Gino Fano

Sulle forme binarie per le quali una delle spinte su sé stesse sia identicamente nulla

Giornale di Matematiche, Vol. **62** (1924), p. 91–98

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1924_1>

SULLE FORME BINARIE

PER LE QUALI UNA DELLE SPINTE SU SÈ STESSE SIA IDENTICAMENE NULLA

NOTA

DI

GINO FANO (a Torino)

L'articolo della Dott. Rocco « *Ricerche sulle forme binarie aventi zero le 6^e, le 8^e, o le 2i^{me} spinte su sè stesse* », pubblicato nel vol. LXI del *Giornale di matematiche,* p. 129 e seg., mi ha indotto a interpretarne e verificarne geometricamente i risultati. Mi sono così accorto che alcuni di questi risultati si possono meglio chiarire e completare; altri vanno in qualche punto rettificati.

Si tratta, in sostanza, di interpretare i coefficienti c_k della forma binaria di ordine n, $f \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_k x_1^{n-k} x_2^k$, definita a meno di un fattore numerico, come coordinate proiettive omogenee di punto nello spazio S_n, secondo il « principio di trasporto » di Hesse-Klein, recentemente ripreso e più ampiamente sviluppato dal Comessatti (¹). Se $\Phi\,(c_0 c_1 \ldots c_n \mid x_1 x_2)$ è un covariante di f, di grado l (nelle c_k) e di ordine m (>0, nelle x_1, x_2), l'equazione $\Phi = 0$, quando vi si considerino le x_1, x_2 come parametri (ed è questa una delle idee feconde del Comessatti), rappresenta, al variare del rapporto $\frac{x_1}{x_2}$, un sistema algebrico ∞^1, Δ, d'indice m, di ipersuperficie di grado l (M^l_{n-1}) contenuto in un sistema lineare ∞^m, Γ, di tali M^l_{n-1} (e non in un sistema lineare inferiore); sistema lineare rappresentato dall'equazione che si ottiene dalla $\Phi = 0$ sostituendo ai prodotti $x_1^{m-k} x_2^k$ altrettanti parametri indipendenti. In particolare, se $l = 2$, si hanno covarianti quadratici (nelle c_k), rappresentati in S_n da sistemi di quadriche. Tali sono appunto le spinte di

---

(¹) Rend. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. 29 e 30 (1920-21); Rend. Ist. Lombardo, vol. 54 (1921); Math. Annalen, vol. 89 e 90 (1923).

ordine pari $(f\ ,\ f)^{2i}$; rispetto alle x, esse sono di ordine $2(n - 2i)$, quindi $2n - 4\ ,\ 2n - 8\ ,\ 2n - 12\ , \ldots$ fino a 2 $\left(\text{ossia } i = \frac{n-1}{2}\right)$ se n dispari, mentre se n è pari la successione termina con la spinta $(f\ ,\ f)^n$ che è il ben noto *invariante* quadratico, rappresentato in S_n da un'*unica* quadrica.

Domandare che la forma f abbia la 4^a, o la 6^a, ... spinta identicamente nulla equivale a chiedere che il suo punto immagine (c) in S_n appartenga a tutte le quadriche del sistema Δ rappresentante il covariante $(f\ ,f)^4$, o $(f\ ,f)^6$, ..., e quindi anche a tutte quelle del sistema lineare Γ (sistema ∞^{2n-8}, ∞^{2n-12}, ...) contenente Δ. È dunque una questione di varietà base di un sistema lineare di quadriche.

Devo anche ricordare che nella rappresentazione in parola:

le forme con radice n^{pla} sono rappresentate dagli ∞^1 punti di una curva C^n razionale normale (che chiamerò C^n « fondamentale ») ;

le forme con radice $(n-1)^{pla}$, $(n-2)^{pla}$, ... e in generale con radice $(n-i+1)^{pla}$ sono rappresentate dai punti della rigata sviluppabile $R^{2(n-1)}$ delle tangenti alla C^n anzidetta, della varietà $M_3^{3(n-2)}$ dei piani osculatori, ... e in generale della varietà $M_i^{i(n-i+1)}$ degli spazi S_{i-1} osculatori alla C^n medesima.

D'altra parte, per la C^n fondamentale passa un sistema lineare di quadriche di dimensione $\binom{n}{2} - 1$; per la $R^{2(n-1)}$ delle sue tangenti ne passa uno, contenuto nel precedente, di dimensione $\binom{n-2}{2} - 1$; per la $M_3^{3(n-2)}$ dei piani osculatori, uno di dimensione $\binom{n-4}{2} - 1$; e così via, fino, se n è dispari, a un sistema lineare ∞^2 passante per la varietà degli $S_{\frac{n-3}{2}}$ osculatori a C^n; mentre, se n è pari, la successione ha termine con un'unica quadrica, passante per la varietà degli $S_{\frac{n-2}{2}}$ osculatori a C^n, quadrica che è altresì il luogo dei punti immagini di forme per cui è nulla la spinta $(f\ ,f)^n$ (cioè la quadrica fondamentale della polarità rispetto alla C^n; concetto che però qui in appresso non occorre).

Tutti questi sistemi lineari di quadriche sono invarianti rispetto al ben noto gruppo proiettivo ∞^3 di S_n che muta in sè la C^n fondamentale.

Infine, applicando a ciascuno di questi sistemi lineari di quadriche, considerati a loro volta come spazi proiettivi, la proprietà che un gruppo proiettivo ∞^3 « semplice » (come è quello di cui ora trattasi) di uno spazio S_k, se lascia fisso entro S_k uno spazio minore S_h, ne lascia fisso anche un S_{k-h-1} non incontrante il primo [1], si conclude che saranno pure invarianti rispetto

[1] Cfr. la mia Memoria: *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè;* Mem. R. Accad. di Torino, ser. 2ª, vol. 46 (1896); p. 187.

al medesimo gruppo proiettivo ∞^3, e perciò proiettivamente legati alla C^n e alla rappresentazione delle forme binarie di ordine n:

Un sistema lineare di quadriche di dimensione $\left\{\binom{n}{2}-1\right\}-\left\{\binom{n-2}{2}-1\right\}-1$ $=2n-4$, passanti tutte per la C^n, ma nel quale *nessuna* quadrica passa per la sviluppabile delle tangenti a C^n stessa;

un sistema lineare di dimensione $2n-8$ di quadriche passanti per la sviluppabile anzidetta, e delle quali *nessuna* passa per la $M_3^{3(n-2)}$ dei piani osculatori a C^n;

un sistema lineare di dimensione $2n-12$ di quadriche passanti per la $M_3^{3(n-2)}$ anzidetta e non per la varietà degli S_3 osculatori; ecc.

Sono questi ultimi i sistemi lineari Γ *di quadriche a cui conduce la rappresentazione sopra accennata dei covarianti quadratici* $(f, f)^{2i}$.

Poichè dunque le forme che hanno nulla la spinta $(f, f)^{2i}$ sono rappresentate dai punti della varietà base di un sistema lineare di quadriche di dimensione $2(n-2i)$, passanti per la M_i degli S_{i-1} osculatori alla C^n fondamentale, ma non per la M_{i+1} degli S_i osculatori, risulta ovvio che le forme con radice almeno $(n-i+1)^{pla}$, avendo i rispettivi punti immagini sugli anzidetti S_{i-1} osculatori, soddisfano tutte alla condizione $(f, f)^{2i}\equiv 0$. Sono le così dette forme «evidenti»; e di ciò è messa in chiara luce geometrica la ragione.

La ricerca se vi siano altre forme, oltre quelle evidenti, che abbiano nulla una spinta assegnata, si riconduce, geometricamente, ad esaminare in quali casi gli anzidetti sistemi lineari Γ di quadriche, di dimensioni $2n-4$, $2n-8, \ldots$ hanno un'ulteriore varietà base; eventualmente una di dimensione maggiore, contenente la prima.

In particolare, per le forme con $(f, f)^6\equiv 0$, dovremo chiederci quand'è che il sistema Γ, ∞^{2n-12}, ben definito, composto di quadriche passanti per la $M_3^{3(n-2)}$ dei piani osculatori a C^n e nel quale nessuna quadrica passa per la M_4 degli S_3 osculatori a quella stessa curva, ha, oltre la suddetta M_3, una ulteriore varietà base (¹). A questo caso mi riferisco d'ora in poi.

Per $n=6$ il sistema Γ si riduce ad un'unica quadrica; le forme di 6° ordine per cui $(f, f)^6\equiv 0$ sono dunque, come è ovvio, quelle a invariante quadratico nullo, cioè le forme «apolari» (²). Poichè la quadrica suddetta

(¹) Le forme non evidenti per cui $(f, f)^4\equiv 0$, cioè (come è noto) quelle del tetraedro, dell'ottaedro, e dell'icosaedro, hanno per immagini rispett. i punti: di una quadrica di S_4; di una varietà V_3^5 di S_6, a curve sezioni ellittiche, base per un sistema lineare ∞^4 di quadriche; e di una V_3^{22} di S_{12}. La determinazione di queste varietà è stata fatta, in occasione di tutt'altra ricerca, da Enriques e da me (Annali di Matem., ser. 2ª, vol. 26 (1897); n.º 25).

(²) Nella forma $x_2(x_1^5+\alpha x_1^3x_2^2+\beta x_1^2x_2^3+\gamma x_1x_2^4+\delta x_2^5]$ (p. 139 del lavoro della Dott. Rocco), tenendo conto dei coefficienti binomiali, il coefficiente c_1 non vale 1, bensì $\frac{1}{6}$.

ha a comune cogli S_3 osculatori della C^6 fondamentale i sòli piani osculatori nei medesimi punti, ma incontra ulteriormente gli S_4 osculatori (secondo S_1-coni di 2° ordine), esistono anche forme con $(f, f)^6 \equiv 0$ e radice doppia.

Per $n = 7$ il sistema Γ è una rete di quadriche, con varietà base $M_4{}^8$, contenente la $M_3{}^{15}$ dei piani osculatori a C^7. Esistono perciò forme di 7° ordine colla 6^a spinta nulla, anche all'infuori di quelle evidenti; e ne esistono pure con radici doppie.

La $M_4{}^8$ base del sistema Γ contiene ∞^3 rette; e fra queste sono comprese le trisecanti della $M_3{}^{15}$ dei piani osculatori a C^7, che si costruiscono, per ogni terna di piani osculatori, come intersezioni dei 3 spazi S_5 congiungenti tali piani a 2 a 2. Esse sono immagini pertanto di fasci di forme di 7° ordine, aventi tutte la 6^a spinta nulla, e tali che in ciascun fascio sono contenute 3 forme «evidenti».

Per $n = 8$ il sistema Γ è un sistema lineare ∞^4; la sua varietà base è dunque intersezione di 5 quadriche, e perciò, se di dimensione solamente 3, sarà di ordine $2^5 = 32$. E poichè la M_3 dei piani osculatori alla C^8 fondamentale ha ordine 18, vi sarà certo una varietà base ulteriore, di ordine 14, semprechè essa non sia (e vedremo che non è) di dimensione superiore.

La Dott. R o c c o trova infatti due diversi tipi di forme di 8° ordine con $(f, f)^6 \equiv 0$. Le prime (sopprimendo l'indice nel coefficiente c_4, parametro arbitrario; e sopprimendo pure un fattore numerico 2) sono del tipo:

$$4x_1{}^7x_2 + 35cx_1{}^4x_2{}^4 - 50c^2x_1x_2{}^7;$$

ed importa notare che si tratta della ben nota «forma del cubo», cioè di un gruppo di 8 elementi proiettivamente equivalente, nel campo binario complesso, al gruppo costituito sopra una sfera dagli 8 vertici di un cubo. Essa è infatti il prodotto delle due forme biquadratiche:

$$x_1{}^4 + 10cx_1x_2{}^3 \qquad \text{e} \qquad 4x_1{}^3x_2 - 5cx_2{}^4$$

entrambe tetraedriche (cioè a invariante quadratico nullo), e ciascuna, a meno di un fattore numerico, Hessiana dell'altra.

D'altronde, che la forma del cubo debba avere la 6^a spinta nulla, era facilmente prevedibile; poichè il gruppo di 24 operazioni detto «del cubo» o (il che fa lo stesso) «dell'ottaedro», pure essendo oloedricamente isomorfo al gruppo totale di 4 elementi, non lascia fissa alcuna quaderna; perciò un

---

Volendo sia $c_1 = 1$, occorre riferirsi alla forma $x_2(6x_1{}^5 + \alpha x_1{}^3x_1{}^2 + \ldots)$; senza di che la relazione $\alpha^2 = -40\gamma$ (che è quivi scritta diversamente, ma per evidente errore tipografico) andrebbe sostituita con altra $\left(\alpha^2 = -\dfrac{20}{3}\gamma\right)$.

covariante di 4° ordine della forma del cubo, quale è appunto la spinta suindicata, non può essere che identicamente nullo.

La varietà rappresentante le forme di questo tipo è appunto la M_3^{14} cui sopra alludevo. Invero, l'ordine della M_3 luogo dei punti immagini di un sistema di forme f_n proiettivamente equivalenti è dato [1] da $\frac{n(n-1)(n-2)}{s}$, dove s è il numero delle proiettività che mutano in sè il gruppo di n elementi $f_n = 0$. Qui è $n = 8$, $s = 24$; l'ordine perciò 14.

Nel determinare le forme del 2° tipo—sempre di 8° ordine, con $(f, f)^6 \equiv 0$—la Dott. Rocco è incorsa in un lieve errore di calcolo. Sostituendo, a pagina 139, nella relazione

$$6c_7c_3 - 15c_6c_4 + 10c_5^2 = 0$$

(la quinta del caso $n = 8$) i valori trovati in precedenza per c_5, c_6, c_7, si ha:

$$c_3(64c_3^3 + 27c_4^2) = 0\,;$$

relazione che va sostituita a quella della quint'ultima linea della pag. cit. L'ipotesi $c_3 = 0$ conduce appunto alle forme del cubo. Annullando invece la parentesi, si ricava $c_4 = \pm\sqrt{\left(-\frac{4}{3}c_3\right)^3}$. Conviene allora porre $c_3 = -3a^2$ $\left(\text{ossia introdurre come nuovo parametro } a = \pm\sqrt{-\frac{c_3}{3}}\right)$; dopo di che dalle formole stesse della Dott. Rocco si ricavano per c_5, c_6, ... i valori:

$$c_4 = \pm 8a^3 \;;\; c_5 = -15a^4 \;;\; c_6 = \pm 24a^5 \;;\; c_7 = -35a^6 \;;\; c_8 = \pm 48a^7.$$

Si ottengono così forme del tipo:

$$(x_1 \pm ax_2)^6(x_1 \pm 6ax_2)x_2$$

le quali hanno una radice sestupla; sono cioè soltanto forme «evidenti». D'altronde nel § 8 non è fatta alcuna ipotesi che effettivamente escluda i casi di radici multiple; è dunque ovvio che tali casi si devono ritrovare.

Pertanto: *Le sole forme di 8° ordine con* $(f, f)^6 \equiv 0$, *all'infuori di quelle evidenti, sono le forme dell'esaedro regolare.*

Del pari, per $n = 9$, supposto sempre $c_0 = c_2 = 0$, $c_1 = 1$, e $c_3 \neq 0$ (se no si ricade in forme evidenti), c_3 e c_4 risultano legati (come mostra la

---

(1) Enriques-Fano, l. c.

Dott. Rocco) dalla stessa relazione:

$$64c_3^3 + 27c_4^2 = 0.$$

E ponendo di nuovo $c_3 = -3a^2$, si ritrovano per $c_4, c_5, \ldots, c_8$ gli stessi valori di poc'anzi; e in più $c_9 = -63a^8$. Si tratta perciò di forme del tipo:

$$(x_1 \pm ax_2)^7(x_1 \pm 7ax_2)x_2 ;$$

che sono daccapo forme evidenti.

Non esistono dunque forme binarie di ordine 9 con $(f, f)^6 \equiv 0$, *all'infuori di quelle evidenti.* Il sistema lineare Γ, in questo caso ∞^6, ha come sola varietà base la M_3^{21} dei piani osculatori alla C^9 fondamentale.

Per $n = 10$, l'espressione di c_{10}, nella 5ª linea di p. 141, va rettificata come segue:

$$c_{10} = 15c_3c_8 + \frac{245}{2}c_4^3 + 280c_3^3c_4 \text{ (1)};$$

e allora le ultime 3 delle 9 equazioni fra le c (che sono, in sostanza, le equazioni di 9 quadriche determinanti il sistema lineare Γ, qui ∞^8) risultano tutte senz'altro verificate. Perciò c_3, c_4, c_8 sono altrettanti parametri indipendenti. La varietà base del sistema lineare Γ è incontrata dunque dallo spazio S_8 di equazioni $c_0 = c_2 = 0$ (spazio generico, fra ∞^2 analoghi) secondo una M_3; ed è essa stessa una M_5, contenente la M_3^{24} dei piani osculatori alla C^{10} fondamentale.

Questa M_5 è di ordine 10, e ha le curve sezioni (con spazi S_6 generici) di genere 6. Contiene un sistema ∞^4 di rette, distribuite nei singoli spazi S_9 osculatori alla C^{10} fondamentale, e incidenti ai piani che osculano tale C^{10} nei medesimi punti di quegli S_9; da un punto generico P di un piano osculatore di C^{10} escono ∞^1 di quelle rette, formanti un cono cubico razionale normale di S_4, che passa per il punto in cui il piano suddetto oscula C^{10}. Se il punto P si prende nell'intersezione del piano osculatore considerato coll'S_8 osculatore a C^{10} in un altro punto, si può farlo coincidere col punto fondamentale [8] del sistema delle coordinate c_k; e allora le equazioni di quel cono cubico (per $c_1 = 1$) sono:

$$c_0 = c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = c_9 = \left\| \begin{matrix} -1 & 7c_4 & 35c_7 \\ c_4 & 2c_7 & c_{10} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Per un punto generico della M_5 passano 10 delle ∞^4 rette sopra considerate, contenute rispett. nei 10 spazi S_9 osculatori a C^{10} che escono da quel

(1) Quest'ultimo coefficiente è 280, non 210; probabilmente si tratta di un solo errore di segno, per cui la somma $245 + 35$ è diventata una differenza.

punto. Quindi una forma generica f di 10° ordine con $(f, f)^6 \equiv 0$ appartiene a 10 fasci, composti per intero di forme a sesta spinta nulla, e contenenti ciascuno una forma evidente, che ha come radice 8^{pla} rispett. una delle 10 radici di f.

Esiste anche certo, per $n > 10$, almeno un caso di forma a 6^a spinta nulla, e non evidente: la «forma del dodecaedro», cioè la forma di ordine 20 appartenente al sistema dell'icosaedro. Tale forma ha infatti la 6^a spinta di ordine 28; mentre il gruppo dell'icosaedro non lascia invariate (a meno di fattori numerici) altre forme intere, se non degli ordini 12, 20, 30, o funzioni intere di queste (a coefficienti costanti); nessuna dunque di ordine 28. Un covariante dell'icosaedro di ordine 28 è dunque certo identicamente nullo.

Si ha allora, in S_{20}, un sistema lineare ∞^{28} di quadriche, la cui varietà base comprende due M_3 (e, probabilmente, non altri elementi); una M_3 di ordine 54, che è la ∞^1 dei piani osculatori alla C^{20} fondamentale; l'altra, delle forme dodecaedriche, di ordine $\dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18}{60} = 114$: totale 168.

Per la determinazione di *tutte* le forme binarie per le quali è nulla una spinta assegnata, anche l'interpretazione geometrica non mi sembra però che fornisca uno strumento dal quale si possa sperare una risoluzione rapida e completa della questione. I casi finora studiati non consentono ancora alcuna previsione di un risultato *generale* sui sistemi lineari di quadriche, di dimensione $2(n - 2i)$, dei quali si è discorso; e in particolare sui casi (all'infuori dei valori più piccoli di n) in cui detti sistemi, oltre alla varietà M_i degli S_{i-1} osculatori alla C^h fondamentale, hanno un'ulteriore varietà base. È presumibile tuttavia che, per ogni dato valore di i, e per $n \gtreqq 3i$, ciò possa avvenire soltanto in un numero molto limitato di casi.

Si vede però facilmente che, come risulta dai calcoli della Dott. Rocco, non esistono altre forme, oltre quelle evidenti, che soddisfacciano alla relazione $(f, f)^{2i} \equiv 0$ e abbiano radici di multiplicità $> i - 1$. Invero i punti immagini di forme con radice (almeno) i^{pla} stanno negli spazi S_{n-i} osculatori alla C^n fondamentale; e si tratta perciò di vedere se il sistema lineare Γ, di dimensione $2(n - 2i)$, ha qualche punto base in uno di quegli spazi S_{n-i}, ma fuori dell'S_{i-1} osculatore a C^n nel medesimo punto. Supponiamo, per formulare l'ipotesi in modo preciso, che un tal punto base P stia nello S_{n-i-k}, ma non nello $S_{n-i-k-1}$ osculatore a C^n in un punto assegnato X $(0 \leqq k \leqq n-2i)$. Poichè la varietà base totale di Γ è invariante per il gruppo proiettivo ∞^3 della C^n, la sua intersezione col detto S_{n-i-k} sarà invariante per il gruppo proiettivo ∞^2 ottenuto dal precedente imponendo come fisso il punto X di C^n; e per conseguenza, dovendo contenere, insieme con P, che è esterno allo $S_{n-i-k-1}$ osculatore a C^n in X, tutti i trasformati di P nel suddetto gruppo ∞^2 e le posizioni limiti di questi trasformati, conterrà certo la (o coinciderà colla) C^{n-i-k} razionale normale, invariante entro l'S_{n-i-k} considerato, e luogo delle intersezioni di quest'ultimo spazio cogli S_{i+k} osculatori a C^n. Ora questa curva non appartiene certo a tutte le quadriche del sistema Γ: essa è infatti luogo di punti immagini di forme riducibili al tipo $x_1^{i+k} x_2^{n-i-k}$, per le quali, nel campo di variabilità assegnato a k, si verifica immediatamente che la $2i^{ma}$ spinta ha certo un coefficiente diverso da zero. È dunque assurda l'ipotesi fatta pel punto P; ecc.

In ogni caso, l'accompagnare gli sviluppi di calcolo, quando sia possibile, coll'interpretazione geometrica, sarà sempre utilissimo, e come controllo, e per la miglior veduta comprensiva che generalmente si riesce a conseguire.