

SALVATORE PINCHERLE

SALVATORE PINCHERLE

I sistemi ricorrenti di prim'ordine e di secondo grado

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie 4, Vol. **5** (1889), p. 8–12

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_1889_1>

Matematica. — *I sistemi ricorrenti di prim'ordine e di secondo grado.* Nota del Corrispondente S. PINCHERLE.

« Quando un sistema di funzioni

$$p_0(x), p_1(x), \dots p_n(x), \dots$$

è tale che fra $m+1$ consecutive passi una relazione lineare, dico che il sistema è *ricorrente dell'ordine m* , e se i coefficienti della relazione lineare contengono la variabile x razionalmente ed al grado k al più, dico che il sistema è *del grado k* .

« In questa Nota, estratta da un lavoro in preparazione sui sistemi ricorrenti in generale, mi propongo di studiare quei sistemi di funzioni razionali (cui si possono ricondurre tutti i sistemi ricorrenti di prim'ordine e di secondo grado) definiti dalla relazione

$$(1) \quad p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)(x - \beta_n)p_n(x),$$

occupandomi specialmente degli sviluppi in serie procedenti per tali funzioni. Questi sistemi mi sono sembrati degni di considerazione particolare, inquantochè, mentre il loro studio rivela fatti nuovi, senza riscontro con ciò che si osserva nei sistemi di prim'ordine e di primo grado già studiati dal Frobenius ⁽¹⁾ e dal Bendixson ⁽²⁾, d'altra parte il passaggio dai sistemi di secondo grado a quelli di grado superiore non presenta serie difficoltà.

« I menzionati autori hanno studiato, sotto punti di vista differenti, le serie procedenti per funzioni $p_n(x)$ definite da

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)p_n(x),$$

e sotto ipotesi più restrittive nel primo, meno nel secondo, ma che richiedono che il gruppo di punti

$$(\alpha_n) = \alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n, \dots$$

abbia un unico punto limite α posto a distanza finita. Dirò *normale* un tale gruppo ⁽³⁾. Mentre parecchi teoremi della teoria delle serie di potenze sono

⁽¹⁾ *Ueber die Entwicklung der analytischen Functionen*, u. s. w., Crelle, T. 73, 1871.

⁽²⁾ *Sur une extension all'infini de la formule d'interpolation de Gauss*. Acta, T. 9, 1887.

⁽³⁾ Quando il gruppo α_n ha per limite l'infinito, si perde in parte l'analogia colle serie di potenze. Il Bendixson ha studiato la serie di funzioni $p_n(x)$ anche in questo caso, ed ha trovato proprietà che avvicinano piuttosto queste serie alle serie di potenze di un'esponenziale.

applicabili a queste serie, che ne sono una manifesta generalizzazione, altri non sono più validi: è notevole in particolare l'esistenza degli *sviluppi dello zero* avvertita dal Fröbenius. Ma il risultato più importante che emerge dai lavori citati, è la possibilità dello sviluppo in serie di $p_n(x)$ per ogni funzione $f(x)$ regolare nell'intorno di $x = \alpha$.

« Ora questo risultato, per le serie di funzioni $p_n(x)$ appartenenti ad un sistema ricorrente di grado superiore al primo, non si mantiene più in modo altrettanto generale, e sono quindi necessarie delle distinzioni che mi propongo di stabilire per il caso dei sistemi di secondo grado.

« 1. Abbiasi dunque il sistema di funzioni razionali intere, definite da
(1) $p_0(x) = 1, \quad p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)(x - \beta_n)p_n(x),$
e supponiamo che i gruppi $(\alpha_n), (\beta_n)$ siano normali, coi punti limiti distinti e a distanza finita, e che senza scapito della generalità, si possono supporre ridotti ai punti $+1$ e -1 .

« Essendo

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}(x)}{p_n(x)} = x^2 - 1,$$

una serie della forma

$$(3) \quad \sum c_n p_n(x)$$

dove sia

$$c_n \sim \frac{1}{q^n},$$

sarà convergente assolutamente per ogni valore di x tale che sia

$$|x^2 - 1| < q,$$

e quindi pei valori di x presi nell'interno di una cassinoide coi fuochi ± 1 .
Giungiamo così al seguente risultato:

« I campi di convergenza delle serie di funzioni $p_n(x)$ sono limitati da un sistema di cassinoidi omofocali.

« Paragonando la serie (3) colla

$$\sum c_n z^n,$$

si scorge che secondochè questa converge in un cerchio di raggio minore, maggiore o eguale all'unità, la (3) converge in una cassinoide a due ovali, ad un'ovale sola o in una lemniscata.

« 2. Si può dimostrare senza difficoltà che il rapporto $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ tende uniformemente al suo limite $x^2 - 1$, e come conseguenza si può ricavare la convergenza in egual grado della serie (3) nell'interno del proprio campo di convergenza. Ne risulta che in questo campo, se connesso, la serie (3) rappresenta una funzione analitica monogena; ma se non connesso — cassinoide a due ovali o lemniscata — la stessa serie può rappresentare due diverse funzioni analitiche.

“ 3. Pongasi

$$(x - \alpha_n)(x - \beta_n) = x^2 + a_n x + b_n,$$

e si rappresentino con $q_n(z)$ le funzioni di un secondo sistema, definito dalle relazioni

$$(4) \quad q_{n-1}(z) = (z^2 + a_n z + b_n) q_n(z) \\ (n = 1, 2, 3, \dots, \infty).$$

insieme a

$$(z^2 + a_0 z + b_0) q_0 = 1.$$

“ Si formino con queste le serie

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z) p_n(x), \quad \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_n(z) p_n(x);$$

la prima di queste è convergente assolutamente per valori di x e di z tali che sia

$$|x^2 - 1| < |z^2 - 1|,$$

cioè per x interno e z esterno alla medesima cassinoide; la seconda lo sarà a fortiori sotto la medesima condizione, poichè le a_n tendono a zero per $n = \infty$.

“ Dalle (1) e (4) si deduce senza difficoltà

$$x^2 \varphi + x \varphi_1 = \sum_0^{\infty} (p_{n+1} - b_n p_n) q_n = -1 + z^2 \varphi + z \varphi_1,$$

onde

$$(5) \quad \frac{1}{z - x} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + z + x) q_n(z) p_n(x).$$

“ Mediante questa formola e l'applicazione del teorema di Cauchy, qualunque funzione $f(x)$ data regolare entro una cassinoide connessa, o entro un'ovale di una cassinoide non connessa, sarà sviluppabile in serie della forma

$$(6) \quad f(x) = \Sigma (c_n + c'_n x) p_n(x),$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int (a_n + z) q_n(z) f(z) dz,$$

$$c'_n = \frac{1}{2\pi i} \int q_n(z) f(z) dz,$$

l'integrazione essendo estesa al contorno dell'ovale in cui è data la funzione. Convieni notare che se il campo dato è una delle ovali di una cassinoide non connessa, la serie

$$(6) \quad \Sigma (c_n + x c'_n) p_n(x)$$

sarà convergente anche nella seconda ovale, ma potrà non rappresentare la medesima funzione analitica.

“ 4. Lo sviluppo della forma (6), trovato per una funzione data entro una cassinoide, non è unico; in altre parole, esistono, coi sistemi $p_n(x)$, degli

sviluppi dello zero. A dimostrarlo, considero prima una funzione $f(x)$, data nell'interno e sul contorno di una cassinoide c connessa. Sia c' una cassinoide pure connessa ed interna a c . Si esclude che lungo le linee c , c' si trovino alcuni dei punti α_n, β_n ; fra c e c' vi siano invece i punti

$$\alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r'} \quad \text{e} \quad \beta_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_{s'}.$$

Si avrà allora entro c :

$$f(x) = \Sigma (c_n + c'_n x) p_n(x),$$

ed entro c' :

$$f(x) = \Sigma (\bar{c}_n + \bar{c}'_n x) d_n(x).$$

Essendo

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c (a_n + z) f(z) q_n(z) dz,$$

e

$$\bar{c}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c'} (a_n + z) f(z) q_n(z) dz,$$

la differenza $c_n - \bar{c}_n$ sarà eguale alla somma dei residui della funzione

$$(a_n + z) f(z) q_n(z)$$

nella corona compresa fra c e c' ; e poichè questa funzione è infinita solo nei poli di $q_n(z)$, che sono (per n maggiore di r o di s) i punti

$$\alpha_i, (i = r \dots r') \quad \text{e} \quad \beta_j, (j = s \dots s'),$$

così, detti $R_{i,n}$ ed $S_{j,n}$ i residui di $q_n(z)$ in quei punti, si avrà:

$$c_n - \bar{c}_n = \sum_{i=r}^{r'} (a_n + \alpha_i) f(\alpha_i) R_{i,n} + \sum_{j=s}^{s'} (a_n + \beta_j) f(\beta_j) S_{j,n} = K_n;$$

ed analogamente si calcola

$$c'_n - \bar{c}'_n = K'_n,$$

e la serie

$$\Sigma (K_n + K'_n x) p_n(x)$$

è uno sviluppo dello zero convergente nell'interno della cassinoide c' .

« Mediante una dimostrazione analoga a quella fatta dal Frobenius al § 4 della Memoria citata pel caso dei sistemi di primo grado, si prova che tutti gli sviluppi dello zero convergenti entro una cassinoide connessa, e linearmente indipendenti, sono in numero finito.

« Considerando in secondo luogo due cassinoidi a due ovali, e fra queste essendo 0 , $0'$ quelle che circondano il punto 1 , e $0'$ interno ad 0 , si potrà limitarsi a supporre che fra 0 e $0'$ cadano soltanto punti del gruppo (α_n) , e questi daranno luogo a sviluppi dello zero analoghi a quelli del caso precedente.

« Finalmente, supponendo di avere una funzione data nella cassinoide connessa c , e considerando entro questa un'ovale 0 appartenente ad una cassinoide non connessa, fra queste curve cadranno punti del gruppo (α_n) in

numero finito, ma infiniti punti del gruppo (β_n) : da ciò segue che si potranno avere infiniti sviluppi dello zero convergenti entro 0 ⁽¹⁾.

« 5. Se consideriamo gli sviluppi in serie della forma

$$(7) \quad S(x) = \sum c_n p_n(x),$$

otteniamo da questi i valori di $S(\alpha_i)$ ed $S(\beta_i)$ in funzione lineare dei coefficienti c_n . Ma reciprocamente le c_n si possono ricavare in funzione lineare tanto delle $S(\alpha_i)$ che delle $S(\beta_i)$: perciò fra le $S(\alpha_i)$, $S(\beta_i)$ passano infinite relazioni lineari. Da ciò risulta che una funzione analitica data regolare in una cassinoide connessa, non potrà in generale svolgersi in serie della forma (7), e che se una funzione regolare in una ovale di una cassinoide non connessa potrà svilupparsi in tale forma, la serie, convergente anche nell'ovale complementare, vi rappresenterà in generale una funzione analitica diversa. La questione della sviluppabilità di una funzione in serie della forma (7), che richiede maggiori particolari, formerà l'oggetto di una seconda Nota; in cui si considereranno pure quei sistemi (α_n) , (β_n) che hanno uno od ambedue i punti limiti all'infinito ».

(1) Alcuni dei risultati dati nei §§ precedenti non sono senza analogia con quelli ottenuti negli sviluppi in serie di funzioni di Lamé dal Lindemann (Mathem. Annalen, t. XIX, 1881); ciò risulta dalla somiglianza di forma delle curve di convergenza.