Gino Fano

Osservazioni su alcune "geometrie finite" II

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 6, Vol. **26** (1936), p. 129–134

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1936_5>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1937 (Anno XV).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Matematica (Geometria). — *Osservazioni su alcune «geometrie finite»*. Nota II [1] del Corrisp. G. FANO.

4. L'effettiva costruzione dei sistemi $S(n^2+n+1\,|\,2\,|\,n+1)$ per $n=2^m$ e $m>2$ (nei quali ancora ogni quadrangolo piano completo ha i 3 punti diagonali allineati) può ottenersi estendendo opportunamente lo schema precedente [2].

Per $m=3$, $n=8$ (sistema $S(73\,|\,2\,|\,9)$) partiamo da una prima retta, i cui 9 punti designeremo con $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_8$. Indicheremo con $1, 2, 3, \cdots, 8$ le ulteriori 8 rette uscenti dal punto A_0, e così pure quelle uscenti dal punto A_1. Dalle mutue intersezioni di queste rette nascono i rimanenti 64 punti del sistema. Indicando con ih $(i, h \geqq 1, \leqq 8)$ il punto intersezione della retta i uscente da A_0 colla retta h uscente da A_1, potremo formare con questi simboli la matrice quadrata:

$$
(2)\qquad
\begin{vmatrix}
11 & 12 & 13 \cdots 18 \\
21 & 22 & 23 \cdots 28 \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
81 & 82 & 83 \cdots 88
\end{vmatrix}
$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1937.

(2) Cfr. il n. 3 nella Nota I a p. 59.

le cui orizzontali e verticali corrispondono rispettivamente alle rette suindicate uscenti da A_0 e da A_1. Come dianzi per ottenere le rette uscenti rispettivamente dai punti A_2, A_3, A_4 abbiamo distribuiti i 4 numeri 1, 2, 3, 4 in *due* coppie nei *tre* modi possibili 12-34, 14-23, 13-42 (con che ciascuna delle 6 coppie compare in *una* di queste distribuzioni), adesso dobbiamo distribuire i numeri $1, 2, 3, \cdots, 8$ in *quattro* coppie, e ciò in *sette* modi diversi, in guisa che ciascuna delle $\binom{8}{2} = 28$ coppie entri in uno e uno solo di questi aggruppamenti (1); p. es. così:

$$
(3) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
12\text{-}34\text{-}56\text{-}78 \\
16\text{-}25\text{-}38\text{-}47 \\
18\text{-}63\text{-}27\text{-}54 \\
17\text{-}82\text{-}64\text{-}35 \\
14\text{-}76\text{-}85\text{-}23 \\
15\text{-}48\text{-}73\text{-}62 \\
13\text{-}57\text{-}42\text{-}86
\end{array}
\right.
$$

Il secondo aggruppamento si ottiene dal primo applicando agli elementi $2, 3, 4, \cdots, 8$ la sostituzione circolare (2687453), di periodo 7 (estensione della (243) della Nota I, n. 3); gli altri si ottengono ripetendo la stessa sostituzione, la quale ancora dall'ultimo aggruppamento riconduce al primo. Ciò premesso, i punti del quadro (2) che appartengono alle 8 rette ulteriori uscenti da ciascuno dei punti A_2, A_3, $\cdots$, A_8 si ottengono, quanto a una prima retta per ciascun punto, facendo seguire ai primi elementi $1, 2, \cdots, 8$ (nell'ordine naturale), in qualità di secondi elementi, i numeri delle singole orizzontali del quadro (3), nel medesimo ordine (3); e, quanto alle altre 7 rette, scambiando in questa prima retta i secondi elementi del 1° e 2°, 3° e 4°, 5° e 6°, 7° e 8° punto, nonchè due qualunque di queste 4 coppie di secondi elementi e in pari tempo le altre due. Combinando questi vari scambi, si hanno appunto 7 sostituzioni (o $2^3 = 8$, compresa l'identità). Le 8 rette uscenti ad esempio dal punto A_2 contengono rispettivamente i punti:

(1) Per formare uno di questi aggruppamenti, la prima coppia può scegliersi in $\binom{8}{2} = 28$ modi; dopo di ciò, la seconda coppia in $\binom{6}{2} = 15$ modi; la terza in 6 modi; la quarta risulta individuata. Questi aggruppamenti sono perciò complessivamente in numero di $\frac{28 \cdot 15 \cdot 6}{4!} = 105$. Fra essi dobbiamo sceglierne 7 mutuamente «complementari», tali cioè che in essi entrino tutte le 28 coppie, e ciascuna una volta sola.

11	22	33	44	55	66	77	88
12	21	34	43	56	65	78	87
13	24	31	42	57	68	75	86
14	23	32	41	58	67	76	85
15	26	37	48	51	62	73	84
16	25	38	47	52	61	74	83
17	28	35	46	53	64	71	82
18	27	36	45	54	63	72	81.

Analogamente le singole rette uscenti da A_3 contengono i punti:

11	26	32	45	53	68	74	87
16	21	35	42	58	63	77	84
12	25	31	46	54	67	73	88

. . . .

E così ancora per le rette uscenti da $A_4, A_5, \cdots$ in corrispondenza alle diverse orizzontali del quadro (3), e sempre cogli scambi di secondi elementi dianzi indicati. Si può verificare direttamente che due rette qualunque uscenti da punti A_i distinti hanno a comune *un* punto del quadro (2).

Pensando le 8 rette uscenti da A_0 (esclusa quella dei 9 punti A_i) ripartite nelle 4 coppie fisse 12–34–56–78, e quelle uscenti da A_1 secondo uno qualunque dei 7 aggruppamenti (3), queste coppie, intersecandosi, determinano, per ciascuno dei 7 casi, $4 \cdot 4 = 16$ quadrangoli semplici, con 32 diagonali, che a 4 a 4 coincidono colle 8 rette della configurazione passanti rispettivamente per $A_2, A_3, \cdots, A_8$ (e distinte dalla $A_0 A_1 A_2 \cdots$).

5. Analogamente ancora per $n = 2^m$ e m qualunque $\geqq 4$. Una prima retta contenga $2^m + 1$ punti, che indicheremo con $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n = 2^m)$. Le ulteriori n rette uscenti da A_0 e quelle uscenti da A_1 forniscono colle loro mutue intersezioni i rimanenti n^2 punti della configurazione [1]; con essi si può formare una matrice quadrata $|ih|$, di ordine $n = 2^m$, le cui orizzontali (indici i) e verticali (indici h) corrispondano alle n rette nominate uscenti rispettivamente da A_0 e A_1.

Poichè coi numeri interi da 1 a $2^m = n$ si possono formare $\binom{n}{2}$ coppie, occorre distribuire i numeri stessi in $\frac{n}{2} = 2^{m-1}$ coppie, e ciò in

(1) In tutto, compresi i punti A_i, i punti della configurazione sono sempre in numero di $n^2 + n + 1 = 2^{2m} + 2^m + 1$.

$n-1$ diversi modi o aggruppamenti, in guisa che ciascuna delle $\binom{n}{2}$ coppie entri in *uno* di questi aggruppamenti.

Nello stesso modo come, per $n = 4$, dalle coppie 12–34 si fa il nuovo aggruppamento 14–23, e da questo, ripetendo l'operazione, il terzo 13–42 (dal quale, ripetendo ancora l'operazione, si ritorna al primo);

e come ancora da 12–34–56–78, operando nello stesso modo sulle coppie prima e terza (12–56), seconda e quarta (34–78), si ha l'aggruppamento 16–25–38–47; e da questo, ripetendo l'operazione, si hanno gli altri del quadro (3);

così da 12–34–56–78–9, 10–11, 12–13, 14–15, 16, prendendo le coppie prima e quinta (cioè prima, e prima della seconda metà) seconda e sesta, ecc. si fa il nuovo aggruppamento:

$$1,\ 10-2,\ 9-3,\ 12-4,\ 11-5,\ 14-6,\ 13-7,\ 16-8,\ 15$$

ottenibile dal precedente colla sostituzione a ciclo unico:

$$(2\cdot 10\cdot 14\cdot 16\cdot 15\cdot 8\cdot 11\cdot 6\cdot 12\cdot 13\cdot 7\cdot 4\cdot 9\cdot 5\cdot 3),$$

e dal quale, ripetendo l'operazione, si ottengono successivamente altri 13 aggruppamenti (in tutto 15) soddisfacenti alle condizioni volute.

Similmente, per ogni valore di $n = 2^m$, disponendo i numeri da 1 a n a coppie nell'ordine naturale, e operando nel modo già indicato (come da 12–34 a 14–23) sulle coppie 1^a e $\left(\frac{n}{4}+1\right)^{\text{sima}}$, 2^a e $\left(\frac{n}{4}+2\right)^{\text{sima}}$, ecc., si ha il nuovo aggruppamento:

$$(1,2^{m-1}+2)-(2,2^{m-1}+1)-(3,2^{m-1}+4)-(4,2^{m-1}+3)-(5,2^{m-1}+6)-\cdots$$

dal quale, ripetendo l'operazione, si hanno gli altri occorrenti $n-3$ aggruppamenti di $\frac{n}{2} = 2^{m-1}$ coppie (in tutto perciò $n-1$ aggruppamenti). Se ora ai numeri $1, 2, 3, \cdots, n$ (nell'ordine naturale) come primi elementi facciamo seguire, in qualità di secondi elementi, i numeri stessi nell'ordine risultante da questi $n-1$ aggruppamenti (il primo dei quali è ancora 12–34–56–$\cdots$), e cioè:

$$\begin{array}{l} 11 \quad - \quad 22 \quad - \quad 33 \quad - \quad 44 \quad - \quad 55 \quad \cdots \\ 11-2\cdot(2^{m-1}+2)-32-4\cdot(2^{m-1}+1)-53-\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

avremo i punti ih di una prima nuova retta uscente rispettivamente da $A_2, A_3, \cdots, A_n$. Le altre rette passanti per ciascuno di questi punti si otterranno scambiando i secondi elementi come appresso:

scambiando anzitutto i secondi elementi del 1° e 2° punto, del 3° e 4° ecc., fino ai due ultimi;

scambiando i secondi elementi della 1ª e 2ª coppia di punti, della 3ª e 4ª coppia, ecc., fino alle ultime due coppie:

scambiando i secondi elementi della 1ª e 2ª quaderna di punti, della della 3ª e 4ª quaderna, ecc.;

e così via coi gruppi di $8, 16, \cdots, 2^{m-1}$ punti consecutivi, nonchè combinando questi scambi fra loro, il che conduce appunto complessivamente a $2^m = n$ rette per ciascuno dei punti $A_2, A_3, \cdots, A_n$.

6. Con procedimento analogo si possono costruire anche gli altri sistemi $\mathbf{S}(n^2+n+1 \mid 2 \mid n+1)$ per $n = p^m$ (p primo). Lo indichiamo ancora per il caso più semplice di $p > 2$, vale a dire $p = 3, m = 2, n = 9$, cioè pel piano $\mathbf{S}(91 \mid 2 \mid 10)$ [1].

Una prima retta contenga 10 punti, che indicheremo con $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_9$. Per ciascuno dei punti A_0 ed A_1 ad esempio passeranno altre 9 rette, che indicheremo rispettivamente, sia le une che le altre, coi numeri $1, 2, 3, \cdots, 9$. Gli ulteriori 81 punti del sistema risulteranno dalle mutue intersezioni di questi 2 gruppi di 9 rette, e potranno ancora designarsi coi simboli ih $(i, h \geqq 1, \leqq 9)$, dove la prima e seconda cifra indicano la retta che congiunge questo punto a A_0 e A_1.

Come prima le rette uscenti da questi punti si distribuivano in coppie, ora le distribuiremo in terne; quelle uscenti da A_0 ad esempio nelle terne fisse (123) (456) (789); quelle uscenti da A_1 nei 4 aggruppamenti di terne:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} (123) & (456) & (789) \\ (147) & (825) & (693) \\ (186) & (942) & (537) \\ (195) & (384) & (276) \end{array} \right.$$

ottenuti ciascuno dal precedente, e anche il primo dell'ultimo (a prescindere dall'ordine delle terne stesse e da quello dei singoli elementi entro di esse), colla sostituzione circolare (24893765) sui numeri da 2 a 9. Inoltre ciascuna delle $\binom{9}{2} = 36$ coppie di numeri (da 1 a 9) figura in una e una sola delle 12 terne.

Assumiamo ora contenuti in una prima nuova retta passante per A_2 i 9 punti:

$$(5) \qquad 11 \quad 22 \quad 33 \quad 44 \quad 55 \quad 66 \quad 77 \quad 88 \quad 99$$

(1) I piani qui considerati sono tutti « desarguesiani », potendosi la costruzione estendere facilmente a spazi contenenti tali piani.

e così ancora in altre rette pure passanti per A_2 i punti che si ottengono dai precedenti tenendo fermi i primi elementi e permutando circolarmente i secondi elementi, entro la prima, seconda e terza terna di punti:

12	23	31	45	56	64	78	89	97
13	21	32	46	54	65	79	87	98;

come pure permutando circolarmente fra loro le tre terne, e di nuovo i secondi elementi entro ciascuna terna:

14	25	36	47	58	69	71	82	93
15	26	34	48	59	67	72	83	91
16	24	35	49	57	68	73	81	92
17	28	39	41	52	63	74	85	96
18	29	37	42	53	61	75	86	94
19	27	38	43	51	62	76	84	95

Le rette uscenti dal punto A_3 sono la:

11	23	32	47	59	68	74	86	95

(contenente gli elementi principali della matrice complessiva delle 9 rette per A_2), e le altre ottenute da questa operando come si è fatto sulla (5) per avere le rimanenti rette per A_2.

Infine le rette uscenti dalle ulteriori coppie di punti A_4 e A_5, A_6 e A_7, A_8 e A_9 si ottengono dalle precedenti tenendo fermo per ogni punto il primo dei due elementi, e sostituendo pei secondi elementi alla ripartizione in terne (123) (456) (789) le altre tre del quadro (4), ossia applicando ai detti secondi elementi la sostituzione circolare (24893765).

Ai quadrangoli che s'incontravano per $p = 2$ vengono sostituite delle configurazioni di 9 punti, intersezioni di 3 rette passanti per A_0 con 3 passanti per A_1, analoghe in certo modo a quella dei flessi di una cubica piana, in quanto ogni retta congiungente due di questi 9 punti ne contiene anche un terzo. Per ognuno di questi gruppi di 9 punti si trovano così 6 nuove rette (oltre le 6 precedenti per A_0 e A_1). Intersecando le terne (123) (456) (789) uscenti da A_0 con uno qualsiasi degli aggruppamenti (4) uscenti da A_1, si hanno 9 configurazioni di 9 punti, perciò $6 \cdot 9 = 54$ di queste nuove rette, a tre a tre coincidenti, e che si riducono perciò a 18 distinte: sono queste le rette del piano passanti per A_2 e A_3, oppure per A_4 e A_5, ecc.