Salvatore Pincherle

Sopra una formola di analisi

Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. **19** (1881), p. 385–386

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_1881_1>

SOPRA UNA FORMOLA DI ANALISI

PER

S. PINCHERLE.

Dalla formola

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

deduco

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1+x+x^2+\ldots)=\sum_{m=n-1}^{m=\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}\,x^{m-n+1},$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\frac{x}{1-x}\right)^n=c_1x\sum_{m=0}^{\infty}x^m+c_2x^2\sum_{m=1}^{\infty}mx^{m-1}+c_3x^3\sum_{m=2}^{\infty}\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}+\ldots$$

Ciò posto, se si vuole che lo sviluppo $\Sigma\, c_n\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$ coincida con una data serie di potenze $\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}\, h_n x^n$, bisognerà che i coefficienti di x^n siano eguali nei due membri (*), e si avranno le equazioni di condizione

$$\text{(I)}\qquad c_1+(m-1)c_2+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}c_3+\ldots+c_m=h_m.$$

Ma se pongo

$$\frac{x}{1-x}=z,$$

si ha dall'eguaglianza $\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\frac{x}{1-x}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}h_nx^n$ l'altra

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}h_n\left(\frac{z}{1+z}\right)^n,$$

da cui si deduce fra le c e le h la relazione

$$\text{(II)}\qquad c_n=h_n-(n-1)h_{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}h_{n-2}-\ldots\pm h_1.$$

(*) In una Memoria che ho presentata all'Accademia delle scienze di Bologna e che sarà pubblicata fra breve, dimostro che lo sviluppo in discorso si può ordinare per le potenze di x.

Le equazioni (II) dànno dunque la soluzione delle equazioni lineari (I) in cui si riguardino le c come incognite e quando vi si faccia $m=1, 2, 3, \dots n$. Ma le equazioni del sistema (I), risolute coi determinanti, danno

$$c_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & h_2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & h_3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \dots & h_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & n-1 & \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3} & \dots & h_n \end{vmatrix},$$

onde

$$\text{(III)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & h_1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & h_2 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & h_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & n-1 & \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} & \dots & h_n \end{vmatrix} = h_n - (n-1)h_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} h_{n-2} - \dots \pm h_n.$$

Questa è la formola in discorso: gli elementi del determinante posti a sinistra della diagonale formano il triangolo di Pascal.

Facendo nella (III)

$$h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = x \quad , \quad h_3 = x^2 \,; \dots h_n = x^{n-1},$$

si ottiene

$$\text{(IV)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & x \\ 1 & 2 & 1 & \dots & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & n-1 & \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix} = (x-1)^{n-1}.$$