Gino Fano

Sopra alcune superficie del 4° ordine rappresentabili sul piano doppio

Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett., Vol. **39** (1906), p. 1071–1086

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1906_1>

SOPRA ALCUNE SUPERFICIE
DEL 4° ORDINE
RAPPRESENTABILI SUL PIANO DOPPIO.

Nota del prof. GINO FANO

---

1. Una superficie del 4° ordine (F^4) di genere uno ($p_g = p_n = P = 1$), la quale contenga una curva di genere (virtuale) *due*, ne contiene tutta una rete; e le curve (γ) di questa rete s'incontrano a due a due nelle coppie di punti di un'involuzione razionale I, che permette di rappresentare la superficie sopra un piano doppio con curva di diramazione del 6° ordine.

Le rette che congiungono le coppie di punti di quest'involuzione formano una congruenza razionale (Γ).

Se le curve γ sono del 4° ordine, esse verranno segate sopra F^4 dai piani di una stella; il centro di questa stella sarà punto doppio della superficie, e la congruenza Γ sarà la stella di raggi avente per centro questo medesimo punto.

Se le γ sono curve di 5° ordine, esse staranno sopra altrettante quadriche, incontranti ulteriormente F^4 secondo una medesima cubica sghemba. E la congruenza Γ si comporrà delle rette intersezioni ulteriori e variabili di quelle quadriche a due a due; rette che sono in pari tempo le corde di questa cubica.

Ci proponiamo ora di studiare il caso successivo, quello cioè di una superficie del 4° ordine assoggettata alla sola condizione di contenere una e perciò tutta una rete di *sestiche* di genere due. Ciò equivale per la F^4 a una condizione semplice (*), perchè per

(*) M. NOETHER afferma anzi nella sua Memoria: *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven* (Berlin 1883; cfr. p. 79) che a una superficie del 4° ordine il dover contenere una qualsiasi curva algebrica sghemba, la quale non ne sia intersezione completa con un'altra superficie, impone una sola condizione.

ciascuna delle ∞^{24} sestiche di genere due di uno spazio S_3 passano (precisamente) ∞^{11} superficie di 4° ordine, e d'altra parte ognuna delle superficie che così si ottengono si presenta in ∞^2 modi diversi (corrispondentemente alle ∞^2 sestiche ch'essa deve contenere in conseguenza della prima): si hanno dunque così ∞^{33} superficie F^4, mentre in tutto ve ne sono ∞^{34}.

2. Prendiamo nello spazio S_3 nel modo più generale una sestica di genere due (senza punti doppi) e una superficie del 4° ordine che la contenga. Quella sestica apparterrà sulla superficie a una determinata rete Σ_1 (completa, pura) di grado due, le cui curve s'incontreranno a due a due nelle coppie di punti di un'involuzione razionale I_1. Ciascuna delle ∞^2 sestiche della rete conterrà ∞^1 coppie di quest'involuzione, formanti su di essa la $g_2{}^1$ canonica.

Per una qualsiasi di queste sestiche passeranno ∞^2 superficie del 3° ordine, le quali incontreranno ulteriormente F^4 secondo altre sestiche di genere due, formanti una nuova rete Σ_2, tale che due sestiche arbitrarie appartenenti rispett. alle due reti Σ_1 e Σ_2 costituiranno sempre, insieme, l'intersezione completa di F^4 con una superficie del 3° ordine. Queste due reti saranno certamente distinte, perchè se no per ognuna delle sestiche considerate dovrebbe passare una superficie del 3° ordine tangente a F^4 lungo questa stessa linea, il che in generale non è possibile (*). Due sestiche appartenenti a reti diverse avranno 16 punti a comune. E la rete Σ_2 determinerà a sua volta sopra F^4 una nuova involuzione razionale I_2 di coppie di punti, alla quale essa appartiene, e che è pure distinta dalla I_1 (**) (***).

(*) Dalla rappresentazione piana di una superficie generale del 3° ordine si vede che ciò sarebbe possibile soltanto quando la sestica fosse intersezione completa della detta superficie del 3° ordine con una quadrica.

(**) Se no i 16 punti comuni a due sestiche appartenenti a reti diverse dovrebbero distribuirsi, sopra ognuna di queste, in 8 coppie della $g_2{}^1$; e la rappresentazione piana della superficie cubica contenente le due sestiche mostra che ciò non avviene.

(***) Queste considerazioni si estendono immediatamente al caso di una F^4 contenente una rete di curve di genere due e ordine pari qualsiasi $2k$. Se $k > 2$ vi sarà anche una seconda rete di C_2^{2k}, residua della prima rispetto a superficie di ordine k.

Ora, fra le superficie di 3° ordine passanti per una sestica della rete Σ_1 vi è la rigata cubica R^3 formata dalle congiungenti delle coppie di punti della sua $g_2{}^1$ canonica. Questa rigata incontrerà dunque ulteriormente F^4 secondo una sestica della rete Σ_2, sulla quale le sue generatrici determineranno pure le coppie della $g_2{}^1$ canonica. E siccome le coppie di queste $g_2{}^1$ sono coppie affatto generiche delle due involuzioni I_1 e I_2, così concludiamo che le generatrici delle ∞^2 rigate R^3 che si ottengono nel modo indicato sono in pari tempo congiungenti delle coppie di punti di F^4 coniugati nell'involuzione I_1, e congiungenti analoghe rispetto all'involuzione I_2. Ognuna di queste (∞^2) rette incontra la superficie F^4 in 4 punti, dei quali due sono coniugati nella I_1, e gli altri due sono coniugati nella I_2; ogni retta che congiunge due punti di F^4 coniugati nella I_1 (o nella I_2) incontra ulteriormente la superficie in due punti coniugati nella I_2 (o nella I_1).

Queste rette formeranno una certa congruenza Γ. E, per quanto si è detto, ogni retta della congruenza la quale passi per un punto generico di F^4 dovrà anche contenere o il coniugato di questo punto nella I_1, oppure il suo coniugato nella I_2. Per quel punto passeranno dunque solamente *due* rette di Γ (quelle che lo congiungono rispett. ai suoi coniugati nella I_1 e nella I_2); e poichè F^4 non è superficie focale, nè parte di superficie focale della congruenza (se no tutte le rette di Γ dovrebbero esserle tangenti), così *la congruenza* Γ *sarà di 2° ordine.*

Inoltre *la congruenza* Γ *non avrà linee singolari;* perchè se no le ∞^2 rigate cubiche R^3 in essa contenute — non potendo essere tutte costituite da uno o più coni singolari — dovrebbero passare tutte per le linee suddette, e i punti comuni a queste linee e alla superficie F^4 sarebbero punti basi di una almeno delle due reti Σ_1 e Σ_2; mentre invece queste reti sono pure, cioè prive di punti basi.

Infine, se la superficie F^4 passante per la prima sestica è stata presa nel modo più generale, essa non conterrà nessuna curva di ordine <6 all'infuori delle sue sezioni piane (perchè il dover contenere una tal curva le imporrebbe sempre *una* condizione ulteriore, distinta da quella di contenere una sestica di genere due). Perciò le sestiche delle due reti Σ_1 e Σ_2 saranno *tutte* irriducibili, e altrettanto dovrà avvenire delle rigate R^3 che le contengono. *La congruenza* Γ *sarà dunque di classe 7;* poichè le altre congruenze di 2° ordine prive di linea singolare, le quali sono tutte di classe < 7, possono bensì contenere (e contengono anzi, se sono *di 1ª specie* (*)) uno o più sistemi ∞^2 di rigate cubiche; ma fra queste ve ne sono sempre di quelle spezzate in una quadrica e un fascio di rette.

Concludiamo pertanto: *La congruenza* Γ *sopra considerata è una congruenza* (2,7) *di* KUMMER (**), *priva di linea singolare.*

Ricordiamo ancora che ogni sestica di genere due priva di punti doppi ha una quadrisecante d, che è direttrice doppia della rigata cubica in cui la sestica è contenuta. Le due sestiche delle reti Σ_1 e Σ_2 che stanno sopra una stessa rigata R^3 avranno dunque la medesima quadrisecante, e l'incontreranno anzi negli stessi 4 punti, dovendo questi essere doppi per l'intersezione complessiva di R^3 con F^4. Le ∞^2 rette d sono i raggi della stella a cui appartiene il cono sestico contenuto nella congruenza Γ.

3. In una congruenza (2,7) priva di linea singolare sono contenute solamente rigate il cui ordine è multiplo di 3. L'intersezione di una tale rigata, che supporremo di ordine $3k$, colla superficie F^4 sarà una curva di ordine $12k$, composta *sempre* di due parti distinte: una di queste parti sarà costituita da ∞^1 coppie dell'involuzione I_1 e sarà perciò autoconiugata rispetto a questa involuzione; l'altra sarà invece autoconiugata rispetto all'involuzione I_2. E poichè ogni rigata di ordine $3k$ contenuta in Γ si può far variare con continuità fino a spezzarsi (se $k > 1$) in k fra le ∞^2 rigate cubiche R^3, così quelle due curve parziali saranno entrambe di ordine $6k$, e apparterranno rispett. ai sistemi lineari k^{pli} delle due reti Σ_1 e Σ_2.

Indicheremo con γ e δ due sestiche qualunque di queste due reti, e con α una sezione piana della superficie F^4. Fra i sistemi lineari a cui appartengono queste curve sussisterà (facendo uso delle solite notazioni) la relazione:

$$|\gamma| + |\delta| = |3\alpha| \tag{1}$$

(*) R. STURM, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*, 3 Bde. (Leipzig 1892-96); Bd. 2, p. 49-50. L'unica congruenza di 2ª specie contiene soltanto rigate di ordine pari, e va perciò esclusa.

(**) *Ueber die algebraischen Strahlensysteme*, . . . (Berl. Abhand. 1866, p. 1-120); STURM, l. c., p. 271.

Proponiamoci ora di determinare la curva che corrisponde a una sezione piana α nell'involuzione I_1 (o I_2). Le rette della congruenza Γ che si appoggiano a una linea α formano una rigata di ordine complessivo 36, composta di due parti distinte di ordine metà (18), luoghi rispett. di quelle rette che congiungono i punti della linea considerata ai loro coniugati in I_1, e ai loro coniugati in I_2. Ciascuna di queste due rigate incontrerà F^4 secondo una curva di ordine complessivo 72, composta anch'essa di due parti di ordine metà, rispett. autoconiugate nelle due involuzioni e appartenenti ai sistemi lineari $|6\gamma|$ e $|6\delta|$. Da ciò si trae immediatamente che alla linea α saranno coniugate in I_1 e in I_2 due linee (α_1, α_2) entrambe di ordine 32 e tali che:

$$|\alpha| + |\alpha_1| = |6\gamma| \tag{2}$$

$$|\alpha| + |\alpha_2| = |6\delta| \tag{2'}$$

Queste tre relazioni fondamentali permettono di vedere in qual modo i sistemi lineari di curve esistenti sopra F^4 si comportino rispetto alle trasformazioni birazionali del gruppo (discontinuo, infinito) generato dalle due involuzioni I_1 e I_2.

Indicheremo con indici 1, 2 il risultato che si ottiene applicando a una curva qualsiasi, o a un sistema lineare di curve, l'involuzione I_1 o I_2; $\xi_{hkl\ldots}$ sarà la curva ottenuta dalla ξ applicandole prima l'involuzione I_h, poi la I_k, poi la I_l, ecc. Evidentemente basta applicare la I_1 e la I_2 *alternativamente*, poichè due fattori consecutivi eguali si eliderebbero. Applicando pertanto alla relazione (1) rispett. le due involuzioni I_1 e I_2, e ricordando che la prima di queste lascia invariato il sistema lineare $|\gamma|$ e la seconda il sistema $|\delta|$, avremo:

$$|\gamma| + |\delta_1| = |3\alpha_1|$$

$$|\gamma_2| + |\delta| = |3\alpha_2|$$

Ora, fra la (1), la (2), e la prima di queste ultime due relazioni possiamo eliminare $|\alpha|$ e $|\alpha_1|$, ricavandone:

$$|\delta| + |\delta_1| = |16\gamma|$$

ossia:

$$|\delta_1| = |16\gamma| - |\delta|.$$

Similmente sarà:

$$|\gamma_2| = |16\,\delta| - |\gamma|.$$

Queste due relazioni permettono di esprimere ogni sistema ricavato da $|\gamma|$ oppure da $|\delta|$ con applicazione alternata delle due involuzioni I_1 e I_2 mediante $|\gamma|$ e $|\delta|$ medesimi; p. es.:

$$|\delta_{12}| = |16\,\gamma_2| - |\delta| = |255\,\delta| - |16\,\gamma|.$$

E poichè $|\gamma|$ e $|\delta|$, $|\gamma_2|$ e $|\delta_1|$, $|\gamma_{21}|$ e $|\delta_{12}|$, ecc. sono sempre, a due a due, dello stesso ordine, così si vede che di questi ordini il primo vale 6, il secondo vale 90, e ciascuno dei successivi è eguale al precedente moltiplicato per 16, e diminuito poi dell'antiprecedente. Questi ordini vanno dunque crescendo indefinitamente; e ciò dimostra appunto che il gruppo discontinuo generato dalle due involuzioni I_1 e I_2 è infinito.

Poichè la superficie F^4, avendo genere numerico $=1$, non può certo ammettere un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè (*), essa ci porge *un esempio di superficie algebrica con infinite trasformazioni birazionali in sè stessa, formanti un gruppo discontinuo.*

Il signor ENRIQUES, in una nota che sarà pubblicata fra breve, ha stabilito l'importante teorema (da lui stesso gentilmente comunicatomi), che *ogni superficie algebrica la quale ammetta un gruppo infinito, ma non una serie continua di trasformazioni birazionali, contiene un fascio di curve ellittiche, oppure ha tutti i generi eguali a uno.* La nostra F^4 rientra in quest'ultima categoria; e se, come sembra, essa non contiene (in generale) fasci di curve ellittiche, sarebbe un esempio atto a mostrare che l'eccezione incontrata dal signor ENRIQUES nel caso dei generi eguali ad uno è veramente essenziale.

4. Sia data ora, viceversa, una congruenza (2,7) priva di linea singolare (Γ); vi saranno sempre delle superficie F^4 sulle quali le rette della congruenza seghino le coppie di due involuzioni I_1 e I_2 del tipo di quelle testè incontrate?

Consideriamo nella congruenza una rigata cubica R^3 (la quale

(*) F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè stesse*, Rend. Circ. Matem. Palermo, vol. XX (1905).

non sia un cono, nè una *rigata di Cayley*, a direttrici infinitamente vicine). Su di essa vi è un sistema lineare ∞^{11} di sestiche di genere due (che sulla rigata cubica normale di S_4, di cui la precedente può considerarsi come proiezione, vengono segate dalle quadriche di quest'ultimo spazio). Queste sestiche hanno la direttrice doppia d della rigata R^3 come quadrisecante, e ognuna di esse, insieme con questa retta, costituisce una particolare $C_5{}^7$, che è curva base di una rete di superficie cubiche, contenente quella rigata. Le intersezioni variabili di queste superficie cubiche sono coniche, aventi colla sestica 6 punti a comune, ma non incontranti in generale la d, e contenute in piani di una stella il cui centro X appartiene alla d medesima (*). — Consideriamo in particolare sopra d il punto O vertice del cono sestico contenuto nella congruenza Γ, e un piano generico passante per questo punto. Fra le ∞^{11} sestiche contenute nella rigata R^3 ve ne saranno ∞^{10}, formanti pure un sistema lineare, per le quali i 6 punti d'incontro col detto piano (ossia colla cubica intersezione di tale piano con R^3) stanno sopra una conica: ognuna di queste ∞^{10} sestiche, insieme alla retta d e alla conica così determinata, sarà curva base di un fascio di superficie cubiche; e ognuna di quelle sestiche, insieme alla sola retta d, sarà curva base di una rete di superficie cubiche, per la quale il centro X della stella di piani sopra considerata sarà precisamente il punto O.

Fissiamo la nostra attenzione sopra una di queste ∞^{10} sestiche (ξ). Allora in ogni piano della stella O saranno contenuti e pienamente individuati:

1) Un raggio della congruenza Γ, non appartenente in generale al cono sestico di questa congruenza, ma che, come caso particolare, può coincidere con una generatrice del cono medesimo;

2) Una conica della congruenza di 1° ordine (Δ) formata dalle intersezioni variabili delle superficie cubiche passanti per la sestica ξ e per la sua quadrisecante d. Anche questa conica può, come caso particolare, passare per O; ma essa si spezza allora nella retta d e in una retta residua, generatrice della rigata R^3; e i piani per i quali ciò avviene sono quelli del fascio di asse d.

Consideriamo ora nei singoli piani della stella O le *due* interse-

(*) D. Montesano, *Su un sistema lineare di coniche dello spazio* (Atti Acc. Torino, vol. 27 (1892), n. 5; *Su i vari tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio*, II (Rend. Acc. Napoli, 1895), n. 1.

zioni della retta 1) colla conica 2). Queste coppie di punti avranno per luogo una superficie F, e formeranno su di essa un'involuzione I. Infatti un punto generico di F (e precisamente un punto che non stia nè sopra ξ nè sopra d) appartiene a una e una sola conica della congruenza Δ, e ha perciò per coniugato nella I la seconda intersezione di questa conica colla retta 1) contenuta nel suo stesso piano (intersezione che è pure completamente individuata, finchè il piano di questa conica non passa per d).

La superficie F contiene la sestica ξ; perchè per un punto qualunque di questa linea passa, oltre ad una generatrice della rigata R^3, anche una seconda retta della congruenza Γ, distinta in generale dalla precedente; e la conica della congruenza Δ che sta nel piano proiettante quest'ultima retta da O contiene anch'essa quel punto. Però ξ è linea semplice per la superficie F, perchè un suo punto generico si ottiene, come punto di F, in un solo modo, come ora si è detto. È vero che per ogni punto di ξ passa anche un'altra retta della congruenza Γ, generatrice di R^3; ma questa retta è parte della conica di Δ contenuta nel piano che la proietta da O, e come sue intersezioni (apparentemente indeterminate) con questa conica si devono considerare due punti, che si possono determinare per altra via, e non stanno in generale sopra ξ (*).

La superficie F è dunque incontrata da una conica generica della congruenza Δ in 8 punti tutti semplici: i 6 punti in cui questa

(*) Sia infatti g una generatrice della rigata R^3, e d_1 una retta qualunque della stella O che si appoggi a g e sia distinta da d. Le rette della congruenza Γ che si appoggiano a d_1, astrazion fatta dal cono sestico O, formano una nuova rigata cubica $R_1{}^3$ avente con R^3 la sola generatrice g a comune; e le coniche della congruenza Δ contenute nei piani del fascio d_1 formano una superficie cubica Φ, appartenente alla rete che ha ξ e d come linee basi. Quest' ultima superficie incontrerà $R_1{}^3$, all' infuori delle rette g e d_1 (la seconda delle quali è doppia per $R_1{}^3$), secondo una sestica η, luogo delle coppie di punti in cui le singole generatrici di $R_1{}^3$ incontrano le coniche corrispondenti della congruenza Δ. I due punti cercati sopra g sono dunque quelli in cui essa è incontrata da quest'ultima sestica; e tali punti non stanno in generale sopra ξ. Infatti nella rigata $R_1{}^3$, all' infuori di g che è corda di ξ, vi sono altre $3 . 6 - 2 = 16$ generatrici incidenti a ξ medesima; si hanno così 16 punti comuni alla due linee ξ e η, i quali ne esauriscono già le intersezioni, trattandosi di due sestiche di genere due contenute nella superficie cubica Φ.

conica si appoggia alla sestica ξ, e le sue 2 intersezioni coll'unica retta della congruenza Γ che sta nello stesso suo piano senza passare, in generale, per O. Non è nemmeno possibile che queste coniche sianc tutte tangenti alla superficie F nei loro punti d'incontro colla sestica ξ, perchè le loro tangenti in un punto di ξ non stanno in generale in un piano: le ∞^1 coniche che passano per un punto fisso di ξ formano infatti una superficie cubica per la quale questo punto è doppio, e in generale non biplanare.

La superficie F è dunque del 4^o ordine, e precisamente del tipo di quella considerata al n. 2.

Data pertanto una congruenza (2,7) priva di linea singolare, esistono infinite congruenze lineari di coniche, contenute nei piani che passano pel vertice del suo cono sestico, sulle quali le rette della congruenza segano le coppie di punti di un'involuzione I appartenente a una superficie del 4^o ordine. Per ogni congruenza (2,7) esistono ∞^{10} di queste superficie (tante quante erano le sestiche ξ sopra una rigata R^3 (*)); e ognuna di esse si può costruire per mezzo di ∞^2 diverse congruenze Δ, ripartite tra due sistemi continui distinti, corrispondentemente alle due reti di sestiche che devono esistere sulla superficie F.

5. Si consideri ora una qualsiasi congruenza $(2, n)$ priva di linea singolare e di 1ª specie, ossia contenente (almeno) un cono di ordine $n-1$ $(2 \leq n \leq 7)$ (**). Chiamato O il vertice di questo cono, e d una retta generica passante per questo punto, le rette della congruenza che si appoggiano a d (senza passare, in generale, per O) formeranno ancora una rigata cubica avente d per direttrice doppia; e si potrà ripetere per questa rigata tutto il ragionamento del n. 4, costruendo nuove superficie del quarto ordine sulle quali le rette della congruenza proposta segheranno le coppie di due diverse involuzioni.

Se $n < 7$, la congruenza avrà $7-n$ piani singolari (contenenti cioè un fascio di rette della congruenza) passanti tutti per O (**). Ognuno di questi piani conterrà una conica della congruenza Δ, la

(*) Ciò è confermato dall'enumerazione delle costanti; perchè la congruenza (2, 7) dipende (come la sua superficie focale, che ha 11 punti doppi) da 23 parametri, e le superficie F^4 contenenti sestiche di genere due (le quali possono tutte ottenersi nel modo indicato) sono ∞^{33}.

(**) Sturm, op. cit., vol. 2°, p. 50.

quale sarà elemento fondamentale per la corrispondenza biunivoca fra questa congruenza e la congruenza di rette $(2, n)$, e corrisponderà precisamente a tutte le rette di quel fascio. Questa conica conterrà ∞^1 coppie dell'involuzione I, e starà perciò sulla superficie F^4; il suo piano incontrerà ulteriormente F^4 secondo un'altra conica, la quale conterrà ∞^1 coppie dell'altra involuzione analoga ad I esistente sopra F^4.

Se $n < 6$, la congruenza proposta conterrà anche $\binom{7-n}{2}$ fasci di rette i cui piani non passano per O (*). Se P è il centro di un tal fascio, le coniche della congruenza Δ contenute nei piani passanti per il raggio OP avranno per luogo una superficie cubica Φ; e fra le rette di quel fascio ve ne sarà *una* appoggiata a d, la quale per conseguenza sarà parte di una (degenere) fra le suddette coniche, e sarà perciò contenuta in Φ. Il piano del fascio P avrà dunque a comune con Φ, oltre a questa retta, una conica, che sarà pure luogo di ∞^1 coppie dell'involuzione I, e sarà contenuta in F^4.

Per ogni congruenza $(2, n)$ *di* 1^a *specie esistono dunque infinite superficie di* 4^o *ordine, sulle quali le rette della congruenza segano le coppie di due involuzioni di* 2^o *grado*. Ogni piano singolare della congruenza incontra queste superficie in due coniche, che contengono rispett. ∞^1 coppie delle due involuzioni.

Se $n \leqq 4$, la congruenza proposta contiene anzi più coni di ordine $n-1$ (per $n = 4, 3, 2$, rispett. 2, 5, 16); e la superficie F^4 contiene perciò un egual numero di coppie di reti di sestiche di genere due, mutuamente residue rispetto a superficie cubiche. In particolare per $n = 2$ si avranno superficie F^4 contenenti 32 coniche distribuite a coppie nei 16 piani di una configurazione di Kummer; a questi piani corrisponderanno in certo qual modo sulla superficie altrettante coppie di reti di sestiche.

6. Sulla superficie focale di una congruenza $(2, n)$ priva di linea singolare, la quale è del 4^o ordine, i due fuochi di ogni raggio della congruenza sono coniugati in un'involuzione razionale I (che ha i punti singolari della congruenza come punti fondamentali) (**). Se la congruenza è di 1^a specie, la sua super-

(*) Sturm, op. cit., vol. 2°, p. 56.

(**) Cfr. anche Sturm. op. cit., vol. 2°, p. 42-43.

ficie focale è toccata dalle ∞^2 rigate cubiche contenute nella congruenza (e per $n \leqq 4$, da quelle di uno qualunque fra i vari sistemi ∞^2 di tali rigate) lungo sestiche di genere due, formanti una rete Σ che appartiene all'involuzione I; e due qualunque di queste sestiche formano insieme l'intersezione completa della superficie focale considerata con una superficie di 3° ordine (*). Queste superficie focali, tutte ben conosciute, possono considerarsi, in un certo senso, come casi particolari delle F^4 da noi precedentemente incontrate, supponendo che le due involuzioni I_1 e I_2 e le due reti di sestiche Σ_1 e Σ_2 siano venute a coincidere (**).

Coincidendo le due involuzioni I_1 e I_2, non vi è più sopra queste superficie un gruppo infinito di trasformazioni birazionali analogo a quello incontrato al n. 3; ma queste superficie ammettono tuttavia anch'esse (se $n \leqq 6$) gruppi birazionali infiniti e discontinui, generati in altro modo. Se $n \leqq 6$, la superficie focale della data congruenza $(2, n)$ è focale anche per altre congruenze dello stesso tipo (in numero di 1, 2, 3, 5, 5 per n decrescente da 6 a 2). Si ha perciò su di essa un egual numero di involuzioni I, e queste generano un gruppo di trasformazioni birazionali che è discontinuo e (se $n > 2$) in generale infinito. Due qualunque di queste congruenze confocali sono infatti costituite dai due sistemi di generatrici di una medesima serie ∞^1 di quadriche inviluppanti la superficie focale e tangenti a questa lungo un fascio di quartiche di 1ª specie. Perciò le involuzioni I corrispondenti trasformeranno in sè stessa ognuna di queste quartiche, subordinandovi delle involuzioni razionali $(g_2{}^1)$; e il loro prodotto subordinerà sopra ogni quar-

---

(*) Il sistema lineare segato da tutte le superficie di 3° ordine sulla superficie focale della data congruenza contiene infatti tutte le curve costituite dalle singole curve della rete Σ contate due volte; esso conterrà perciò anche quelle che risultano dall'accoppiare tali curve a due a due.

(**) Si osservi che la rete Σ è bensì di genere *effettivo* due, ma ha 10 punti basi semplici e un punto base doppio (in punti tutti singolari per la congruenza e doppi per la superficie focale), ed è contenuta in un sistema lineare ∞^3 di sestiche, di genere 3 e di grado 4. Nel caso della superficie di Kummer ($n = 2$), la relazione tra questo sistema ∞^3 di sestiche e il sistema ∞^2 di rigate cubiche circoscritte alla superficie è stata considerata dal sig. G. Humbert al n. 52 della sua memoria: *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (Journ. de mathém. (4) vol. 9 (1893) p. 29).

tica una corrispondenza del 2° sistema. Basta dunque fare in modo che sopra *una* quartica del fascio quest'ultima corrispondenza non sia ciclica, per essere sicuri che il gruppo generato dalle due involuzioni sulla superficie F^4 sia infinito.

Ora, se si considerano sopra un ente ellittico due g_2^1 il cui prodotto sia una corrispondenza (del 2° sistema) non ciclica, e si rappresenta la g_4^3 loro somma con una quartica η di S_3, le congiungenti delle coppie di punti coniugati nelle due g_2^1 sopra questa quartica saranno precisamente le generatrici dei due sistemi di una certa quadrica Q (perchè due rette di sistemi diversi staranno sempre in un piano). Si consideri ancora sopra η un gruppo qualunque di 8 punti “associati„, basi cioè di una rete di quadriche, e si indichino con A_1 e A_2 due di questi punti; allora le quadriche della rete che sono tangenti a un piano fisso passante per la retta $A_1 A_2$, senza però contenere in generale questa retta, formeranno un sistema ∞^1 d'indice due (H), e le loro generatrici si ripartiranno tra due congruenze confocali di 2^0 ordine, e in generale di classe 6 (*); anzi certo di classe 6 se per gli 8 punti basi non passa nessuna coppia di piani. La superficie focale comune (φ) di queste congruenze sarà inviluppata dalle quadriche del sistema (H). Ora, se i punti A_1 e A_2 sono i coniugati di un medesimo punto A della quartica η nelle due g_2^1 considerate, e come piano tangente fisso passante per la retta $A_1 A_2$ si prende il piano $A A_1 A_2$, il sistema (H) conterrà la quadrica Q, e questa sarà anzi l'unico elemento comune a (H) e al fascio di cui η è curva base (**). Il sistema (H) e il fascio (η), contenuti in una medesima rete, saranno dunque tangenti fra loro nell'elemento Q; e perciò η sarà l'intersezione delle due quadriche consecutive comuni a quei due sistemi, cioè la *caratteristica* di Q nell'inviluppo (H).

Le due congruenze (2, 6) sopra accennate determineranno dunque certo sulla superficie φ due involuzioni I generanti un gruppo infinito, perchè è tale il gruppo subordinato sulla quartica η.

Prendendo sulla quartica η gli otto punti basi del sistema (H) in

(*) W. Stahl, *Journ. f. Math.* vol. 95 (1883), p. 297 (cfr. in part. § 3); Sturm, op. cit., vol. 2°, p. 267-68.

(**) In questo fascio la quadrica Q assorbirà due delle tre quadriche tangenti al piano $A A_1 A_2$; la terza passerà per la retta $A_1 A_2$, e non apparterrà perciò al sistema (H).

modo che per essi passino 1, 2 o 3 coppie di piani, si potranno costruire delle congruenze confocali di classe 5, 4, 3, le quali determinino sulla comune superficie focale delle involuzioni I generanti del pari gruppi discontinui infiniti di trasformazioni birazionali.

Non si riesce invece a collocare gli stessi otto punti sulla quartica η in modo tale da arrivare a congruenze (2, 2), cioè alla superficie di Kummer. E infatti sopra questa superficie (la quale ammette tuttavia anch'essa un gruppo complessivo discontinuo e infinito di trasformazioni birazionali) le 6 involuzioni determinate dalle congruenze (2, 2) per le quali essa è focale generano solamente un gruppo finito, composto di 32 operazioni.

7. Ricordiamo perciò che le rette di una congruenza sono tutte tangenti alla superficie focale, supposta esistente, nei loro due fuochi, e che il piano tangente alla superficie focale in uno qualunque dei due fuochi di una data retta è il piano dei due raggi infinitamente vicini che escono dall' altro fuoco di quella retta. Nel caso di una congruenza (2, 2) questo piano è precisamente il piano polare di quest' ultimo fuoco rispetto al complesso lineare nel quale la congruenza è contenuta. Perciò l' involuzione I determinata da questa congruenza sulla sua superficie focale coinciderà colla corrispondenza ivi subordinata dalla polarità rispetto al detto complesso lineare, avvertendo solamente che questa polarità riferisce la superficie focale-luogo alla stessa superficie come inviluppo, e noi ad ogni piano di quest' inviluppo intendiamo sostituito il suo punto di contatto. Moltiplicando fra loro in tutti i modi possibili le *sei* involuzioni determinate sopra una superficie di Kummer dalle congruenze (2, 2) per le quali essa è focale si avranno dunque le stesse trasformazioni puntuali che sulla superficie vengono subordinate dai prodotti delle polarità rispetto ai sei complessi lineari contenenti quelle congruenze. Ora questi prodotti formano un gruppo finito G_{32}, considerato per la prima volta dal sig. KLEIN (*), e composto di 16 collineazioni (l' identità inclusa) e 16 reciprocità, tutte involutorie. Queste ultime, limitatamente alla superficie di Kummer proposta, si possono considerare anch' esse come trasformazioni puntuali ben definite, birazionali ma non pro-

(*) *Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und zweiten Grades*, Math. Ann. 2 (1870), p. 201.

iettive (bastando sostituire ad ogni piano tangente della superficie il suo punto di contatto).

Concludiamo pertanto: *Sopra una superficie di Kummer le 6 involuzioni formate dalle coppie di fuochi dei raggi delle congruenze* (2,2) *per le quali essa è superficie focale generano un gruppo G'_{32} di 32 trasformazioni birazionali, delle quali 16 sono proiettive* (*).

Il gruppo G_{32} di Klein trasforma in sè stesso ciascuno degli ∞^1 complessi quadratici omofocali aventi la superficie di Kummer considerata come superficie singolare, e trasforma perciò in sè stessa anche ciascuna delle asintotiche di questa superficie, poichè le seconde tangenti principali nei punti di un'asintotica (quelle cioè che sono ivi tangenti all'altra asintotica) sono le rette singolari di 2° ordine di un medesimo complesso della serie omofocale, e costituiscono perciò un sistema invariante (**). E poichè due asintotiche hanno a comune, oltre ai 16 nodi della superficie, altri 32 punti, così possiamo aggiungere:

Il gruppo G'_{32} sulla superficie di Kummer trasforma in sè stessa ogni asintotica della superficie; e le intersezioni variabili di queste linee sono precisamente i sistemi di 32 punti invarianti rispetto a quel gruppo.

Dal gruppo G'_{32} non sono però esaurite le trasformazioni birazionali di una superficie di Kummer in sè stessa. Fino dal 1885 il sig Klein, osservando che, all'infuori di quel gruppo, la superficie è ancora trasformata in sè dalle involuzioni che nascono dalla sua proiezione doppia fatta da uno qualunque dei 16 nodi, e dalle altre involuzioni che da queste si deducono per dualità nello spazio, poneva la questione di trovare *tutte* le trasformazioni birazionali della suddetta superficie (***). Il sig. Humbert nelle sue importanti ri-

(*) Per le 16 trasformazioni non proiettive contenute nel Gruppo G'_{32} le coniche della superficie di Kummer sono curve fondamentali, e corrispondono sempre in un certo ordine ai 16 punti doppi.

(**) Klein, *Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen*, Math. Ann. 5 (1872), cfr. in part. p. 297. Le asintotiche della superficie di Kummer furono studiate nella Memoria dei signori Klein-Lie: *Ueber die Haupttangentenkurven der Kummer'schen Fläche 4ten Grades mit 16 Knotenpunkten*, Berlin. Ber. 15 Dic. 1870, p. 891, ristampata nei Math. Ann. 23 (1884), p. 579; e si erano presentate anche prima in altre ricerche degli stessi due geometri.

(***) *Ueber Konfigurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich* cerche sulle superficie iperellittiche (*), nel dare un metodo per trovare tutte le superficie iperellittiche del 4.° ordine, osservava come una medesima superficie, e in particolare una superficie di Kummer, potesse presentarsi in più modi diversi, i quali davano luogo a altrettante trasformazioni birazionali di questa superficie in sè stessa. Che il gruppo complessivo di tutte le trasformazioni birazionali della superficie di Kummer sia infinito (sempre però discontinuo!) fu riconosciuto più tardi dallo stesso sig. HUMBERT (**) e confermato da J. I. HUTCHINSON (***).

8. Ogni superficie di Kummer è inviluppo di 15 diverse serie ∞^1 d'indice due di quadriche, le cui generatrici dei due sistemi costituiscono sempre due delle 6 congruenze (2,2) per le quali essa è superficie focale. Queste quadriche sono circoscritte alla superficie di Kummer lungo quartiche di 1.ª specie; e le involuzioni I che le corrispondenti congruenze (2, 2) determinano sulla superficie medesima sono costituite (come al n.° 6) da serie lineari $g_2{}^1$ sopra le singole quartiche. Ma adesso — a differenza di quanto avveniva al n.° 6 — il prodotto delle due $g_2{}^1$ sopra ogni quartica deve essere ancora un'involuzione (perchè sono involutorie tutte le trasformazioni del gruppo G_{32} di KLEIN), e sarà quindi una delle tre involuzioni ellittiche esistenti sulla quartica stessa. Ciò vuol dire che ogni quadrica delle serie ∞^1 sopra considerate, e la quartica lungo la quale essa è tangente alla superficie di Kummer, sono tali che esistono sulla prima infiniti quadrilateri sghembi inscritti nella seconda, ossia quella quadrica è sempre una delle sei *quadriche di* VOSS passanti per questa quartica (****).

---

eingeschrieben und umgeschrieben sind, Math. Ann. 27 (1885); cfr. in part. p. 142.

(*) Mem. cit., Journ. de mathém. (4) vol. 9 (1893); cfr. in part. p. 465-66.

(**) *Sur la décomposition des fonctions Θ en facteurs*, Paris, Compt. Rend. 126 (1898), p. 394; *Sur les fonctions Abeliennes singulaires*, ibid., p. 508. V. anche la Memoria portante questo stesso ultimo titolo, pubblicata nel Journ. de math. (5), vol. 6 (1900), p. 372.

(***) *On some birational transformations of the Kummer-surface into itself*, Amer. Math. Soc. Bull., vol. 7 (1901), p. 211. Cfr. anche: H. T. HUDSON, *Kummer's quartic surface* (Cambridge, 1905), p. 216.

(****) A. VOSS, *Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades*, Math. Ann. 10 (1876), p. 177. Si vedano inoltre i lavori

Laguerre ha dimostrato che condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga è che alla quadrica si possa circoscrivere lungo questa quartica (η) una rigata ellittica di 4.° ordine (nel qual caso se ne potranno circoscrivere ad essa anche infinite altre) (*). Nel caso di cui si tratta si ottiene appunto una tale rigata, considerando, in un'altra delle congruenze (2,2) confocali alle precedenti, quelle rette che si appoggiano alla quartica η. Queste rette devono formare una rigata di ordine 16, dalla quale si staccano gli 8 fasci della congruenza i cui centri appartengono ad η; rimane dunque una rigata di 8.° ordine, la quale, poichè la linea η sta sulla superficie focale, deve risultare costituita da una rigata di 4.° ordine contata due volte; e questa rigata sarà appunto circoscritta lungo la quartica η alla comune superficie focale delle varie congruenze, e perciò anche alla quadrica considerata.

Resta così confermato quanto già prima si era riconosciuto.

Colognola ai Colli (Verona), ottobre 1906.

---

citati nell'articolo III C 2 della « Encyklopaedie der Mathematischen Wissenschaft » : O. Staude, *Flächen 2ten Grades und ihre Systeme und Durchdringungskurven*, n. 123, nota 513).

(*) *Sur un problème de géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre*, Journ. de mathém. (2) vol. 15 (1870), p. 193. In questa Memoria sono messi maggiormente in evidenza altre proprietà della quartica e delle quadriche di cui si tratta, e gli infiniti quadrilateri inscritti nella quartica e contenuti in una medesima quadrica compaiono solo incidentalmente (cfr. p. 201).