Gino Fano

Alcune questioni sulla forma cubica dello spazio a cinque dimensioni

Comment. Math. Helv., Vol. **16** (1944), p. 274–283

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1944_1>

Alcune questioni sulla forma cubica dello spazio a cinque dimensioni

Di Gino Fano, Lausanne

In una mia Memoria del 1904[1]) ho trattato alcune questioni di carattere proiettivo sulla forma (o varietà) cubica generale dello spazio a quattro dimensioni. Alcune di esse si estendono facilmente agli spazi superiori; non tutte. D'altra parte un lavoro recente di E. G. Togliatti[2]) ha considerata una particolare superficie del 5° ordine dello spazio ordinario, ottenuta come contorno apparente di una forma cubica generale dello spazio a cinque dimensioni rispetto a una sua retta generica, cioè come luogo delle tracce su un S_3 fisso dei piani passanti per questa retta e incontranti ulteriormente la forma cubica in coppie di rette. E in tale ricerca, che muove essenzialmente dall'equazione della detta superficie, non è fatto cenno delle relazioni tra le proprietà di questa superficie e quelle della forma cubica dianzi menzionata; relazioni importanti, poichè le prime derivano appunto da queste ultime. Sembra perciò opportuno, anche in vista di possibili ulteriori sviluppi, chiarire tali relazioni; e ciò mi dà pure occasione di estendere alla forma cubica di S_5 alcune fra le proprietà esposte nella mia Memoria cit.

1. Una forma cubica dello spazio a cinque dimensioni (V_4^3, o brevemente V), che supponiamo priva di punti doppi, contiene ∞^4 rette; per ogni suo punto ne passano ∞^1, costituenti un cono Γ^6 (di ordine 6, e di genere virtuale 4). Fra gli ∞^9 piani dello spazio ambiente S_5, ∞^6 incontrano V in terne di rette, cioè sono ad essa tritangenti; fra questi, ∞^5 l'incontrano in terne di rette di un fascio (ogni punto di V è centro di ∞^1 fra queste terne, i cui piani sono quelli passanti per questo punto e contenuti nella quadrica polare del punto stesso); e ∞^4 in terne di rette di cui due coincidono. Se r è une retta generica contenuta in V, e P un punto qualunque di questa retta, il piano ϱ tangente lungo r al cono Γ^6

[1]) Ricerche sulla varietà cubica generale..., Ann. di Matem (3), vol. 10 (1904), p. 251. Questa Memoria verrà indicata in seguito semplicemente con „Ann. di Matem.“. V. anche la mia Nota: Sulle curve ovunque tangenti a una quintica piana generale, Comm. Mathem. Helvetici, vol. 12 (1939—40), p. 172; in part. n. 2, 3.

[2]) Una notevole superficie di 5° ordine con soli punti doppi isolati, Festschrift *Rudolf Fueter*, Beiblatt zur Vierteljahrschrift der Naturf. Ges. in Zürich, Zürich 1940.

uscente da P incontra V secondo r stessa contata due volte e una retta ulteriore t, non passante in generale per P. Questo piano ϱ è tangente a V lungo l'intera retta r; è per conseguenza contenuto in tutti gli spazi S_4 tangenti a V nei singoli punti di r, ed è l'asse del S_2-cono quadrico inviluppato da tali S_4. Esso è pure tangente lungo r agli analoghi coni Γ^6 uscenti dagli altri punti di r. Gli ∞^2 spazi S_3 passanti pel piano ϱ incontrano V secondo superficie cubiche φ^3 con due punti doppi, variabili su r e in generale distinti; sono cioè bitangenti a V. I due punti doppi coincidono in uno del tipo B_4 (cioè biplanare, colla r come intersezione dei due piani tangenti[3])) quando lo spazio S_3 è tangente lungo r al cono quadrico che contiene il Γ^6 uscente da quel punto. Un S_4 generico passante pel piano ϱ non è tangente a V, ma l'incontra in una V_3^3 per la quale r è retta "speciale,, [4]). Vi sono in tutto ∞^4 piani ϱ, e ogni S_4 (iperpiano dello spazio ambiente S_5) ne contiene ∞^1.

Delle ∞^3 rette di V infinitamente vicine ad r soltanto ∞^1 sono ad essa incidenti, nei singoli fasci che contengono r entro il piano ϱ.

2. I punti dello spazio S_5 hanno rispetto a V altrettante quadriche polari formanti un sistema lineare ∞^5, Σ, privo di punti basi. Fra queste, ∞^4 sono coni, e ∞^2 sono S_1-coni. Se un punto A ha per quadrica polare un cono di vertice A', la relazione fra questi due punti è reciproca; e A, A' sono anche punti reciproci rispetto a tutte le quadriche del sistema Σ. Luogo di queste coppie A, A' è la varietà Hessiana H di V, di 6° ordine, sulla quale le coppie AA' costituiscono un'involuzione T (e gli assi degli S_1-coni ne sono rette fondamentali). I sistemi lineari ∞^4 generici contenuti in Σ hanno gruppi basi di 32 punti (G_{32}), formanti nello spazio S_5 un'involuzione K_{32}; e i punti di ciascun gruppo, essendo contenuti nelle stesse ∞^4 quadriche, hanno rispetto a V uno stesso S_4 polare. Una retta generica di S_5 sta su ∞^2 quadriche di Σ; ma ogni retta congiungente due punti di uno stesso gruppo G_{32} sta su ∞^3 di tali quadriche; e su ciascuna di queste rette le quadriche di Σ segnano le ∞^1 coppie di un'involuzione I_2, le quali appartengono a altrettanti diversi G_{32}. Viceversa, ogni retta contenuta in ∞^3 quadriche di Σ, anzichè in sole ∞^2, è sostegno di una I_2 del tipo anzidetto[5]); e queste rette, complessivamente in numero

---

[3]) Faremo uso della notazione abituale, indicando con B un punto doppio biplanare, e coll'indice la diminuzione da esso portata alla classe della superficie.

[4]) Nel senso di cui in Ann. di Matem., n. 2 e seg.

[5]) Nessuna retta può appartenere a ∞^4 quadriche del sistema Σ, perchè in caso contrario questo sistema avrebbe su di essa qualche punto base.

di ∞^4, si diranno rette "speciali,, [6]). I punti doppi delle involuzioni I_2 sono anche doppi per gruppi G_{32}, e vertici di coni del sistema Σ, cioè punti della varietà Hessiana H; e i due punti doppi di una stessa I_2 sono altresì coppie AA' (affatto generiche) dell'involuzione T su H. Le ∞^3 quadriche del sistema Σ passanti per una retta speciale s s'incontrano ulteriormente in una curva C_{14}^{15} (di ordine 15, genere 14) "residua,, di s, luogo degli ulteriori coniugati dei punti di s nella K_{32}, e 4-secante s. Ciascuna di queste 4 intersezioni è anche punto doppio di un gruppo G_{32}, e quindi di una I_2, generalmente su altra retta speciale; sicchè questi pure sono punti di H, completandone così le $2+4=6$ intersezioni con s. Le ∞^3 quadriche di Σ passanti per s e per la curva residua sono polari dei punti di uno spazio S_3; perciò gli S_4 polari dei punti di s rispetto a V passano per questo S_3, e formano un fascio.

Se una retta speciale s ha a comune con V i due punti di una coppia della sua involuzione I_2, lo spazio S_4 polare comune di questi punti sarà tangente a V in entrambi; e l'intera s starà su V. Vi sarà perciò un fascio di spazi S_4 tutti bitangenti a V nelle singole coppie della stessa I_2; e lo spazio S_3 asse del fascio incontrerà V in una superficie cubica avente l'intera s come retta doppia, cioè in una rigata cubica R^3 di direttrice s. La varietà V ha ∞^3 spazi S_4 bitangenti; contiene ∞^2 rette speciali, le cui involuzioni I_2 costituiscono le coppie di punti di contatto di quegli S_4 bitangenti; e contiene perciò anche ∞^2 rigate cubiche[7]). Le ∞^2 rette speciali contenute in V hanno per luogo una varietà M_3, intersezione completa di V con altra forma[8]), di cui al n° seguente determineremo l'ordine. Ogni retta speciale contenuta in V è generatrice doppia del cono Γ^6 uscente da ciascuno dei suoi punti; e ogni S_4 passante per una di queste rette incontra V in una V_3^3 per la quale la stessa retta è pure speciale.

Ogni retta speciale s contenuta in V è incidente a ∞^2 fra le rette di V ad essa infinitamente vicine, nei singoli fasci che la contengono entro lo

---

[6]) La considerazione delle rette speciali può estendersi a qualunque sistema lineare ∞^5 di quadriche dello spazio S_5, anche se queste non sono le prime polari dei punti di questo spazio rispetto a una forma cubica. E così per un sistema lineare ∞^n di quadriche in S_n. In due altri miei lavori (Mem. R. Accad. Torino (2), vol. 51 (1901), p. 1; Rend. Circolo Matem. Palermo, vol. 29 (1910), p. 98) le ho chiamate, per $n=3$, rette "principali,, , traducendo così il termine tedesco ,,Hauptstrahlen", usato da *Th. Reye* e altri; ma nel caso presente, per questioni concernenti forme cubiche, preferisco conservare il nome di rette "speciali,,, già prima adottato da *Enriques* (Giorn. di Matem., vol. 31 (1893), p. 31).

[7]) Fra queste, ∞^1 sono rigate di *Cayley*, cioè colla retta doppia direttrice rettilinea unica e in pari tempo generatrice; in corrispondenza a quelle rette speciali lungo le quali V ammette un piano osculatore fisso.

[8]) *Severi*, Rend. R. Accad. Lincei (5), vol. 15 (1906)$_2$, p. 691.

spazio S_3 tangente a V lungo di essa; ma fra queste ∞^2 non vi è generalmente nessuna retta speciale. I piani passanti per s e non contenuti nel detto S_3 determinano con questo S_3 spazi S_4 bitangenti a V; e se segano ulteriormente V in coppie di rette, queste rette passeranno rispett. per i due punti di contatto di quell'S_4.

Come immediata estensione di proprietà già note per lo spazio S_3 e S_4 [9]), una retta speciale s contenuta nella varietà V è bitangente alla Hessiana nei punti doppi dell'involuzione I_2 su di essa; la sua C_{14}^{15} residua si appoggia ad essa in questi punti e nelle due intersezioni residue di s colla H [10]).

3. Sia ora r una retta non speciale pel sistema di quadriche Σ. I coniugati dei punti di r nell'involuzione K_{32} hanno per luogo una curva γ di ordine 31 (dovendo essere incontrata da una quadrica generica del sistema Σ nei 31.2 punti coniugati dei due in cui la stessa quadrica incontra r) [11]). Le due linee r e γ hanno a comune i 6 punti intersezioni di r colla Hessiana H di V, e sono fra loro in corrispondenza (1,31), coi 6 punti anzidetti come uniti. Generano pertanto una rigata R^{56}, avente r come direttrice 31^{pla} e γ come direttrice semplice, e le cui generatrici sono le rette speciali appoggiate a r e per conseguenza anche a γ.

Supponiamo ora la retta non speciale r contenuta nella varietà V. Le quadriche Q polari dei punti di r contengono allora tutte questa retta, e quindi anche la curva γ sua coniugata nell'involuzione K_{32} (curva che starà perciò sulla M_3^4 base del loro fascio). Esse segano ogni piano congiungente r a un punto C di γ, all'infuori di r, secondo rette passanti per C, e che sono le polari dei singoli punti di r rispetto alla conica intersezione ulteriore di questo medesimo piano con V. *Una* di queste rette è sempre generatrice della rigata R^{56}. Quando C cade in una, M, delle 6 intersezioni di γ colla r, la Q polare di M è un cono di vertice $M' \not\equiv M$, contenente il piano $M'r$; e questo piano incontra V, all'infuori di r, in

---

[9]) Cfr. p. es. Ann. di Matem., n. 4.

[10]) La C_{14}^{15} è tangente a V nei primi due punti e osculatrice negli ultimi due (Ann. di Matem., n. 15); incontra perciò ulteriormente V in $15.3 - (2.2 + 3.2) = 35$ punti. Da ciò si trae che in ogni fascio di S_4 bitangenti a V vi sono 35 spazi tritangenti. — Più generalmente, ogni fascio di iperpiani bitangenti a una forma cubica generale di S_n $(n > 2)$ contiene $3\,(2^{n-1} - n) + 2$ iperpiani tritangenti.

[11]) Quando r è una retta speciale, la curva γ^{31} si spezza in questa stessa retta (che di ogni suo punto contiene allora un coniugato) e nella C_{14}^{15} residua contata due volte. Il genere di γ (che non interessa però pel seguito) è 60 (e, per la curva analoga in uno spazio S_n, è $(n-1)\,(2^{n-1}-1)$). Lo si può determinare facilmente nel caso in cui il sistema Σ si compone delle quadriche aventi un dato simplex autopolare, poichè la curva in parola è allora composta delle rette che corrispondono a r nelle singole omografie involutorie aventi come spazi di punti uniti le coppie di elementi opposti del detto simplex.

una coppia di rette passanti pure per M. Le Q polari dei punti di r incontrano perciò questo stesso piano in una retta fissa: la coniugata armonica di r rispetto a queste ultime due rette, la quale sarà pure generatrice di R^{56}. La tangente a γ nel punto M starà anch'essa nel piano $M'r$, e quindi nel cono quadrico polare di M; sarà dunque tangente tripunta di V in M. Infine il piano osculatore a γ in M è a sua volta contenuto nello spazio S_4 tangente in M al detto cono quadrico[12]) e quindi a V; e perciò la curva γ, tangente in M a una tangente tripunta di V e ivi osculatrice a un piano tangente a V, sarà osculatrice a V in M, vale a dire in tutte le 6 sue intersezioni con r [13]).

All'infuori di questi 6 punti, le intersezioni della linea γ colla forma V saranno in numero di $31.3 - 3.6 = 75$. E saranno punti della linea γ, aventi ciascuno sulla r uno dei propri coniugati nell'involuzione K_{32}; quello e questo appartenenti a V, e congiunti da una retta speciale, che starà per conseguenza pur essa su V. Saranno dunque queste, tutte e soltanto, le rette speciali contenute in V e appoggiate alla r; vale a dire: *Il luogo delle rette speciali contenute in V è una varietà M_3^{225}, intersezione di V con una forma di ordine 75* [14]) [15]) [16]).

---

[12]) Rappresentiamo la curva γ nell'intorno di M, in coordinate non omogenee, colle equazioni parametriche $x_i = a_i t^i + \ldots (i = 1, 2, \ldots 5)$, dove i termini non scritti contengono t a grado maggiore di i, e $a_1, a_2 \neq 0$; e il cono quadrico M' (o anche una qualunque ipersuperficie) contenente γ e la sua tangente in M coll'equazione

$$A_2 x_2 + \ldots + A_5 x_5 = 0 .$$

Sostituendo in questa le espressioni delle x_i, dovremo avere un'identità, e dovrà perciò mancare l'unico termine eventuale in t^2; vale a dire il polinomio A_2 dovrà mancare del termine noto. L'equazione dell'S_4 tangente in M al cono o ipersuperficie dovrà perciò essere soddisfatta per $x_3 = x_4 = x_5 = 0$; ossia questo S_4 conterrà il piano osculatore a γ in M.

[13]) Per i casi analoghi negli spazi S_3 e S_4 cfr. Ann. di Matem., n. 13—16.

[14]) Le singole generatrici della rigata R^{56} incontrano V, oltre che sulla retta r direttrice 31^{pla} di R^{56}, nei punti di una linea che ha 6 punti doppi nelle intersezioni di γ colla r (dove le generatrici MM' sono tangenti tripunte di V) e $25.2 = 50$ altri punti in ogni spazio S_4 passante per r: curva perciò di ordine 62. L'ulteriore intersezione di R^{56} con V, di ordine $56.3 - (31 + 62) = 75$, è appunto costituita dalle 75 rette speciali contenute in V e appoggiate a r.

[15]) Per una forma cubica di S_4 il numero (30) delle rette speciali appoggiate a una sua retta generica r è stato da me determinato in Ann. di Matem. n. 8, 9 per vie completamente diverse da quella qui usata nello spazio S_5. Nello spazio S_4 la curva analoga a γ è di ordine 15 e si appoggia a r in *cinque* punti, nei quali è del pari osculatrice alla forma cubica; e si ha appunto $15.3 - 3.5 = 30$. In generale, per una forma cubica di S_n questo numero è $3(2^n - n - 2)$. Per $n = 3$ le 27 rette di una superficie cubica generale sono tutte rette speciali e costituiscono l'intersezione completa con una superficie di ordine 9.

[16]) Nello spazio S_3 la congruenza (7,3) delle rette speciali (o principali) di un sistema lineare ∞^3 di quadriche senza punti basi — in particolare delle quadriche polari rispetto a una superficie generale del 3° ordine — dà un esempio molto semplice di superficie regolare di genere zero e bigenere uno (cfr. i miei lavori Mem. R. Accad. di Torino (2), vol. 51

4. Data una forma cubica generale di S_4, i piani che passano per una sua retta generica r e incontrano ulteriormente la forma in coppie di rette danno come tracce su un piano generico π i punti di una curva generale di 5° ordine; i piani delle coniche tangenti a r danno i punti di una conica 5-tangente alla quintica; gli spazi S_3 tangenti alla forma nei punti di r danno le tangenti di questa conica; i piani delle 5 coppie di rette della forma che appartengono con r ad un fascio danno i 5 punti di contatto delle due linee anzidette del piano π [17]).

Era perciò a prevedere, passando allo spazio S_5, che i piani condotti per una retta r di una forma cubica V e incontranti ulteriormente questa in coppie di rette avessero come tracce su di un generico S_3 i punti di una superficie F^5 del 5° ordine; i piani delle coppie di rette formanti fascio con r, i punti di una curva di 5° ordine δ^5 contenuta in F^5; e gli spazi S_4 tangenti a V nei punti di r, gli ∞^1 piani inviluppanti una quadrica, e precisamente un cono quadrico Δ tangente alla F^5 lungo la curva δ^5 [18]).

Le stesse considerazioni analitiche esposte per la forma cubica di S_4 al n. 2 del mio lavoro cit. di questi C.M.H., vol. 12, si possono ripetere per la forma V di S_5, colla sola differenza di una variabile in più. Assunta la r come retta $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, la V può rappresentarsi con un'equazione:

$$a_1\, x_4^2 + 2b_1\, x_4\, x_5 + c_1\, x_5^2 + 2a_2\, x_4 + 2b_2\, x_5 + a_3 = 0 \qquad (1)$$

(1901), p. 1, in part. § 14; Rend. Circolo Matem. Palermo, vol. 29 (1910), p. 98). Ho voluto perciò esaminare se l'analogo sistema ∞^3 di rette speciali di S_4 (Ann. di Matem., in part. n. 2, 3) costituisse una varietà a 3 dimensioni anche di genere zero, tale da dar lume sulla questione ancora incerta delle condizioni di razionalità di queste ultime varietà. Ma non è così; si tratta — nello spazio S_9 della Grassmanniana delle rette di S_4 — di una varietà di genere *uno* a superficie-sezioni canoniche. L'ordine della varietà è ad. es. quello della rigata intersezione del sistema ∞^3 delle rette speciali con due complessi lineari; in particolare della rigata delle rette incidenti a due piani dati, e composta a sua volta, se i due piani stanno in un S_3 e perciò si incontrano in una retta l, di due rigate; l'una avente la l come direttrice, l'altra R contenuta nel detto spazio S_3. La prima, analoga alla R^{56} qui considerata nel testo, è di ordine 25 e genere 21. Quanto alla seconda, occorre considerare la superficie f^5 intersezione dello spazio S_3 colla Hessiana della forma cubica; la curva C_{11}^{10} intersezione di f^5 colla (ossia sezione iperpiana della) superficie luogo dei punti coniugati di quelli di f^5 nell'involuzione (analoga alla T del n. 2) delle coppie di punti reciproci rispetto a tutte le quadriche del sistema ∞^4; e su questa C_{11}^{10}, coniugata di sè stessa, l'involuzione γ_2^1 delle coppie in essa contenute; involuzione priva di punti doppi, e perciò di genere 6. Questa γ_2^1 genera la rigata R richiesta, di ordine 10 e genere 6, avente a comune colla prima 10 generatrici. Il sistema ∞^3 di rette considerato ha quindi per immagine una varietà M^{35} di S_9, a curve-sezioni di genere $21 + 6 + 10 - 1 = 36$, e le cui superficie-sezioni sono superficie canoniche di genere 9: varietà pertanto di genere uno.

[17]) *V.* il mio lavoro cit. di questi Comm. Mathem. Helvet., vol. 12, n. 2, 3, e altri lavori ivi menzionati.

[18]) *Togliatti*, l. c.

dove le a, b, c sono forme nelle x_0, x_1, x_2, x_3 di grado eguale all'indice. La quadrica polare di un punto generico di r, e sia $(0, 0, 0, 0, x'_4, x'_5)$, è:

$$x'_4(a_1 x_4 + b_1 x_5 + a_2) + x'_5(b_1 x_4 + c_1 x_5 + b_2) = 0 \quad ;$$

e lo spazio S_4 tangente comune a V e a questa quadrica nel medesimo punto è:

$$a_1 x_4'^2 + 2 b_1 x'_4 x'_5 + c_1 x_5'^2 = 0$$

contenente le sole variabili x_0, x_1, x_2, x_3 che compaiono nelle a, b, c. Questi ∞^1 spazi S_4 hanno a comune il piano $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, che è il piano ϱ del n. 1. Il loro inviluppo $a_1 c_1 - b_1^2 = 0$, interpretandone l'equazione nello spazio (S_3) $x_4 = x_5 = 0$, è il cono Δ. La superficie F^5 si rappresenta (come l'analoga C^5 nel piano π) scrivendo che è nullo il discriminante della (1), come equazione nelle due variabili x_4, x_5:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 \\ b_1 & c_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \qquad (2)$$

equazione che è appunto la (3) di Togliatti, l. c. E la curva δ^5 di contatto di questa superficie col cono Δ ha per equazione:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 \\ b_1 & c_1 & b_2 \end{Vmatrix} = 0 \quad ;$$

è dunque di genere 2, come intersezione del cono Δ con una superficie cubica, all'infuori di una retta[19]).

[19]) Se alla retta generica r della forma cubica V si sostituisce una retta speciale s, lungo la quale cioè gli spazi S_4 tangenti a V siano tutti bitangenti nelle coppie di punti di un'involuzione, potremo prendere come punti fondamentali 4 e 5 i punti doppi di questa involuzione. Questi saranno allora reciproci rispetto a tutte le coniche intersezioni di V coi piani passanti per s; e sarà identicamente nullo il polinomio b_1. Il cono Δ si spezza pertanto come luogo nei due piani $a_1 = 0$, $c_1 = 0$, e come inviluppo nel loro fascio contato due volte; e la curva δ^5 si spezza nella retta $a_1 = c_1 = 0$ e nelle due coniche $a_1 = a_2 = 0$ e $c_1 = b_2 = 0$. I punti di δ^5 provengono infatti dai piani che passano per s e incontrano V secondo terne di rette di un fascio; e queste terne nel caso presente o stanno nello spazio $a_1 = c_1 = 0$, che sega V in una rigata cubica, e comprendono allora fra le tre rette la s come doppia; oppure escono da uno dei due punti 4 e 5, le cui quadriche polari sono coni e contengono infiniti piani passanti per s. L'equazione della superficie F^5 è in tal caso $a_1 c_1 a_3 - a_1 b_2^2 - c_1 a_2^2 = 0$; essa è tangente ai piani $a_1 = 0$ e $c_1 = 0$ rispett. lungo le coniche $a_1 = a_2 = 0$ e $c_1 = b_2 = 0$, e ha su ciascuna di queste 8 punti doppi $(a_1 = a_2 = c_1 a_3 - b_2^2 = 0$, risp. $c_1 = b_2 = a_1 a_3 - a_2^2 = 0)$.

Criterio di massima per stabilire la multiplicità di un punto P di F^5 per questa superficie, o per le sue intersezioni con piani e rette, sarà di considerare la superficie φ^3 intersezione di V con uno spazio S_3 passante pel piano rP — spazio rispett. generico, contenuto nell'S_4 proiettante il piano, o esso medesimo proiettante la retta considerata —, e esaminare quanti tra i piani tritangenti di questa φ^3 che passano per r sono assorbiti dal piano rP. In massima ogni S_4 passante per r e tangente a V in un punto non appartenente a r darà un piano tangente a F^5 in un suo punto generico, e viceversa; dovranno perciò coincidere la classe di V e quella di F^5. E poichè la prima vale $3.2^4 = 48$, mentre una superficie generale del 5° ordine è di classe $5.4^2 = 80$, la differenza $80 - 48 = 32$ dipenderà da punti doppi isolati di F^5; i quali pertanto, se di tipo generale (conici), saranno in numero di 16 [20]).

Gli spazi S_4 tangenti a V nei punti della retta r daranno piani tangenti comuni a F^5 e al cono Δ. Ciascuno di questi S_4 contiene due piani passanti per r e incontranti ulteriormente V in coppie di rette che formano fascio con r; e ogni S_3 condotto genericamente per uno di questi piani entro quell'S_4 sega una superficie φ^3 con punto biplanare, per la quale il piano considerato assorbe *due* fra i piani tritangenti passanti per r. I piani tangenti del cono Δ sono pertanto tutti (come è ovvio) bitangenti a F^5, in coppie di punti della curva δ^5 appartenenti alle singole generatrici di quel cono. In particolare δ^5 sarà essa stessa tangente a *sei* generatrici del cono Δ; e si avranno così 6 piani bitangenti a F^5 in coppie di punti infinitamente vicini — incontranti perciò F^5 in curve con tacnodo — e tracce degli S_4 tangenti a V nelle intersezioni della retta r colla Hessiana di V.

5. Perchè un punto P sia doppio per la superficie F^5 è necessario e sufficiente che per ogni φ^3 segata da un S_3 contenente il piano rP questo piano assorba almeno due fra i piani tritangenti che passano per r. E ciò non avviene certo, se V non ha punti doppi, qualora il piano rP incontri V in tre rette distinte. Avviene invece sempre se il piano rP incontra V, all'infuori di r, in una coppia di rette coincidenti[21]). Questo è un caso particolare di 3 rette di un fascio; perciò i punti doppi di F^5 stanno sulla curva δ^5. Questa curva è proiettata da r secondo una M_3^5,

[20]) E così è realmente (cfr. anche le ultime due linee della nota [19])). Sono i 16 punti che annullano tutti i minori di 2° ordine del determinante simmetrico (2); il loro numero fu determinato, per un determinante simmetrico di tipo anche più generale, da *Giambelli* (Atti. R. Accad. di Torino, vol. 41 (1905), p. 102).

[21]) È escluso ovviamente anche il caso in cui r conti essa doppiamente nella terna di rette, come pel piano ϱ del n. 1.

S_1-cono, che incontra V in una rigata R^{15} di direttrice r. Ogni piano della M_3^5 contiene due generatrici di questa rigata, coniugate in un'involuzione γ_2^1, le quali si proiettano in uno stesso punto della curva δ^5; e i punti doppi di F^5 provengono dalle coppie di generatrici coincidenti, cioè dagli elementi doppi dell'involuzione γ_2^1. Il numero d di questi elementi doppi è dato da una formola di Schubert[22]), la quale per $\nu = 1$ (trattandosi di involuzione), $m = k + 1 = 2$, $n = 15$ (ordine della rigata), $\mu = 5$ (ordine della M_3^5), si riduce a:

$$z = 10 - \frac{1}{2} d$$

dove z è il numero dei punti doppi della curva sezione generica di R^{15} che non sono tali in senso invariantivo per l'involuzione sezione della γ_2^1. Ora questa curva ha due punti doppi, sovrapposti a un punto semplice, sulla r; quindi $z = 2$, e $d = 16$.

Se la retta r incontra una retta speciale s contenuta in V in modo generico, cioè senza essere generatrice della rigata cubica R^3 di direttrice s (in altri termini, senza che la r stia nello spazio S_3 di questa rigata), il piano rs incontrerà V in una terza retta distinta da r, s. Però lo spazio tangente a V nel punto rs sarà tangente a V anche in un secondo punto, in generale diverso, della s; la sua traccia è perciò un piano non solo tangente a F^5 in due punti di una generatrice del cono Δ, ma anche in un terzo punto; quindi tritangente a F^5. Se più particolarmente r è generatrice della rigata R^3 dianzi menzionata, la s conta doppiamente per l'intersezione di V col piano rs; la traccia di questo piano è allora uno dei punti doppi di F^5 e appartiene a δ^5; la traccia dello spazio di R^3 è tangente quadripunta di F^5, e su questa si è portato, infinitamente vicino al punto doppio, il terzo punto di contatto con F^5.

6. Il numero (75) delle rette speciali contenute in V e incidenti a una retta generica r di V stessa (n. 3), e quindi dei piani tangenti del cono Δ, perciò bitangenti alla superficie F^5, e in pari tempo tangenti ancora a quest'ultima in un terzo punto, si può determinare per altra via, in base a quest'ultima proprietà dei piani stessi. La superficie F^5 essendo di classe 48, i piani tangenti ad essa che passano per un punto qualunque dello spazio inviluppano un cono anche di classe 48. Riferendoci al punto 0 vertice del cono Δ, questo inviluppo ∞^1 comprenderà il cono stesso Δ contato due volte — ogni suo piano tangente essendo bitangente a F^5 —

---

[22]) *Severi*, Trattato di geometria algebrica, vol. I, parte I (Bologna 1927), p. 253.

e perciò un inviluppo (cono) residuo Γ di classe 44. Il numero cercato è pertanto quello dei piani comuni ai due inviluppi conici Δ e Γ di vertice 0, cioè $2.44 = 88$, escluse le soluzioni estranee al problema, costituite dai piani comuni ai due inviluppi e tangenti a F^5 in uno stesso punto. Ora i punti di contatto di F^5 con piani passanti per 0 stanno sulla superficie di 4° ordine prima polare di 0 rispetto a F^5, la quale contiene la curva δ^5, e incontra le generatrici del cono Δ in un solo punto ulteriore, variabile. Occorre pertanto che anche quest'ultimo punto cada su δ^5; il che avviene soltanto per la generatrice di Δ tangente in 0 a δ^5 e per le 6 generatrici tangenti a δ^5 nei punti doppi della sua involuzione g_2^1.

Nel primo caso si tratta del piano tangente in 0 alla superficie F^5, comune appunto ai due inviluppi Δ e Γ. Esso incontra F^5 in una curva per la quale 0 è punto doppio a tangenti distinte[23]); e queste tangenti sono rispett. le generatrici (o caratteristiche) dei due inviluppi. Tale piano è perciò un loro elemento comune semplice.

Le 6 generatrici del cono Δ tangenti a δ^5 in punti distinti da 0 hanno ivi contatto tripunto colla prima polare di 0; sono quindi generatrici cuspidali del cono Γ, ma semplici per Δ, col medesimo piano tangente. Questo piano va perciò computato come *due* elementi comuni ai due inviluppi[24]).

Riassumendo: $88 - (1 + 2.6) = 75$, c. s. v. d.

(Reçu le 19 mai 1943.)

---

[23]) Il piano tangente in 0 alla superficie F^5 è la traccia dello spazio Σ_4 tangente a V nel punto rt (n. 1). Un S_3 generico pel piano $\varrho \equiv rt$ incontra V in una superficie cubica φ^3 con due punti doppi conici su r, per la quale ϱ conta solo semplicemente fra i piani tritangenti che passano per r; 0 è pertanto punto semplice di F^5. Se però questo S_3 è contenuto nello spazio Σ_4, uno dei punti doppi di φ^3 cade in rt e è biplanare; il piano ϱ assorbe perciò almeno due dei piani passanti per r e tritangenti a φ^3. Ne assorbe tre per due distinti di questi ultimi S_3, le cui tracce sono perciò le due tangenti tripunte della F^5 in 0. Uno di questi contiene oltre ϱ il secondo piano passante per r e contenuto nella quadrica polare del punto rt; esso sega una φ^3 per la quale il punto doppio conico è assorbito da quello biplanare, che diventa di tipo B_5; e ha per traccia la generatrice del cono Δ tangente in 0 alla δ^5. L'altro è determinato dal piano ϱ e dal piano tangente a V lungo la t; esso sega una φ^3 per la quale il punto rt è biplanare di tipo B_4 colla t come intersezione dei due piani tangenti; e che ha in più su r un punto doppio conico.

[24]) Nel piano, la tangente a una curva in una cuspide (di 1ª specie) è elemento semplice per la curva inviluppo. Il caso duale di quello qui considerato è quello di due curve piane tangenti in un loro comune punto semplice, che è per di più flesso di una di esse e non tale per l'altra: esso assorbe evidentemente due sole loro intersezioni.