
I Grandi Matematici Italiani online

GINO FANO

GINO FANO

Le congruenze di rette del 3° ordine composte di tangenti principali di una superficie

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **37** (1901), p. 501–519

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1901_4>

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*
<http://www.bdim.eu/>

*Le congruenze di rette del 3° ordine
composte di tangenti principali di una superficie.*

Nota di GINO FANO.

1. — Nella mia Memoria: *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare* (*) io ho considerate soltanto quelle congruenze, i cui raggi hanno i due fuochi in generale distinti, e sono perciò tangenti doppie (propriamente dette) della relativa superficie focale. Quando invece sopra ogni raggio i due fuochi coincidono, le rette della congruenza (supposta sempre priva di linea singolare) sono tangenti principali (o tangenti tripunte, o tangenti asintotiche) della superficie luogo dei fuochi stessi. Nella presente Nota vengono appunto determinate le congruenze di rette del 3° ordine di quest'ultimo tipo.

In una congruenza di tangenti principali di una superficie ogni raggio conta come *tre* fra quelli che escono dal suo punto di contatto; poichè il numero complessivo delle tangenti principali che passano per un punto generico dello spazio risulta diminuito di *sei* unità quando questo punto appartiene alla superficie (**), e ciò per effetto delle *due* tangenti principali di cui quel punto è allora punto di contatto (e fuoco). Per una congruenza del 3° ordine priva di linea singolare, la quale si componga di tangenti principali di una superficie, dovranno dunque essere verificate le due condizioni seguenti:

1° La superficie focale — della quale le rette della congruenza sono tangenti tripunte — dovrà essere del 3° ordine. Infatti un raggio generico della congruenza non potrà incontrarla ulteriormente, all'infuori del proprio punto di contatto;

(*) " Mem. della R. Acc. di Torino „, ser. II, vol. LI. Cfr. in particolare la nota a pag. 5.

(**) Cfr. ad es. SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, II (Leipzig, 1880); p. 24.

se no quest'intersezione ulteriore, appartenendo al raggio suddetto e a un altro raggio almeno, ivi tangente alla superficie e da contarsi perciò tre volte, sarebbe sempre un punto singolare;

2° La congruenza si comporrà delle tangenti di uno solo dei due sistemi semplici di asintotiche esistenti sulla superficie; poichè per ogni punto generico di questa superficie deve passare un solo raggio di essa. Il sistema ∞^1 doppio delle linee asintotiche della superficie dovrà dunque spezzarsi in due sistemi semplici, o fasci, completamente distinti (*); e la congruenza suddetta si comporrà delle tangenti alle asintotiche di uno di questi fasci.

2. — Quest'ultima condizione relativa alle linee asintotiche è verificata sopra ogni rigata non sviluppabile; poichè uno dei due fasci di asintotiche si compone allora delle generatrici della rigata, mentre l'altro è distinto da questo. Ora, fra le superficie del 3° ordine vi sono appunto delle rigate; e queste sono tutte non sviluppabili (all'infuori dei coni, pei quali le tangenti tripunte distinte dalle ∞^1 generatrici si ripartiscono fra i piani tangenti lungo le generatrici di flesso e la stella di rette cui il cono appartiene). Siamo condotti perciò a considerare anzitutto la congruenza delle tangenti alle " asintotiche del secondo sistema „ sopra una rigata cubica R^3 (la quale non sia un cono).

Questa congruenza si compone delle ∞^1 rigate quadriche osculatrici a R^3 lungo le singole sue generatrici, ossia aventi per direttrici le sue terne di generatrici consecutive: queste rigate quadriche contengono tutte di conseguenza, come generatrici, le due direttrici rettilinee di R^3 , l'una doppia e l'altra semplice, le quali possono anche essere infinitamente vicine (rigata di Cayley; cfr. n° 4). Questa congruenza è in ogni caso del 3° ordine e della 3ª classe (e duale di sè stessa); le tre

(*) Va escluso anche il caso in cui questi due fasci coincidano: poichè la superficie è allora una rigata sviluppabile, e le sue tangenti principali in un punto generico coincidono entrambe colla generatrice passante per questo punto. All'infuori delle ∞^1 generatrici, non vi potranno essere dunque altre tangenti tripunte, se non di quelle che eventualmente toccassero la superficie in punti o sopra linee particolari.

rette di essa contenute in un piano generico sono le tangenti d'inflessione della cubica razionale intersezione di questo piano colla rigata R^3 ; le tre rette uscenti da un punto generico sono le generatrici cuspidali del cono, di 4° ordine e 3ª classe, circoscritto da quel punto alla rigata.

3. — Se la rigata R^3 ha le due direttrici rettilinee distinte, la sua equazione può scriversi sotto la forma:

$$(1) \quad x_1^2 x_3 = x_2^2 x_4 \quad (*)$$

essendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ i due piani tangenti ad essa nei punti cuspidali della direttrice doppia, e $x_4 = 0$ e $x_3 = 0$ i piani che proiettano rispettivamente questi due punti dalla direttrice rettilinea semplice.

Si vede allora facilmente che la quadrica osculatrice a questa rigata lungo la generatrice contenuta nel piano $x_1 + \lambda x_2 = 0$ ha per equazione:

$$(2) \quad \lambda^3 x_2 x_3 + 3 \lambda^2 x_1 x_3 + 3 \lambda x_2 x_4 + x_1 x_4 = 0.$$

E le rette della nostra congruenza (3,3), vale a dire le tangenti alle asintotiche del 2° sistema sulla rigata R^3 (**), saranno appunto le generatrici di queste ∞^1 quadriche appartenenti al sistema di $x_1 = x_2 = 0$ e $x_3 = x_4 = 0$. Per i valori $\lambda = 0$ e $\lambda = \pm \infty$ la quadrica (2) si spezza in due piani, e ciascuna sua schiera rigata in due fasci; e si hanno così complessivamente 4 fasci di rette contenuti nella congruenza. I loro centri e piani sono rispett. i soli punti e piani singolari di quest'ultima.

È noto che, quando una curva piana razionale di 3° ordine ha una cuspidale, la tangente cuspidale assorbe due delle tre tangenti d'inflessione; ed è anzi questo il solo caso in cui le dette

(*) SALMON-FIEDLER, Op. cit., pag. 366.

(**) Queste asintotiche sono quartiche di 2ª specie passanti per i due punti cuspidali della rigata R^3 e aventi contatti di 2° ordine colle generatrici di R^3 che contengono rispett. quei punti. Esse vengono segate sopra R^3 dal fascio di quadriche $x_1 x_2 + k x_3 x_4 = 0$. Cfr. CLEBSCH, *Ueber die Steiner'sche Fläche* (" Journ. f. Math. ", Bd. 67, 1867, pag. 18); e CREMONA, *Rappresentazione della superficie di Steiner...* (" Rend. Ist. Lomb. ", t. IV, 1867, pag. 22).

tangenti d'inflessione non sono tutte distinte. Ora la nostra rigata R^3 è incontrata da ogni piano passante per l'uno o per l'altro dei due punti $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ e $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ secondo una cubica avente in questo punto una cuspidale, e la relativa tangente contenuta nel piano $x_1 = 0$ o rispett. $x_2 = 0$. Concludiamo perciò:

La nostra congruenza (3,3) contiene i due fasci di rette appartenenti rispett. ai piani $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ e aventi i centri nei punti $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ e $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ogni retta sia dell'uno che dell'altro fascio ha la proprietà di contare come DUE fra le tre rette della congruenza che stanno in un qualsiasi piano per essa.

E dualmente:

Gli altri due fasci di rette contenuti nella congruenza appartengono rispett. ai piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ e hanno per centri rispettivi i punti $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ e $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. Ciascuna retta sia dell'uno che dell'altro di questi fasci conta come DUE fra le tre rette della congruenza uscenti da un suo punto qualunque.

I piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ fanno dunque parte della superficie luogo dei fuochi della congruenza (cioè luogo dei punti pei quali passano due rette infinitamente vicine della congruenza). Benchè la congruenza sia definita come insieme delle tangenti principali (del 2° sistema) della rigata R_3 , pure la sua superficie focale non è tutta data da R^3 ; ma abbraccia anche quei due piani come luoghi, e (similmente) i due punti $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ come involuppi. Quei piani (questi punti) sono precisamente luoghi (involuppi) di ∞^1 raggi della congruenza, ciascuno dei quali ha ∞^1 fuochi (piani focali).

Questa congruenza (3,3) ha il genere sezionale $p = 2$ (). Infatti, nella rigata costituita dalle rette della congruenza che si appoggiano a una retta generica r dello spazio, le terne di generatrici uscenti dai singoli punti di r formano una serie lineare g_3^1 con tre elementi tripli (corrispondenti alle intersezioni di r con R^3) ciascuno dei quali conta come due elementi doppi,*

(*) Con questo nome ho già indicato nella mia Mem. cit. il genere della rigata intersezione di una data congruenza con un complesso lineare generico, e quindi anche della rigata formata dalle rette della congruenza che si appoggiano a una retta generica dello spazio.

e con due ulteriori elementi doppi (corrispondenti alle intersezioni di r coi piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$). Sarà dunque, per una nota formola:

$$2(3 + p - 1) = 3 \cdot 2 + 2 = 8 \quad (*)$$

da cui appunto $p = 2$.

Segue altresì da quanto si è detto che da un punto generico del piano $x_3 = 0$, o $x_4 = 0$, esce un solo raggio della congruenza non contenuto in questo piano. La congruenza risulta così rappresentata birazionalmente sopra ciascuno di questi piani. Alle rigate sestiche sue intersezioni coi complessi lineari di rette corrispondono, ad es. nel piano $x_4 = 0$, le quartiche del sistema lineare ∞^5 , di grado 6 e genere 2:

$$a x_1 x_2^3 + (b x_1^3 + c x_1^2 x_2 + d x_1 x_2^2 + e x_2^3) x_3 + f x_1^2 x_3^2 = 0$$

aventi nel punto $x_1 = x_2 = 0$ una cuspide colla tangente $x_1 = 0$, nel punto $x_2 = x_3 = 0$ un flesso colla tangente $x_3 = 0$, e passanti ancora semplicemente per il punto $x_1 = x_3 = 0$.

4. — L'equazione di una " rigata di Cayley „ (R^3) avente per retta doppia la retta $x_3 = x_4 = 0$, e come punto uniplanare il punto $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ col piano tangente $x_4 = 0$, si può mettere sotto la forma (**):

$$(1) \quad x_1 x_4^2 + x_2 x_3 x_4 = x_3^3.$$

Le quadriche osculatrici a questa rigata lungo le singole sue generatrici avranno tutte a comune con essa le due direttrici rettilinee infinitamente vicine; saranno cioè raccordate ad essa lungo l'intera retta $x_3 = x_4 = 0$. E precisamente la quadrica osculatrice a R^3 lungo la generatrice contenuta nel piano $x_3 + \lambda x_4 = 0$ avrà per equazione:

$$(2) \quad x_1 x_4 + x_2 x_3 + 3 \lambda x_3^2 + 3 \lambda^2 x_3 x_4 + \lambda^3 x_4^2 = 0.$$

(*) La superficie focale-luogo complessiva deve infatti considerarsi come di 8° ordine, comprendendo la R^3 contata due volte, e i piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$. Il ragionamento fatto di sopra equivale appunto a questa considerazione.

(**) SALMON-FIEDLER, Op. cit., pag. 369.

La congruenza (3,3) formata dalle tangenti alle asintotiche del secondo sistema sulla rigata R^3 (*) si comporrà delle generatrici di tutte queste quadriche appartenenti al sistema di $x_3 = x_4 = 0$. Fra le ∞^1 quadriche (2) una soltanto è degenera ($\lambda = \pm \infty$) e si compone del piano $x_4 = 0$ contato due volte. Corrispondentemente, la congruenza (3,3) contiene un unico fascio di rette, che ha per centro il punto uniplanare della rigata R^3 e sta nel relativo piano tangente. Ogni retta di questo fascio conta come due fra le tre che appartengono ad ogni suo punto e ad ogni suo piano, ed è perciò raggio doppio della congruenza (**). Il piano e il centro del fascio (contati due volte) appartengono alla superficie focale, risp. luogo e involuppo, della congruenza. All'infuori di quel fascio, non vi sono nella congruenza altri coni od involuppi piani.

La congruenza si rappresenta birazionalmente sul piano singolare $x_4 = 0$, facendo corrispondere a ogni suo raggio la propria traccia su questo piano. Alle rigate sestiche intersezioni di essa cogli ∞^5 complessi lineari dello spazio corrispondono le curve di 4° ordine del sistema lineare:

$$(3) \quad a \{ x_2^4 + 9 x_1 x_2^2 x_3 + 27 x_1^2 x_3^2 \} \\ + b x_1 x_3^3 + c x_2^3 x_3 + d x_2^2 x_3^2 + e x_2 x_3^3 + f x_3^4 = 0$$

aventi a comune un tacnodo ($x_2 = x_3 = 0$) colla relativa tangente ($x_3 = 0$), e un punto semplice consecutivo al tacnodo su ciascuno dei due rami di curva passanti pel tacnodo stesso. Queste quartiche sono di genere uno; e perciò: *L'attuale congruenza (3,3) ha il genere sezionale $p = 1$.* — Il trinomio fra parentesi nell'equazione (3) si spezza, a meno del fattore numerico 27, nel prodotto di due fattori quadratici (distinti):

$$(x_1 x_3 + m x_2^2) (x_1 x_3 + n x_2^2),$$

(*) Queste asintotiche sono cubiche sghembe passanti per il punto cuspidale della rigata R^3 , e ivi tangenti alla retta doppia di questa rigata e osculatrici al suo piano cuspidale. Cfr. i lavori citati di CLEBSCH (pag. 22) e CREMONA (pag. 23).

(**) Cfr. la mia Mem. cit., n. 10 e relativa nota.

E la trasformazione quadratica:

$$x_1 : x_2 : x_3 = X_1 X_3 - m X_2^2 : X_2 X_3 : X_3^2.$$

coi tre punti fondamentali tutti infinitamente vicini (come anche l'analogia, che si ottiene sostituendo a m l'altro coefficiente n) muta il sistema lineare (3) di quartiche nel sistema di cubiche (*):

$$(4) \quad \begin{aligned} & 27 a X_1 \{ X_1 X_3 + (n - m) X_2^2 \} \\ & + b X_1 X_3^2 + c X_2^3 + (d - mb) X_2^2 X_3 + e X_2 X_3^2 + f X_3^3 = 0 \end{aligned}$$

aventi a comune tre punti semplici consecutivi nella posizione $X_2 = X_3 = 0$, lungo la conica $X_1 X_3 + (n - m) X_2^2 = 0$; vale a dire i tre punti base della rete di coniche:

$$(5) \quad X_1 X_3 + (n - m) X_2^2 + \lambda X_2 X_3 + \mu X_3^2 = 0.$$

In quest'ultima rappresentazione piana a ognuno degli ∞^1 raggi doppi della congruenza (3,3) corrisponde una coppia di punti semplici distinti: uno sulla retta $X_3 = 0$, e l'altro consecutivo ai tre punti basi. Infatti la terza intersezione della cubica generica (4) colla retta $X_3 = 0$ (che è tangente comune nel punto $X_2 = X_3 = 0$) dipende dall'equazione:

$$27 a (n - m) X_1 + c X_2 = 0$$

e perciò soltanto dal rapporto $\frac{a}{c}$ (al quale si può anzi dire che corrisponde proiettivamente). D'altra parte, la condizione perchè la cubica (4) contenga un determinato punto consecutivo ai tre punti basi, p. e. quello che appartiene alla conica generica (5) — ossia la condizione perchè le curve (4) e (5) abbiano non soltanto tre, ma quattro intersezioni coincidenti in $X_2 = X_3 = 0$ — si trova essere:

$$27 a \lambda (n - m) + c = 0$$

(*) I due sistemi lineari ∞^5 (3) e (4) non sono però completi (ossia individuati dai soli punti basi); quindi l'attuale congruenza (3, 3), come superficie dello spazio S_5 , non è normale: ma è invece normale per S_6 .

e dipende perciò anche dal solo valore di $\frac{a}{c}$. Sicchè tutte le cubiche del sistema (4) che incontrano la retta $X_3 = 0$ (fuori di $X_2 = X_3 = 0$) in un medesimo punto avranno a comune altresì un ulteriore punto consecutivo ai tre punti basi, e viceversa. Questi due punti semplici saranno perciò le immagini di un medesimo raggio doppio improprio della congruenza (3,3).

5. — Si abbia ora una superficie cubica F^3 non rigata, sulla quale le asintotiche si ripartiscano in due fasci distinti, e le tangenti principali perciò in due congruenze pure distinte Γ_1 e Γ_2 , ciascuna del 3° ordine. Sia a una retta qualunque contenuta in F^3 ; dico che i punti di a devono essere tutti, per la superficie, punti parabolici.

Infatti, se così non fosse, ad ogni punto generico P di a apparterrebbero due tangenti principali della superficie, una delle quali sarebbe a stessa, mentre l'altra p ne sarebbe distinta. Una di queste due rette, e sia ad es. a , apparterrebbe alla congruenza Γ_1 ; l'altra alla congruenza Γ_2 . Però sopra a vi sarà certo qualche punto parabolico (il quale potrebbe essere eventualmente anche un punto doppio della superficie, oppure un punto semplice dal quale escano tre rette della superficie contenute in un piano, e perciò infinite tangenti principali). Facendo avvicinare P indefinitamente, sopra a , a un tal punto, le due tangenti principali uscenti da esso dovranno tendere a coincidere; ossia p tenderà a coincidere con a . La retta a sarà dunque, in ogni caso, una posizione limite della p , al variare di questa in modo opportuno entro la congruenza Γ_2 : sarà perciò anch'essa una retta di quest'ultima congruenza. Da ogni punto P di a escirebbero così almeno quattro rette della congruenza Γ_2 : a stessa, e la p che va contata tre volte; quel punto sarebbe dunque singolare, e dovrebbe perciò appartenere a infinite rette della congruenza Γ_2 ; vale a dire ogni tangente in P dovrebbe essere tangente tripunta. Ora, se la superficie F^3 non è rigata, ciò non può avvenire per tutti i punti di a , a meno che non vi sia lungo questa retta un unico piano tangente che incontri F^3 secondo a stessa contata tre volte. E allora i punti di a sarebbero tutti parabolici, contro

l'ipotesi fatta (e sarebbe anzi questo un caso particolarissimo di una retta luogo di punti parabolici).

Di qui si deduce facilmente che la retta a — essendo luogo di punti parabolici — deve contenere due punti doppi della superficie F^3 (distinti, od infinitamente vicini); poichè, se non ne contenesse alcuno, oppure ne contenesse uno soltanto, sempre il piano tangente a F^3 in un punto generico P di a incontrerebbe F^3 , all'infuori di a stessa, secondo una conica passante per P e non tangente ad a ; sicchè l'intersezione complessiva avrebbe in P un punto doppio con tangenti distinte. Se invece sopra a stanno due punti doppi della superficie, questa ammetterà lungo a stessa un unico piano tangente, che l'incontrerà secondo a contata due volte e in un'altra retta b , distinta in generale da a ; e ogni punto di a sarà allora parabolico. — I due punti doppi di F^3 esistenti sulla retta a potrebbero anche essere infinitamente vicini; allora sulla retta a vi sarebbe, sostanzialmente, un unico punto doppio biplanare (o uniplanare), i cui due piani tangenti conterrebbero entrambi la a (*).

Concludiamo pertanto: *Ogni retta esistente sulla superficie F^3 deve contenere due punti doppi distinti di questa superficie, oppure un punto doppio almeno biplanare del quale essa sia l'asse. Inoltre F^3 sarà toccata lungo quell'intera retta da un medesimo piano tangente.*

6. — In una importante Memoria di SCHLAEFLI (***) sono enumerati tutti i vari casi che può presentare una superficie cubica non rigata a seconda del numero e tipo dei suoi punti doppi. E se ne hanno in tutto 21 casi diversi (****) (*****).

Ora è facile riconoscere che le condizioni enunciate alla fine del n° prec. riguardo alle rette contenute nella superficie F^3

(*) Cfr. C. SEGRE, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche* (" Ann. di Matem. ", ser. 2^a, t. 25^o, pag. 12).

(**) *On the distribution of surfaces of the third order into Species.....*, " Phil. Trans. ", 1863, pag. 193 e seg.

(***) A noi interessano qui soltanto le " famiglie " (da SCHLAEFLI distinte con numeri romani) e non le " specie ", le quali dipendono soltanto dalla realtà o meno di certi elementi (nell'ipotesi che sia reale la superficie).

(****) Cfr. anche SALMON-FIEDLER, *Op. cit.*, pag. 374.

sono soddisfatte per tre soltanto (le tre ultime) delle 21 famiglie di SCHLAEFLI.

E infatti:

1) Vanno escluse anzitutto le superficie prive di punti doppi, o che contengono soltanto punti doppi conici; poichè vi è sempre qualche retta che non contiene nessuno di questi punti doppi (Famiglie I, II, IV, VIII, XVI);

2) Tra le superficie che contengono uno o più punti doppi biplanari e eventualmente anche qualche punto doppio conico — in numero complessivo di $i \leq 3$ —, vanno escluse tutte quelle che contengono altre rette all'infuori delle $\binom{i}{2}$ che congiungono i punti doppi a due a due, e di quelle che fossero eventualmente assi dei punti doppi biplanari — cioè intersezioni dei relativi piani tangenti —, avvertendo che quest'ultimo caso si presenta soltanto per quei punti doppi che producono un abbassamento di almeno *quattro* unità nella classe della superficie. Si eliminano così anche le Famiglie III, V, VI, VII, IX, X, XI, XIII, XIV, XVII, XVIII;

3) Infine, tra le superficie aventi un punto doppio uniplanare, vanno escluse quelle che contengono qualche retta non passante per questo punto (Famiglie XII e XV).

Rimangono invece i *tre* tipi seguenti:

1) La superficie XIX di equazione:

$$x_1^3 = x_2 (x_1 x_4 + x_3^2)$$

con un punto doppio biplanare ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) e un punto doppio conico ($x_1 = x_3 = x_4 = 0$), la quale contiene due rette: la congiungente dei due punti doppi ($x_1 = x_3 = 0$), e l'asse del punto biplanare ($x_1 = x_2 = 0$);

2) La superficie XX di equazione:

$$x_1^3 = x_2 (x_2 x_4 + x_3^2)$$

col punto doppio uniplanare $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e la sola retta $x_1 = x_2 = 0$;

3) La superficie XXI di equazione:

$$x_1^3 = x_2 x_3 x_4$$

contenente tre punti doppi biplanari e le (sole) tre rette che congiungono questi punti a due a due.

Fra queste dovranno trovarsi le F^3 che noi andiamo cercando.

Ciascuna di queste superficie contiene una retta ($x_1 = x_2 = 0$) tale che il piano tangente lungo di essa ($x_2 = 0$) la incontra secondo la medesima retta soltanto, contata tre volte. Su questa sola proprietà si fonda la discussione ulteriore che faremo nei n° segg.

Però, anche senza ricorrere all'enumerazione di SCHLAEFLI, si può dedurre facilmente dall'ultimo enunciato del n° prec. che le F^3 ivi considerate contengono tutte almeno una retta la quale, contata tre volte, forma la loro intersezione col piano tangente lungo di essa. E dico anzi che, supposto che vi sia una retta a (quale ad es. la $x_1 = x_3 = 0$ del caso XIX di SCHLAEFLI) tale che il piano Π_a tangente lungo di essa incontri ulteriormente F^3 secondo una retta b distinta da a , dovrà il piano tangente a F^3 lungo b essere osculatore alla superficie come a noi occorre: non potrà cioè quest'ultimo piano contenere un'ulteriore retta c della superficie distinta da b . Infatti la retta b non può contenere altri punti doppi di F^3 all'infuori del punto ab (perchè altri non ne contiene, sopra b , la sezione a^2b determinata dal piano Π_a); e similmente la retta c , se distinta da b , non potrebbe contenerne altri all'infuori di bc . Di qui si trae che il punto bc non può essere distinto da ab ; vale a dire che anche c passerà per il punto ab (senza stare nel piano ab). E allora, al pari b , anche c dovrebbe essere asse del punto doppio biplanare (e non uniplanare) abc : il che non è possibile, se c è distinta da b .

7. — Sia dunque a una retta, certo esistente sulla superficie F_3 , tale che il relativo piano tangente non incontri ulteriormente questa superficie. Assumendo a come retta $x_1 = x_2 = 0$ e il piano tangente lungo di essa come piano $x_2 = 0$, l'equazione della superficie sarà della forma:

$$(1) \quad x_1^3 - x_2 \varphi = 0$$

dove φ è una forma quadratica nelle x_i . Allora le quadriche del sistema lineare ∞^3 :

$$(2) \quad \varphi + \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = 0$$

(dove α , β , γ sono i tre parametri) segheranno sopra F^3 le ∞^3 terne di coniche contenute nei piani per a ; poichè, eliminando φ fra le equazioni (1) e (2), si ha la nuova equazione, conseguenza delle precedenti:

$$(3) \quad x_1^3 + \alpha x_1^2 x_2 + \beta x_1 x_2^2 + \gamma x_2^3 = 0$$

che può rappresentare ogni terna di piani per la retta $x_1 = x_2 = 0$ (ossia a).

In particolare, quando la (3) rappresenti un unico piano per a , e sia il piano $x_1 + kx_2 = 0$, contato tre volte, la quadrica (2) corrispondente, vale a dire:

$$(2') \quad \varphi + 3k x_1^2 + 3k^2 x_1 x_2 + k^3 x_2^2 = 0$$

sarà osculatrice a F^3 lungo la conica contenuta nel piano suddetto $x_1 + kx_2 = 0$. E perciò, in un punto qualunque di questa conica, le due tangenti principali di F^3 non saranno altro che le generatrici della quadrica (2') uscenti dal punto stesso. *La congruenza delle tangenti principali della superficie F^3 si comporrà dunque delle generatrici di ambo i sistemi delle ∞^1 quadriche (2')* (e, eventualmente, di qualche parte singolare, come sarebbe ad es. il piano rigato $x_2 = 0$).

Perchè dunque la congruenza delle tangenti principali di F^3 si spezzi in due parti distinte, ciascuna del 3° ordine, è necessario e sufficiente che le due schiere di generatrici della quadrica (2') descrivano, al variare di k , sistemi di rette distinti. Ora, il sistema ∞^1 di quadriche (2') può considerarsi come una curva razionale, e precisamente una cubica sghemba, nello spazio S_3 costituito dal sistema lineare (2): allora l'insieme delle schiere rigate di tutte queste ∞^3 quadriche apparirà come un S_3 doppio, la cui varietà di diramazione è data dalla varietà ∞^2 dei coni contenuti in (2); e noi domandiamo che la cubica suddetta (2') sia immagine, in questo spazio doppio, di una coppia di curve razionali distinte. Perciò è necessario e sufficiente (*) che questa cubica sia tangente alla varietà di

(*) Cfr. anche il ragionamento analogo, più dettagliato, nella mia Mem. cit., n° 61.

diramazione dello spazio doppio in ogni sua intersezione con essa; vale a dire che il sistema ∞^1 di quadriche (2') sia tangente al sistema ∞^2 dei coni contenuti in (2) in ogni elemento il quale sia comune ad essi.

8. — La varietà ∞^2 dei coni contenuti nel sistema lineare (2) è di *quarto* grado. Ma da essa si stacca la rete di coppie di piani:

$$\alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = 0$$

che va contata due volte; sicchè di questa non occorre occuparsi ulteriormente. Rimane, come parte residua, una varietà quadratica (M) di coni. Si ponga ora $\varphi \equiv \sum a_{ik} x_i x_k$, dove, al solito, $a_{ik} \equiv a_{ki}$; e si indichino con A il discriminante di φ , con A_{ik} i subdeterminanti dei singoli elementi a_{ik} . Se noi formiamo il discriminante dell'equazione (2') e lo eguagliamo a zero, l'equazione (di 4° grado) in k che ne risulta, vale a dire:

$$(4) \quad \frac{3}{4} (a_{33}a_{44} - a_{34}^2)k^4 + A_{22}k^3 + 3A_{12}k^2 + 3A_{11}k + A = 0$$

ci determinerà i *quattro* coni contenuti nel sistema (2') — intersezioni cioè di questo sistema cubico colla varietà quadratica M — all'infuori del piano doppio $x_3^2 = 0$, che corrisponde al valore $k = \pm \infty$, e che è già un elemento di contatto di quei due sistemi di quadriche (*). Tutto si riduce adunque a doman-

(*) Lo prova il fatto che l'equazione (4), la quale avrebbe dovuto essere di 6° grado, si è abbassata al 4°; ma si può anche riconoscerlo direttamente. — Infatti il sistema (2') è tangente nell'elemento $x_3^2 = 0$ al fascio $x_2^2 + \lambda x_1 x_2 = 0$; e la varietà M, la quale entro il sistema (2) avrebbe per equazione (nei parametri α, β, γ):

$$\left(\alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4} \right) (a_{33}a_{44} - a_{34}^2) + \alpha A_{11} + \beta A_{12} + \gamma A_{22} + A = 0$$

è tangente in quello stesso elemento alla rete:

$$\alpha (a_{33}a_{44} - a_{34}^2) + A_{22} = 0$$

la cui equazione nelle x_i è:

$$\varphi - \frac{A_{22}}{a_{33}a_{44} - a_{34}^2} x_1^2 + \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = 0.$$

E quel fascio è evidentemente contenuto in questa rete.

dare che l'equazione (4), di 4° grado in k , abbia due radici doppie.

Per semplificare la ricerca e l'interpretazione delle condizioni a ciò necessarie, possiamo valerci dell'osservazione seguente. Non essendosi fatta sinora alcuna ipotesi sulla posizione del piano $x_1 = 0$ nel fascio di asse a (ossia $x_1 = x_2 = 0$), noi possiamo sostituirgli qualsiasi altro piano $x_1 + kx_2 = 0$ (distinto dal piano $x_2 = 0$ tangente a F^3 lungo a), sostituendo in pari tempo alla quadrica $\varphi = 0$ quella quadrica (2') che corrisponde al medesimo valore di k . Pertanto, se nel sistema (2') oltre al piano doppio $x_2^2 = 0$ vi è qualche altra quadrica degenera (cono o coppia di piani), noi potremo supporre che sia questa stessa la $\varphi = 0$ (e sia quindi $A = 0$), bastando perciò prendere come nuovo piano $x_1 = 0$ il piano della conica lungo cui tale quadrica è osculatrice a F^3 .

Ora è facile riconoscere che nel detto sistema (2') vi è certo questa ulteriore quadrica degenera. Infatti, se vi fosse soltanto il piano doppio $x_2^2 = 0$, l'equazione (4) non dovrebbe essere soddisfatta da *nessun valore finito* di k ; dovrebbe dunque essere:

$$a_{33} a_{44} - a_{34}^2 = A_{22} = A_{12} = A_{11} = 0; A \neq 0.$$

Allora nel determinante aggiunto di A :

$$B = | A_{ik} | = A^3 \neq 0$$

sarebbero nulli i subdeterminanti dei tre elementi A_{33}, A_{34}, A_{44} ; e siccome questi sono rispett. eguali a

$$a_{33} A^2; a_{34} A^2; a_{44} A^2$$

così, essendo $A \neq 0$, ne seguirebbe $a_{33} = a_{34} = a_{44} = 0$. La retta $x_1 = x_2 = 0$ apparterrebbe quindi alla quadrica $\varphi = 0$, e sarebbe di conseguenza retta doppia per la superficie data F^3 (che ha l'equazione $x_1^2 - x_2 \varphi = 0$). E ciò non può essere, se la F^3 non è rigata.

9. — Sia dunque $\varphi = 0$ una quadrica degenera, e perciò $A = 0$. L'equazione (4) ammetterà allora la radice $k = 0$; e, poichè ogni sua radice deve essere doppia (o quadrupla), sarà

pure $A_{11} = 0$. Ora, per una nota proprietà dei determinanti, essendo $A = A_{11} = 0$, sarà altresì $A_{12} = \sqrt{A_{11} \cdot A_{22}} = 0$: la radice $k = 0$ dell'equazione (4) è dunque almeno tripla, e perciò certo quadrupla; quindi $A_{22} = 0$. E di qui si vede subito che la quadrica $\varphi = 0$ è una coppia di piani; perchè, se fosse un cono propriamente detto, il suo vertice avrebbe le coordinate x_1 e x_2 (rispett. $= \sqrt{A_{11}}, \sqrt{A_{22}}$) nulle, starebbe cioè sulla retta $x_1 = x_2 = 0$; e assumendo allora questo come punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, mancherebbe in φ , e quindi in tutta l'equazione di F^3 , la coordinata x_4 ; sicchè F^3 sarebbe un cono. Questa stessa osservazione mostra altresì che i due piani componenti la quadrica $\varphi = 0$ sono certo distinti e s'intersecano secondo una retta non incidente alla $x_1 = x_2 = 0$: assumendoli pertanto come piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$, sarà $\varphi \equiv x_3 x_4$ (a meno di un fattore numerico, dal quale si può prescindere). E l'equazione della superficie F^3 sarà di conseguenza:

$$x_1^3 = x_2 x_3 x_4.$$

Questa è la superficie XXI di SCHLAEFLI (*): la sola superficie di 3° ordine non rigata la quale sia pure di 3ª classe. Essa ha tre punti doppi biplanari distinti, e contiene soltanto le tre rette che congiungono questi punti doppi a due a due: ciascuna delle tre rette, contata tre volte, è l'intersezione completa della superficie col piano tangente lungo di essa.

In questo caso, e in questo caso soltanto, — essendo verificate le condizioni di cui ai prec.ⁱ n.º 7 e 8 — *le tangenti principali della superficie si ripartiranno fra due distinte congruenze del 3° ordine* (come verificheremo anche direttamente al n° seg.). E precisamente dalla congruenza complessiva (6,9) delle tangenti principali si staccheranno i tre piani rigati tangenti rispett. lungo le tre rette della superficie (ossia i piani $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$); e la parte residua si spezzerà in due congruenze (3,3).

Ciascuna di queste congruenze (3,3) contiene tre sistemi ∞^1 d'indice *tre* di rigate quadriche: le superficie sostegni di queste

(*) Per le superficie XIX e XX di SCHLAEFLI (cfr. n° 6) l'equazione (4) del n° 8 avrebbe $k = 0$ come radice rispett. tripla, e semplice: è perciò che anche questi due casi risultano ora esclusi.

rigate sono le stesse per entrambe le congruenze. Di questi sistemi ∞^1 di quadriche, uno ha l'equazione:

$$(2'') \quad x_3 x_4 + 3kx_1^2 + 3k^2 x_1 x_2 + k^3 x_2^2 = 0;$$

e le equazioni degli altri due si ottengono da questa permutando i tre indici 2, 3, 4 (due dei quali compaiono simmetricamente). Le quadriche ad es. del sistema (2'') sono tangenti ai piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ nelle loro intersezioni colla retta $x_1 = x_2 = 0$; sul piano $x_2 = 0$ esse segano il fascio di coniche $x_3 x_4 + 3k x_1^2 = 0$.

I sei fasci di rette che hanno per centri, a due a due, i tre punti doppi della superficie F^3 e stanno nei relativi piani tangenti, appartengono tutti a entrambe le congruenze (3,3).

Per ogni punto generico di ciascuno dei tre piani $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ passa una sola retta sì dell'una che dell'altra congruenza non contenuta in quel piano. Ne seguono delle rappresentazioni birazionali delle due congruenze sopra quei piani, nelle quali alle rigate sestiche intersezioni delle congruenze coi complessi lineari di rette corrispondono curve di 4° ordine e di genere uno, aventi a comune due punti doppi e una tangente in ciascuno di questi punti.

10. — La superficie $x_1^3 = x_2 x_3 x_4$ è (al pari delle rigate cubiche considerate ai n° 3 e 4) una *superficie-W* di KLEIN-LIE (*). Essa è trasformata in sè stessa da un gruppo continuo ∞^2 di omografie permutabili, nel quale sono contenuti due sottogruppi pure continui ∞^1 aventi per traiettorie sulla superficie rispett. i due fasci di asintotiche. Questa proprietà, comune a tutte le superficie-W e già notata da KLEIN e LIE, basta per affermare che le asintotiche devono ripartirsi in due fasci distinti.

È anche nota la forma semplicissima delle equazioni delle linee asintotiche sopra una superficie-W. Nel caso attuale (**),

(*) *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces* (Compt. Rend. de l'Ac. d. Sc., vol. LXX, 1870; pagg. 1222 e 1275). Cfr. anche altri lavori più recenti sì dell'uno che dell'altro di quei due geometri (p. e. LIE-SCHEFFERS, *Geometrie der Berührungstransformationen*, Leipzig, 1896; pagg. 334 e 361).

(**) Per questo caso, la ricerca delle equazioni delle linee asintotiche è proposta come esercizio nell'op. più volte cit. di SALMON-FIEDLER, a p. 74.

riferendoci, per maggior comodità, a coordinate cartesiane x, y, z , e supponendo che $x_1 = 0$ sia il piano all'infinito, possiamo scrivere l'equazione della nostra superficie sotto la forma:

$$xyz = 1 \quad \text{ossia} \quad z = \frac{1}{xy}.$$

Formando allora le derivate parziali prime e seconde di z rispetto a x, y ($p = \frac{\partial z}{\partial x}, \dots$), si trova come equazione differenziale delle linee asintotiche:

$$\frac{dx^2}{x^3y} + \frac{dxdy}{x^2y^2} + \frac{dy^2}{xy^3} = 0$$

che si riduce alla forma:

$$\left\{ \frac{ydx}{xdy} \right\}^2 + \frac{ydx}{xdy} + 1 = 0.$$

Di qui, risolvendo, si ricava:

$$\frac{ydx}{xdy} = \epsilon$$

dove con ϵ indichiamo una determinata — l'una o l'altra indifferentemente — delle due radici cubiche immaginarie dell'unità ($\epsilon = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$). Possiamo anche scrivere:

$$\frac{dy}{x} = \epsilon \frac{dy}{y}$$

e quindi, integrando e passando dai logaritmi ai numeri:

$$x = C y^\epsilon.$$

dove C è la costante arbitraria.

Valendoci ora della relazione $xyz = 1$, ricaviamo per z :

$$z = \frac{1}{xy} = \frac{1}{C y^{\epsilon+1}} = \frac{1}{C y^{-\epsilon}} = \frac{1}{C} y^{\epsilon^2}.$$

E scambiando ancora, per maggior comodità, le variabili y e z , potremo rappresentare analiticamente ogni asintotica della nostra superficie colle due equazioni:

$$x = Cz^\epsilon \quad y = \frac{1}{C} z^{\epsilon^2}$$

soddisfacenti identicamente la $xyz = 1$. Ai due valori di ϵ corrispondono rispett. i due fasci di asintotiche: agli ∞^1 valori della costante C le singole asintotiche di ciascun fascio. Una sostituzione pari (circolare) sulle variabili x, y, z non altera questo sistema di equazioni: una sostituzione dispari equivale a cambiare ϵ in ϵ^2 , cioè allo scambio dei due valori di ϵ (*).

Le equazioni della tangente alla curva suddetta in un suo punto qualunque — ossia di una retta generica dell'una o dell'altra congruenza (3,3) — saranno:

$$\frac{X-x}{C\epsilon z^{\epsilon-1}} = \frac{Y-y}{\frac{1}{C} \epsilon^2 z^{\epsilon^2-1}} = Z-z$$

e si riducono facilmente alla forma:

$$\frac{X-x}{x} = \frac{Y-y}{\epsilon y} = \frac{Z-z}{\epsilon^2 z}.$$

Ciascuna delle due congruenze (3,3) è contenuta in un complesso tetraedrale, poichè è trasformata in sè stessa da un gruppo ∞^2 di omografie permutabili, col medesimo tetraedro fondamentale della superficie. La stessa proprietà sussiste pure (per la medesima ragione) per le congruenze considerate ai nⁱ 3 e 4: soltanto

(*) Se la superficie considerata è reale, e sono pure reali tutti tre i suoi punti doppi (e quindi il nostro sistema di coordinate), le linee asintotiche saranno immaginarie, e saranno perciò ellittici tutti i punti della superficie (all'infuori delle tre rette, che sono luogo di punti parabolici). Però la nostra superficie, pur essendo reale, potrebbe avere un solo punto doppio reale, e gli altri due immaginari coniugati; allora la sua equazione, riferita a un sistema di coordinate reali, sarebbe del tipo $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$; e in questo caso i punti della superficie sarebbero iperbolici, e quindi reali le asintotiche e le tangenti principali.

in quest'ultimo caso (n° 4) il complesso tetraedrale avrà i suoi punti e i suoi piani fondamentali tutti coincidenti.

Concludiamo dunque, come risultato della presente Nota:

Le congruenze di rette irriducibili del 3° ordine composte di tangenti principali di una superficie sono tutte di 3ª classe, rappresentabili sul piano, e contenute in complessi tetraedrali. E i soli casi possibili sono i seguenti:

1) *La congruenza delle tangenti alle asintotiche del secondo sistema sopra una rigata cubica (a direttrici rettilinee distinte, o anche coincidenti).*

2) *La congruenza delle tangenti alle asintotiche dell'uno o dell'altro sistema sopra una superficie cubica non rigata con tre punti doppi biplanari (e perciò di 3ª classe).*

Torino, maggio 1902.

L'Accademico Segretario

ENRICO D'OVIDIO.
