono rigate cubiche normali (di spazi S_4), aventi rispettivamente per generatrici rette delle due congruenze nominate, e per direttrice sempre una retta dell'altra congruenza. *Questa varietà M_3^6 di S_7 ammetterà pertanto un gruppo ∞^8 di trasformazioni proiettive isomorfo al gruppo totale delle omografie piane.*

È questo il caso più semplice di una varietà a tre dimensioni con un gruppo siffatto di trasformazioni proiettive in sè; tali varietà dovendo contenere (per una proposizione stabilita dal sig. Study (²)) due diverse congruenze di curve (razionali

(¹) Enriques, " Rend. Acc. dei Lincei ", giugno 1894.
(²) Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, p. 786-87.

normali) di ordini m, n, nel qual caso sono esse stesse di ordine $3mn(m+n)$ e appartengono a uno spazio di dimensione $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2)-1$. Nel caso attuale è $m=n=1$.

29. — Ritorniamo al sistema Σ_1 considerato al n° 27, e che ora possiamo supporre non sia un fascio nè una rete, e abbia perciò la dimensione ≥ 3. Questo sistema sarà irriducibile (astrazion fatta da un'eventuale parte fissa); e si può anche assicurarsi facilmente che esso è semplice, mostrando come il gruppo G, il quale opera in modo primitivo sulla stella A, non possa trasformare in sè nessuna involuzione di punti dello spazio S_3, tale che due punti coniugati in essa stiano sempre sopra raggi a distinti. (Così pure si elimina facilmente il dubbio che il sistema Σ_1 — qui almeno ∞^3 — possa appartenere a una congruenza di curve invariante).

Potremo perciò sostituire al gruppo (cremoniano) G un gruppo proiettivo che indicheremo ancora con G) sopra una varietà μ_3 di uno spazio S_r, rappresentabile sopra S_3 in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le superficie del sistema Σ_1. Su questa varietà, alle rette a corrisponderanno ancora rette (che indicheremo pure con a), e ai piani α corrisponderanno certe rigate φ aventi rette a per generatrici. E, corrispondentemente alle ipotesi *a)*, *b)* del n° 27, potremo supporre:

a) che le rigate φ appartengano allo spazio complessivo S_r; — oppure:

b) che lo spazio minore S_h $(h \leq r-1)$ di una φ generica contenga anche una varietà (fissa) unisecante le a, per modo che ogni S_{r-1} passante per un tale S_h incontri ulteriormente μ_3 secondo una rigata di generatrici a.

Osserviamo intanto che nel gruppo G (il quale opera in modo almeno ∞^5 sulla congruenza delle a) vi sono certo infinite trasformazioni che lasciano fissa una rigata φ arbitraria (φ_0) con tutte le sue generatrici a, e quindi anche tutto un fascio di rigate φ (senza tuttavia che in ciascuna di queste siano anche fisse tutte le generatrici). E ogni gruppo ∞^1 di trasformazioni così fatte subordinerà nello spazio cui appartiene la rigata φ_0 un gruppo anche ∞^1 di omografie rigate (o eventualmente di omologie).

Se dunque questo spazio fosse lo stesso S_r, se ne dedurrebbe che, corrispondentemente a ciascuno di quei gruppi ∞^1, esiste un fascio di rigate φ invarianti, ciascuna delle quali contiene infinite rette (traiettorie) distinte dalle generatrici a. Queste rigate sarebbero perciò quadriche, e si avrebbe $r=3$; ma anche questo caso è da escludersi perchè, per un gruppo proiettivo di S_3, le rette a non potrebbero essere che raggi di una stella, e le rigate φ sarebbero allora piani di questa stella (e non apparterrebbero perciò a S_3).

Supponiamo invece che ogni rigata φ appartenga a uno spazio S_h (essendo $h \leq r-1$), il quale incontri ulteriormente μ_3 secondo una varietà (fissa) unisecante le a. Questa varietà potrebbe ridursi a un punto, nel qual caso le φ e μ_3 stessa sarebbero coni; ma non può essere una curva, se no gli ∞^1 coni di rette a uscenti dai singoli punti di questa curva formerebbero un sistema di imprimitività per il gruppo subordinato da G nella congruenza delle a. — Vediamo infine se questa varietà possa essere una superficie (ψ). Allora, per la stessa ragione di poc'anzi, ogni gruppo ∞^1 il quale lasci fisse tutte le generatrici a di una rigata φ dovrebbe far descrivere ai punti di questa superficie (che sta nello spazio S_h di quella rigata) traiettorie rettilinee. La ψ sarebbe dunque una rigata, e anzi in infiniti modi diversi (perchè queste traiettorie varierebbero colla φ); sarebbe dunque un piano (π), e le rette di questo piano sarebbero rispettivamente direttrici delle ∞^2 rigate φ.

In questo piano (unisecante le a) verrà anche subordinato da G un gruppo (proiettivo) primitivo. Se questo gruppo lascia fissa una retta del piano stesso (è dunque ∞^5 o ∞^6), la varietà μ_3 si proietterà univocamente da questa retta in un cono, sul quale a G corrisponderà ancora un gruppo proiettivo.

Resterebbe a vedere cosa avviene quando sul piano π viene subordinato da G l'intero gruppo proiettivo ∞^8: ma questo caso si può facilmente escludere (finchè, ben inteso, il piano stesso sia contenuto nello spazio S_h di ciascuna rigata φ). Infatti in questo caso il gruppo G opererebbe in modo ∞^3 sulla serie delle generatrici di ciascuna rigata φ, e quindi sulla serie dei piani proiettanti queste generatrici dalla direttrice rettilinea (f) contenuta in π. Questa serie di piani può dunque considerarsi come una curva razionale normale nello spazio Σ_{h-2} dei piani passanti per f e contenuti nell' S_h della rigata φ; dal che si trae che un gruppo proiettivo, il quale operi su di essa in modo ∞^3, non può lasciar fisso nessun piano del sistema Σ_{h-2}. Ma uno di questi piani, nelle nostre ipotesi, sarebbe appunto π; siamo dunque caduti in un assurdo, ed è perciò da escludersi che in π venga subordinato l'intero gruppo ∞^8.

30. — L'analisi fatta al n° prec. ci permette di concludere che tutti i gruppi continui di trasformazioni cremoniane i quali lasciano fissa una stella di rette e operano su di essa in modo primitivo, o si riducono a uno dei tipi incontrati ai nⁱ 4 e 28, oppure sono equivalenti a gruppi proiettivi sopra coni (di prima specie, a tre dimensioni). Di più, questi gruppi proiettivi dovranno tutti operare in modo primitivo sui sistemi di ∞^2 generatrici dei coni medesimi. Questi sistemi di generatrici si potranno dunque considerare come superficie — ossia le sezioni iperpiane dei coni stessi saranno superficie — con un gruppo continuo primitivo di trasformazioni proiettive in sè. Si tratterà perciò di coni di ordine n^2, appartenenti a spazi di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, e aventi per sezioni iperpiane delle superficie razionali rappresentanti il sistema lineare di tutte le curve piane algebriche di ordine n (1).

Un tal cono può rappresentarsi birazionalmente sullo spazio S_3, con un'opportuna proiezione, in modo che alle ∞^2 generatrici di esso corrispondano le rette di una stella A, e alle sue sezioni iperpiane il sistema di *tutte* le superficie di ordine n aventi nel punto A la multiplicità $n-1$ e un dato cono tangente (di ordine $n-1$), il quale potrà anche spezzarsi comunque, senza dar luogo con ciò a casi fra loro distinti.

Il gruppo più ampio di trasformazioni proiettive sopra un tal cono Γ^{n^2}, operando in modo ∞^8 sul sistema delle sue generatrici, dipenderà da $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+9$ parametri. Il

(1) Come trovasi dimostrato in una mia Nota, inserta nei " Rend. del Circolo Mat. di Palermo „ (t. XI, 1898).

gruppo ad esso corrispondente in S_3 coincide evidentemente col primo dei tre gruppi tipici da noi incontrati al n° 9.

In particolare, per $n=1$ si ha il gruppo proiettivo ∞^{12} di S_3 con un punto fisso; per $n=2$ si ha uno dei gruppi di trasformazioni quadratiche considerati nella comunicazione del sig. NOETHER. Per n qualunque, le trasformazioni che compongono il gruppo sono state studiate nella Memoria del DE PAOLIS da noi già cit. al n° 6.

Riassumendo pertanto i risultati ottenuti in questo Cap. VII, diremo:

Ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane dello spazio, il quale trasformi in sè una stella di rette e subordini in questa un gruppo primitivo, può ridursi birazionalmente a uno dei seguenti tipi:

1° *Gruppo* ∞^{11} *delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè il sistema lineare* ∞^5 *delle quadriche aventi a comune una retta e un punto fuori di questa retta,* e suoi sottogruppi;

2° *Gruppo* ∞^8 *delle trasformazioni cubiche che mutano in sè il sistema lineare* ∞^8 *delle superficie del 3° ordine passanti per una cubica sghemba e aventi un punto doppio fisso sopra questa cubica;*

3° *Gruppo di dimensione* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+9$ *delle trasformazioni di ordine n che mutano in sè il sistema lineare* $\infty^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ *delle superficie di ordine n aventi un dato punto* $(n-1)^{\text{plo}}$ *e uno stesso cono tangente in questo punto,* e suoi sottogruppi.

Questi sottogruppi s'intendono naturalmente limitati a quelli che operano ancora in modo primitivo sulla stella di rette invariante.

CAPITOLO VIII.

Gruppi con una stella invariante di rette, entro la quale viene subordinato un gruppo proiettivo ∞^3 *trasformante in sè stesso un cono quadrico di raggi della stella.*

31. — I gruppi di quest'ultima categoria si possono supporre transitivi, perchè, in caso contrario, potendosi ridurre a gruppi trasformanti in sè ogni piano di un certo fascio, essi si sarebbero già presentati nei Cap. IV-VI. — Di più, essi possono supporsi non integrabili, e quindi almeno ∞^3. Se sono soltanto ∞^3 (e transitivi), dovranno appartenere al caso *ciclico* (E F, § 21) o al caso *diedrico* (E F, § 23). Del primo caso abbiamo già determinato al n° 20 l'unico gruppo tipico (per un dato ordine); dei gruppi ∞^3 diedrici (che rientrano tutti in quest'ultima categoria) ci occuperemo alla fine del presente capitolo. Escluso questo caso, potremo dunque supporre che si tratti di un gruppo (transitivo) almeno ∞^4, e contenente perciò un sottogruppo invariante almeno ∞^1, il quale lasci fisso ogni raggio della stella invariante.

Costruiamo anche in questo caso un sistema lineare completo, semplice, di superficie unisecanti i raggi della stella invariante, il quale sia trasformato in sè da ogni operazione del gruppo proposto. Questo sistema rappresenterà una varietà normale μ_3 di uno spazio S_r, sulla quale al gruppo proposto corrisponderà un gruppo proiettivo G, e alla stella di rette invariante in S_3 corrisponderà una congruenza di rette a, traiettorie (fisse) per un sottogruppo invariante G' di G (almeno ∞^1).

Se questo gruppo G' subordina sopra ogni retta a tutte le possibili ∞^3 proiettività, se ne deduce (per quanto si è detto al n° 7) che vi sarà un fascio di superficie (razionali) unisecanti le a invariante rispetto a G' stesso, e anche rispetto a G. Il gruppo di cui trattasi sarà perciò equivalente a uno dei gruppi di trasformazioni quadratiche incontrati al n° 4 (e più volte in seguito).

Escluso anche questo caso, il gruppo G' dovrà certo lasciar fissi sopra ogni retta a uno o due punti, luoghi dei quali saranno rispettivamente una o due varietà unisecanti le a (non una varietà unica bisecante le a, essendo queste rette traiettorie di almeno un gruppo ∞^1 (¹)): queste varietà saranno pure invarianti rispetto a G. Esse non saranno tuttavia *curve,* perchè se no le a si ripartirebbero in un fascio invariante di coni, mentre non deve essere invariante alcun fascio (sistema ∞^1 d'indice uno) di rigate appartenenti alla loro congruenza. E se una di quelle varietà si riduce a un punto, la μ_3 viene ad essere un cono: caso già esaminato al n° 9. Potremo dunque supporre che quelle varietà unisecanti le a siano delle *superficie.*

32. — Supponiamo che il gruppo G ammetta due diverse superficie invarianti (φ, φ') unisecanti le a; i punti di queste superficie saranno allora punti uniti fissi per ogni operazione contenuta in G'. Queste stesse superficie dovranno perciò appartenere rispettivamente a due spazi minori indipendenti S_h e S_{r-h-1} entro S_r; e su ciascuna di esse il gruppo totale G subordinerà un gruppo proiettivo equivalente (a quello subordinato nella congruenza delle a, ossia) a un gruppo ∞^3 di omografie piane con una conica fissa. Ora, essendosi supposta normale la varietà μ_3, saranno pure normali le due superficie φ, φ'; è infatti completo il sistema lineare delle rigate intersezioni residue di μ_3 cogli S_{r-1} passanti ad es. per φ, e completo quindi sopra φ' il sistema lineare di curve segatovi da queste rigate (²), il quale si compone appunto delle sezioni iperpiane di φ' stessa. Ciascuna di queste due superficie si potrà quindi rappresentare sul piano con un sistema lineare completo di curve di un certo ordine n, il quale sia mutato in sè stesso da tutte le omografie che lasciano fissa una certa conica. Questo sistema non potrà pertanto avere alcun punto base (non avendo le dette omografie nessun punto unito fisso), e dovrà perciò comporsi di tutte le curve piane aventi quel dato ordine n. Le φ e φ' saranno dunque superficie F^{n^2} di spazi $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$; e la varietà μ_3 potrà considerarsi come generata da una corrispondenza proiettiva tra due superficie di questo tipo, poste in spazi indipendenti; le rette a sarebbero le congiungenti delle coppie di punti omologhi in questa proiettività.

D'altra parte è evidente che ogni varietà così costruita ammette un gruppo almeno ∞^9 di trasformazioni proiettive, il quale opera in modo ∞^8 (e come un gruppo primitivo) sulla congruenza delle a e sulle superficie φ e φ'. I gruppi che

(¹) Cfr. EF, § 7.

(²) Poichè φ' (e così pure φ) è riferita birazionalmente alla congruenza delle a, colla quale si trova, in certo qual modo, in posizione prospettiva.

così si ottengono rientrano dunque come sottogruppi in quelli già incontrati al Cap. VII.

33. — Rimane a vedere cosa avviene quando il gruppo G lascia fissa una sola superficie φ unisecante le a. — Stacchiamo allora da G un sottogruppo semplice ∞^3 (certo esistente) H: esso dovrà operare sulla congruenza delle a in modo anche ∞^3 (ossia come G medesimo). Dico che H deve trasformare in sè anche una seconda superficie ψ unisecante le a. Infatti le ∞^1 operazioni di H che mutano in sè una retta a generica lasciano certo fisso (trattandosi di un sottogruppo ∞^1 non parabolico di un gruppo semplice ∞^3) anche (almeno) un secondo punto di a — distinto da quello che sta su φ —; e questo punto, variando la retta a, descrive la superficie richiesta ψ. (Se risultassero contemporaneamente uniti tutti i punti di a, si avrebbero ∞^1 superficie così fatte). — Applichiamo ora a questa superficie ψ tutte le operazioni di G, e consideriamo il minimo sistema lineare Σ (certo invariante, e di dimensione >0) contenente le superficie così ottenute. Se questo sistema è un fascio, ricadiamo nel caso del n° 4. D'altra parte Σ non può essere una rete, o, più generalmente, un sistema lineare appartenente a una congruenza di curve (invariante, del 1° ordine), perchè allora le rette a che si appoggiano a una di queste curve dovrebbero incontrare anche le ∞^1 curve trasformate della prima mediante G′ (1); e le ∞^2 rette a si distribuirebbero così in ∞^1 rigate formanti un fascio invariante (rispetto a G), il che è contro l'ipotesi. Infine il sistema Σ (ove non sia un fascio) è certamente semplice; se no esso apparterrebbe a un'involuzione invariante, nella quale ai punti di un raggio a, certo invariante rispetto a G′, non potrebbero essere coniugati che i punti di (uno o più) altri raggi a; il che è da escludersi, non essendovi involuzioni invarianti entro la congruenza delle stesse a.

Possiamo dunque ridurci a un gruppo proiettivo sopra una nuova varietà μ'_3, le cui sezioni iperpiane corrispondano alle superficie del sistema Σ. Allora ogni sottogruppo H lascerà fissa una sezione iperpiana di questa varietà, e perciò ancora un punto fuori di questo iperpiano; dal che si trae facilmente che la varietà μ'_3 è un cono col vertice in quest'ultimo punto, il quale sarà perciò invariante rispetto all'intero gruppo G (se no vi sarebbe ancora una superficie fissa φ' unisecante le a, sulla quale i diversi sottogruppi H dovrebbero subordinare uno stesso gruppo ∞^3, mentre d'altra parte questo gruppo ∞^3 dovrebbe lasciarvi fissa una sezione iperpiana variabile con H).

Concludiamo pertanto: *I soli gruppi essenzialmente nuovi di questo Cap. VIII* (che non rientrano cioè in casi già noti) *sono i gruppi ∞^3 del tipo diedrico.*

Gruppi ∞^3, semplici, transitivi, del tipo diedrico.

34. — È noto (E F, § 23) che i gruppi cremoniani ∞^3, semplici, transitivi, del tipo diedrico — tali cioè che le operazioni di essi che lasciano fermo un punto generico dello spazio formino un gruppo finito diedrico di un certo ordine $2n$ — sono

(1) Sottogruppo doppiamente intransitivo, avente le a per traiettorie fisse.

birazionalmente equivalenti, per $n>2$, al gruppo ∞^3 di tutte le trasformazioni proiettive sulla varietà luogo delle corde di una C^n razionale normale.

I gruppi tipici ai quali essi possono ridursi (per $n>2$) risulteranno pertanto da una qualunque rappresentazione spaziale di questa varietà (μ_3). Possiamo anzi supporre $n>3$, perchè per $n=3$ la varietà μ_3 è lo stesso spazio S_3, e si ha come tipo il gruppo proiettivo ∞^3 con una cubica fissa.

Proiettiamo perciò la curva C^n e la varietà μ_3 delle sue corde da uno spazio (Σ_{n-4}) $(n-3)$-secante rispetto alla curva stessa; la C^n si proietterà secondo una cubica sghemba (γ) di uno spazio S_3, e la varietà μ_3 si proietterà univocamente sopra questo spazio, in modo che alle sue ∞^2 rette (corde della C^n) corrispondano le corde di questa cubica.

Poichè la varietà μ_3 è di ordine $\frac{n-1.n-2}{2}$, e lo spazio Σ_{n-4} la incontra secondo $\frac{n-3.n-4}{2}$ rette, così le sue sezioni iperpiane si proietteranno in superficie di ordine

$$\frac{n-1.n-2}{2}-\frac{n-3.n-4}{2}=2n-5.$$

Queste superficie conterranno la cubica γ come curva multipla di ordine $n-3$ (poichè lo spazio S_{n-3} che da Σ_{n-4} proietta un punto qualunque di C^n contiene altre $n-3$ rette di μ_3), e ammetteranno nei singoli punti di questa curva $n-3$ piani tangenti fissi, passanti rispettivamente per quei punti $P_1\ P_2 \ldots P_{n-3}$ di γ che corrispondono alle intersezioni di C^n collo spazio Σ_{n-4}. Infine le superficie F conterranno ancora le $\frac{n-3.n-4}{2}$ rette che congiungono questi punti P_i a due a due; rette che sono immagini degli spazi S_3 tangenti a μ_3 lungo le rette di essa contenute in Σ_{n-4}.

Queste condizioni individuano completamente il sistema lineare ∞^n rappresentativo di μ_3.

Concludiamo pertanto:

I gruppi cremoniani, transitivi, semplici, ∞^3 corrispondenti al caso diedrico di un certo ordine $2n$ ($n>2$) si riducono birazionalmente al gruppo ∞^3 delle trasformazioni di ordine $2n-5$ che mutano in sè stesso il sistema lineare ∞^n delle superficie di ordine $2n-5$ che soddisfanno alle condizioni seguenti:

1° *Hanno una data cubica sghemba come curva* $(n-3)^{\text{pla}}$;

2° *Toccano in ogni punto di questa cubica gli $n-3$ piani ivi tangenti ad essa e proiettanti rispettivamente $n-3$ punti fissi della curva medesima;*

3° *Contengono le $\frac{n-3.n-4}{2}$ rette che congiungono questi $n-3$ punti a due a due.*

Queste trasformazioni mutano in sè stessa la congruenza delle corde della cubica considerata, e operano su di essa e sulla cubica come le ∞^3 trasformazioni proiettive di questa curva in sè stessa. Assegnando ad arbitrio una di queste proiettività sulla cubica, risulta già determinata la trasformazione corrispondente nella congruenza delle corde, e anche *una* trasformazione del nostro gruppo di ordine $2n-5$ in S_3, perchè di ogni superficie del sistema lineare invariante risulta individuata la corrispondente mediante il sistema delle corde (variabili) della cubica ch'essa deve contenere.

Questo gruppo ∞^3 e il relativo sistema lineare invariante si possono rappresentare analiticamente in modo analogo a quanto si è fatto in E F, § 27 per il gruppo ∞^3 icosaedrico. — Rappresentata una C^n di S_n colle equazioni:

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{matrix} \right\| = 0 .$$

si vede facilmente che la varietà delle sue corde sarà rappresentata dall'annullarsi di tutti i determinanti di 3° ordine estratti dalla matrice:

$$\left| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-2} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n \end{matrix} \right| \quad (^1)$$

Infatti le coordinate di un punto generico di questa varietà di corde possono esprimersi ponendo $x_i = \lambda^{n-i} + k\mu^{n-i}$ (dove λ, μ, k sono parametri indipendenti); e allora vanno appunto a zero tutti i determinanti di 3° ordine estratti dall'ultima matrice. D'altra parte l'ordine di quella stessa varietà vale $\binom{n-1}{2}$, e coincide quindi coll'ordine della varietà, pure a tre dimensioni, rappresentata dall'annullarsi dei determinanti considerati (2).

Ponendo per brevità:

$$X_{i,k} = \left| \begin{matrix} x_{i-1} & x_{k-1} \\ x_i & x_k \end{matrix} \right| ;$$

il determinante di 3° ordine formato colle verticali di posto $h-3$, $h-2$, $h-1$, sviluppato secondo gli elementi dell'ultima orizzontale ed eguagliato a zero, dà la relazione:

$$x_{h-2} X_{h-2,h-1} + x_{h-1} X_{h-1,h-3} + x_h X_{h-3,h-2} = 0. \tag{1}$$

D'altra parte l'annullarsi di tutti questi determinanti di 3° ordine conduce a stabilire, fra i subdeterminanti X, delle relazioni di proporzionalità, le quali possono compendiarsi scrivendo che il rapporto $X_{i,k} : X_{i+1,k+1} = \rho$ ha un valore costante (indipendente cioè dai due indici i, k). L'equazione (1), moltiplicata per ρ^{h-4}, equivale perciò a quest'altra:

$$x_{h-2} X_{23} + x_{h-1} X_{31} + x_h X_{12} = 0$$

(1) Questa stessa sarà perciò anche la condizione, perchè la forma binaria x_x^n (con coefficienti binomiali) possa ridursi al tipo $z^n{}_1 + z^n{}_2$ (somma di due potenze n^{sime}).

(2) Cfr. ad es. Pieri, *Sull'ordine della varietà generata da più sistemi lineari omografici* (" Rend. di Palermo ", t. XI, 1897).

e permette quindi, dando ad h successivamente i valori 4, 5, ... n, di esprimere x_4, x_5, ... x_n razionalmente mediante x_0, x_1, x_2, x_3.

Ponendo ancora:

$$D_h = \begin{vmatrix} X_{31} & X_{12} & 0 & . & 0 & 0 \\ X_{23} & X_{31} & X_{12} & . & 0 & 0 \\ 0 & X_{23} & X_{31} & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & X_{31} & X_{12} \\ 0 & 0 & 0 & . & X_{23} & X_{31} \end{vmatrix}$$

dove l'indice h esprime l'ordine del determinante (supposto ≥ 1), e assumendo per convenzione $D_0 = 1$, $D_{-1} = 0$, si ricava ($h \geq 4$):

$$x_h = \left\{ \frac{-1}{X_{12}} \right\}^{h-3} [(x_2 X_{23} + x_3 X_{31}) D_{h-4} - x_3 X_{12} X_{23} D_{h-5}] \tag{2}$$

le quali equazioni mostrano altresì che la nostra varietà di corde (come già si è osservato) si proietta univocamente sullo spazio (S_3) $x_4 = x_5 = \ldots = x_n = 0$, dallo spazio fondamentale opposto (Σ_{n-4}) $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Quest'ultimo spazio è osculatore alla C^n, sicchè gli $n-3$ punti P_i vengono ora a coincidere.

L' equazione del sistema lineare ∞^n rappresentativo della varietà μ_3 nello spazio (S_3) $x_4 = \ldots = x_n = 0$ si otterrà introducendo nell'equazione lineare $\sum_i \lambda_i x_i = 0$ in luogo di x_4, ... x_n le loro espressioni date dalle (2): sarà dunque, liberata da denominatori:

$$(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) X_{12}^{n-3} + \sum_{h=4}^{n} \lambda_h X_{12}^{n-h} \{ (x_2 X_{23} + x_3 X_{31}) D_{h-4} - x_3 X_{12} X_{23} D_{h-5} \} = 0$$

e risulta appunto di grado:

$$2(n-h) + 3 + 2(h-4) = 2(n-h) + 5 + 2(h-5) = 2n - 5.$$

Questo sistema lineare ∞^n sarà invariante rispetto al nostro gruppo cremoniano tipico ∞^3; e le equazioni di questo gruppo si dedurranno facilmente da quelle del gruppo proiettivo di S_n con una C^n invariante. È noto che queste ultime, nel sistema di coordinate già assunto, possono mettersi sotto la forma:

$$x'_i = (a\lambda + b\mu)^{n-i} (c\lambda + d\mu)^i$$

dove a, b, c, d sono parametri omogenei, e al 2° membro si devono intendere sostituite le x_i ai prodotti $\lambda^{n-i} \mu^i$. Qui basterà tener conto delle prime quattro equazioni ($i = 0, 1, 2, 3$), introducendo ancora nei secondi membri, in luogo di x_4, ... x_n, le loro espressioni date dalle (2).

35. — Da queste considerazioni rimane però escluso il caso $n=2$; il caso cioè dei gruppi equivalenti al gruppo proiettivo ∞^3 della varietà M_3^6 di S_4 rappresentata dall'equazione:

$$i^3 + j^2 = 0$$

dove i, j sono i soliti invarianti di una forma binaria biquadratica (1). Bisognerebbe quindi assegnare anche per questa varietà una rappresentazione spaziale.

Preferiamo tuttavia (per giungere a un risultato più semplice) dare dell'intera categoria dei gruppi ∞^3 diedrici una nuova trattazione, dalla quale non rimarrà più esclusa l'ipotesi $n=2$ (mentre per $n>2$ si ritroveranno gli stessi gruppi tipici di poc'anzi).

Ogni gruppo ∞^3 diedrico, potendo ridursi a un gruppo cremoniano trasformante in sè una stella di rette, sarà pure equivalente a un gruppo proiettivo G sopra una varietà μ_3 di un certo spazio S_r, contenente una congruenza (invariante, del 1° ordine) di rette a.

Su questa congruenza il gruppo G opererà ancora come un gruppo ∞^3 di omografie piane con una conica fissa; e su ogni retta a imposta come fissa dovrà essere invariante *una coppia* di punti, fra loro permutabili (come risulta anche dalle considerazioni esposte in E F, § 23). Luogo di questi punti sarà una varietà (irriducibile) bisecante le a, e invariante rispetto a G. — Abbiamo testè esaminato il caso in cui questa varietà fosse una curva (necessariamente razionale, normale), e le a le ∞^2 corde di questa curva. Supponiamo ora invece che questa varietà sia una superficie φ (la quale può ritenersi normale): saremo così sicuri di comprendere ogni altro caso di gruppo diedrico.

Su questa superficie le rette a segheranno un'involuzione quadratica invariante, sulla quale G dovrà operare come sulla congruenza delle a stesse. Di qui si trae che:

Il gruppo subordinato da G *sulla superficie* φ *è equivalente al gruppo proiettivo* ∞^3 *di una quadrica non degenere di* S_3 *sulla quale si sia fissata una conica.*

Ai due sistemi di generatrici di questa quadrica corrisponderanno su φ due fasci di curve (razionali normali) aventi rispett. certi ordini m, n. Alla conica fissa corrisponderà allora una curva di ordine $m+n$; e φ stessa sarà una superficie di ordine $2mn$, appartenente a uno spazio di dimensione $mn+m+n$ (2). Nell'involuzione quadratica invariante sopra φ ad ogni curva C^m è coniugata una C^n, e inversamente; e sulla varietà μ_3 queste coppie di curve determineranno un sistema invariante ∞^1, d'indice due, di rigate R^{m+n-1} aventi rette a per generatrici.

Ciò premesso, riesce facile il vedere in qual modo il gruppo G operi sopra μ_3. Fissato su μ_3 un punto generico A, e quindi la retta a che lo contiene, resterà ancora un gruppo finito diedrico di un certo ordine $2k$ (non escluso il caso $k=1$) trasformante in sè la coppia di rigate R^{m+n-1} passanti per questa retta a; e vi sarà quindi un gruppo ciclico di ordine k trasformante in sè ciascuna di quelle

(1) EF, § 23.

(2) È rappresentabile sul piano col sistema lineare delle curve di ordine $m+n$ aventi a comune un punto m^{plo} e un punto n^{plo}.

due rigate, e ciascun punto della retta a comune ad esse (ossia passante per A). — E poichè ogni operazione di G la quale lasci fisso ciascun punto di una rigata R^{m+n-1} lascia anche fisso ogni punto di φ e quindi ogni punto di μ_3, così siamo ricondotti a cercare di qual ordine k sia il gruppo finito ciclico che si ha sopra una R^{m+n-1}, quando se ne impongano come fisse le due direttrici C^m e C^n appartenenti a φ (e aventi un punto A a comune), e tutti i punti di una generatrice a (arbitraria).

Osserviamo che si può ritenere $m \neq n$, perchè se no le ∞^1 rigate $R^{m+n-1} \equiv R^{2n-1}$ ammetterebbero rispett. come direttrici minime altrettante curve di ordine $n-1$ non contenute in φ, e aventi per luogo una nuova superficie invariante rispetto a G; sicchè il gruppo continuo ∞^1 che lascia fisso un raggio a ne lascerebbe anche fissi almeno tre, e quindi tutti i punti, e il gruppo G sarebbe perciò intransitivo rispetto a μ_3, contro l'ipotesi.

Supposto pertanto $m > n$, possiamo ancora escludere il caso $m = n + 1$, perchè la rigata $R^{m+n-1} \equiv R^{2n}$ conterrebbe allora infinite direttrici (minime) di ordine n, e ogni trasformazione proiettiva su di essa la quale lasciasse fissa una direttrice $C^m \equiv C^{n+1}$ e tutti i punti di una data generatrice muterebbe in sè anche ciascuna delle direttrici C^n, quindi ogni punto della C^{n+1} fissa nonchè ogni generatrice, e si ridurrebbe perciò alla trasformazione identica. Si avrebbe quindi $k = 1$, vale a dire il gruppo G sarebbe soltanto ciclico (di ordine *due*).

Sia dunque $m > n + 1$. Allora ogni curva C^n sopra φ sarà direttrice minima unica di una rigata R^{m+n-1}; e le direttrici di questa rigata di ordine immediatamente superiore avranno l'ordine $m-1$ e formeranno un sistema lineare di dimensione $m-n$ (≥ 2) e di grado $m-n-1$. Questo sistema lineare rappresenta un cono razionale normale Γ^{m-n-1} di uno spazio S_{m-n}, riferibile alla rigata R^{m+n-1} in modo che si corrispondano le rispettive trasformazioni proiettive. E poichè alla direttrice C^m intersezione residua di R^{m+n-1} con φ corrisponde su Γ^{m-n-1} una curva razionale normale di ordine $m-n$ passante pel vertice di Γ stesso, così siamo condotti a vedere di qual ordine k sia il gruppo proiettivo ciclico che si ha su Γ (ossia nel relativo spazio S_{m-n}) imponendo come fissa una tal curva di ordine $m-n$ e tutti i punti di una generatrice arbitraria di Γ stesso (ossia di una corda di questa curva). Ed è noto (e fu già osservato in E F, § 23) che si ha $k = m - n$.

Concludiamo pertanto: *Le operazioni del gruppo* G *che lasciano fisso un punto generico della varietà* μ_3 *formano un gruppo diedrico di ordine* $2(m-n)$ (essendo $m \geq n + 2$).

D'altra parte i gruppi cremoniani ∞^3, semplici, transitivi, corrispondenti al caso diedrico di uno stesso ordine sono tutti fra loro equivalenti. Essendo pertanto essenziale la sola differenza $m - n$, si avranno già tutti i casi possibili supponendo $n = 1$, $m \geq 3$; assumendo cioè come superficie φ *una rigata razionale normale di ordine $2m$ con ∞^1 direttrici minime di ordine m.*

Il gruppo proiettivo ∞^3 sulla corrispondente varietà μ_3 sarà un gruppo diedrico di ordine $2(m-1)$.

36. — Per $m \geq 4$ la rigata φ^{2m} e la corrispondente varietà μ_3 possono proiettarsi dallo spazio S_{m+1} della direttrice C^{m+1} contenuta in φ su di uno spazio S_{m-1}.

Le generatrici di φ si proietteranno rispettivamente nei punti di una curva (razionale normale) di ordine $m-1$ appartenente a quest' ultimo spazio, e le ∞^2 rette della varietà μ_3, che sono corde di Φ, si proietteranno secondo le ∞^2 corde di questa curva: la varietà stessa si proietterà perciò univocamente nella varietà luogo di queste corde. — Ritroviamo così gli stessi tipi di poc'anzi, perchè alle trasformazioni proiettive di μ_3 corrispondono trasformazioni anche proiettive sulla nuova varietà (proiezione). E rimane pure confermato l'ordine $2(m-1)$ del gruppo diedrico.

Ma per $m=3$ questa proiezione non è più effettuabile. La superficie φ è allora una rigata razionale normale del 6° ordine (in S_7) con ∞^1 direttrici cubiche. *Dico che la varietà μ_3 coincide in questo caso colla varietà M_3^6 a (curve) sezioni ellittiche da noi considerate alla fine del n° 28.*

Ricordiamo infatti che questa M_3^6 ammette un gruppo continuo ∞^8 di trasformazioni proiettive, isomorfo al gruppo totale delle omografie piane. Stacchiamo pertanto da quel gruppo un sottogruppo ∞^3, corrispondente (nell'accennato isomorfismo) al gruppo delle omografie piane che lasciano fissa una data conica. Questo sottogruppo lascerà fissa sulla M_3^6, entro ciascuna delle sue congruenze (invarianti) di rette, una rigata sestica, contenente ∞^1 direttrici cubiche, e bisecante le rette dell'altra congruenza. A questo gruppo ∞^3, semplice, transitivo, trasformante in sè (in due modi diversi) una congruenza di rette e una superficie (irriducibile) bisecante queste rette, sarà applicabile l'intero ragionamento del n° prec. (per $n=1$, $m=3$), e ciò porta a concludere che siamo appunto nel caso diedrico per $k=2$.

Le equazioni di questo gruppo ∞^3 si ottengono facilmente da quelle del n° 28, sostituendo alle a_i, b_i, c_i espressioni opportune mediante tre parametri (o quattro omogenei).

Diremo perciò: *I gruppi ∞^3, semplici, transitivi, del tipo diedrico $n=2$* (quelli cioè che sfuggono alla trattazione del n° 34) *si riducono birazionalmente a un determinato sottogruppo del gruppo ∞^8 di trasformazioni cubiche da noi incontrato al n° 28* (sottogruppo definito dal trasformare in sè un cono quadrico appartenente alla stella invariante di rette).

I gruppi ∞^3 del tipo diedrico di ordine $2n$ si possono dunque ridurre, per $n \geq 3$, a gruppi di trasformazioni di ordine $2n-5$ trasformanti in sè la congruenza delle corde di una cubica sghemba; e per $n=2$ a un gruppo di trasformazioni cubiche trasformante in sè un'analoga congruenza, nonchè una stella di rette avente il centro in un punto della cubica considerata.

Roma, marzo 1898.