

SALVATORE PINCHERLE

SALVATORE PINCHERLE

Sulle operazioni distributive commutabili con una operazione data

Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, Vol. **30** (1894-1895), p.
820-844

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_1895_1>

*Sulle operazioni distributive commutabili
con una operazione data;*

Nota del Prof. SALVATORE PINCHERLE.

In una Nota intitolata: “ *Sulle operazioni funzionali distributive* „ e pubblicata nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (S. V, T. IV, 17 febbraio 1895) ho studiato le proprietà generali di quelle operazioni che applicate ad una funzione analitica danno come risultato una funzione analitica, e che godono inoltre della proprietà distributiva (*). Studiando, come ho fatto,

(*) Dalla formula (7) della citata Nota risulta che un'operazione funzionale distributiva $A(\varphi)$ può, almeno formalmente, rappresentarsi mediante una serie procedente per le derivate successive della funzione arbitraria φ . Ne risulta immediatamente la possibilità della rappresentazione formale di ogni tale operazione sotto forma di un integrale definito $\int A(x, y) \varphi(y) dy$, dove $A(x, y)$ è una funzione di due variabili la cui natura dipende dalle proprietà dell'operazione considerata. Il prof. Volterra mi ha fatto notare come, sotto

in modo sintetico ed astrazione fatta da ogni loro rappresentazione, i caratteri generali di questa classe di operazioni, si presentano questioni nuove ed interessanti che offrono una qualche affinità con quelle relative alla teoria dei gruppi di trasformazioni (*); una di queste questioni, e precisamente lo studio delle proprietà del gruppo delle operazioni distributive commutabili con una operazione data, forma l'oggetto della presente memoria e spero che non riuscirà priva di interesse la semplicità delle considerazioni che permettono di ottenere le proprietà generali dell'accennato gruppo e che conducono alla risoluzione delle equazioni funzionali cui esso dà origine.

1. In ciò che segue si rappresenteranno colle lettere greche funzioni di una sola variabile, appartenenti ad un determinato insieme o *campo funzionale*; le lettere romane minuscole denoteranno numeri, le maiuscole significheranno operazioni funzionali distributive che applicate ad una funzione del campo funzionale considerato danno come risultato una funzione appartenente allo

questa forma, le operazioni funzionali *distributive* vengano a formare il primo anello della catena di operazioni funzionali rappresentate dai successivi termini dello sviluppo in serie (estensione di quello del Taylor) che egli ha fatto conoscere nella sua Nota I: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* (R. C. della R. Accademia dei Lincei, S. IV, T. III, 1837). Le operazioni distributive sarebbero, in quest'ordine di idee e nel campo delle operazioni funzionali, ciò che le funzioni lineari sono nel campo delle funzioni. Forse il metodo sintetico con cui, nella citata nota, ho iniziato lo studio delle operazioni distributive, metodo che permette di prescindere dalla rappresentazione dell'operazione sotto forma d'integrale e facilita la considerazione della sovrapposizione (o prodotto) di due o più simili operazioni, si presterebbe con analoghi vantaggi allo studio delle operazioni più complesse rappresentate dai termini d'ordine superiore nel ricordato sviluppo del prof. Volterra.

(*) Il dott. Levi-Civita in alcune recentissime note pubblicate nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo, si è proposto ed ha risoluto con successo due interessanti problemi relativi ai sistemi di operazioni distributive; questi lavori fanno fede del giovamento che offrono, in questo genere di ricerche, i metodi applicati dal Lie nello studio generale dei gruppi di trasformazioni.

stesso campo. Sul campo funzionale si fa per ora la sola ipotesi che se ad esso appartengono due funzioni φ , ψ , vi appartenga pure la funzione $a\varphi + b\psi$, a e b essendo costanti arbitrarie.

2. Eseguendo sul risultato ψ dell'operazione ad un valore $A(\varphi)$ (*) la nuova operazione B , si dice di avere eseguito su φ l'operazione BA , prodotto di A per B . Le operazioni A, B sono *commutabili* quando sia $AB = BA$.

Data l'operazione A , l'insieme delle operazioni commutabili con essa costituisce un *gruppo* nel quale si contiene anche l'operazione *unità*; lo studio di questo gruppo forma l'oggetto della presente Nota.

3. Chiameremo *radici* od *integrali* di un'operazione A quelle funzioni φ per le quali è

$$A(\varphi) = 0.$$

Per queste radici, di cui noi considereremo quelle sole che appartengono al campo funzionale Γ cui conveniamo di limitarci, valgono le seguenti osservazioni:

a) Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sono radici appartenenti al campo Γ , sono pure tali $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_r\alpha_r$, essendo $c_1, c_2, \dots, c_r$ costanti arbitrarie;

b) Denotando con α una radice arbitraria dell'operazione A , l'operazione inversa A^{-1} non sarà generalmente ad un valore, e se è $A^{-1}(\varphi) = \psi$, sarà anche $A^{-1}(\varphi) = \psi + \alpha$;

c) Dette *linearmente indipendenti* r funzioni fra cui non passi alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, se nel campo funzionale Γ che si considera l'operazione A ammette r e non più radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ linearmente indipendenti, queste si diranno formare un *sistema fondamentale* di radici in quel campo. Ogni altra radice appartenente a Γ avrà la forma

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_r\alpha_r;$$

(*) Quando non sia dichiarato espressamente il contrario, le $A, B, \dots$ sono operazioni distributive ad un valore.

essa si dirà *radice particolare* se delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_r$ si assegnano i valori, *radice generale* invece se le costanti si lasciano indeterminate. Ogni sistema di r radici particolari

$$\alpha'_i = c_{i1}\alpha_1 + c_{i2}\alpha_2 + \dots + c_{ir}\alpha_r, \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

costituirà pure un sistema fondamentale nel campo considerato quando il determinante $(c_{11} \ c_{22} \ \dots \ c_{rr})$ sia differente da zero. Essendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ linearmente indipendenti, l'insieme delle funzioni rappresentate da $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_r\alpha_r$ si dirà *sistema lineare d'ordine r* ; se A ammette come radici tutte le funzioni di un sistema d'ordine r , questo sistema si dirà per brevità una *radice d'ordine r* .

4. a) Siano A, B due operazioni ad un valore, commutabili, senza radici comuni; sia α una radice di A . Sarà

$$AB(\alpha) = BA(\alpha) = 0,$$

e perciò $B(\alpha)$, non potendo essere zero, sarà pure una radice di A .

b) L'operazione A abbia nel campo Γ una radice generale d'ordine r , e sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ un suo sistema fondamentale; $B(\alpha_i)$ essendo radice di α e (§ 1) nello stesso campo funzionale, si avrà:

$$B(\alpha_i) = c_{i1}\alpha_1 + c_{i2}\alpha_2 + \dots + c_{ir}\alpha_r = \alpha'_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r).$$

La $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r$ formano un nuovo sistema fondamentale; se infatti fosse

$$c'_1\alpha'_1 + c'_2\alpha'_2 + \dots + c'_r\alpha'_r = 0,$$

ne verrebbe

$$B(c'_1\alpha_1 + c'_2\alpha_2 + \dots + c'_r\alpha_r) = 0$$

il che è impossibile poichè $c'_1\alpha_1 + c'_2\alpha_2 + \dots + c'_r\alpha_r$ non è nulla, per essere le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ linearmente indipendenti, nè radice

di B, per essere A e B senza radici comuni. Ne segue che ogni radice $\bar{\alpha}$ di A del campo considerato potendosi scrivere

$$\bar{\alpha} = h_1 \alpha'_1 + h_2 \alpha'_2 + \dots + h_r \alpha'_r,$$

dove $h_1, h_2, \dots, h_r$ sono costanti opportune, sarà

$$B(h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \dots + h_r \alpha_r) = \bar{\alpha},$$

talchè esiste sempre una radice $\bar{\varphi}$ di A tale da soddisfare all'equazione $B(\varphi) = \bar{\alpha}$, essendo $\bar{\alpha}$ radice arbitrariamente data della stessa A. La soluzione più generale dell'equazione

$$(1) \quad B(\varphi) = \bar{\alpha}$$

sarà, detta $\alpha^{(1)}$ la radice di A che vi soddisfa:

$$\varphi = \alpha^{(1)} + \beta,$$

essendo β la radice più generale di B.

c) Se α è la radice generale di A, la soluzione φ della equazione $B(\varphi) = \alpha$ sarà pure la radice generale di A, poichè posto $\alpha = c_1 \alpha_1 + \dots + c_r \alpha_r$, si ha $\varphi = c_1 \alpha'_1 + \dots + c_r \alpha'_r$, dove $c_1, \dots, c_r$ sono arbitrarie e $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r$ linearmente indipendenti.

d) Data l'equazione $AB(\varphi) = 0$, ed essendo α, β gli integrali generali di A e B, l'equazione sarà soddisfatta sia per $B(\varphi) = 0$, cioè $\varphi = \beta$, sia per $B(\varphi) = \alpha$; ma la soluzione generale di quest'ultima è $\alpha + \beta$, talchè $\alpha + \beta$ è pure la radice generale di AB.

Le considerazioni del presente § si riassumono nella seguente proposizione:

“ Siano A, B due operazioni commutabili, senza radici comuni, e le cui radici generali nel campo funzionale che si considera siano d'ordine finito. Applicando ad una radice particolare o generale di A l'operazione B, si ottiene da capo una radice di A, rispettivamente particolare o generale, e la radice generale dell'operazione AB nel campo funzionale considerato è la somma delle radici generali di A e B ”.

L'ordine delle radici di A , B essendo r ed r' rispettivamente, $r + r'$ sarà l'ordine della radice generale di AB .

5. Quando le operazioni commutabili A , B hanno radici comuni, la proposizione precedente è soggetta ad una modificazione. Detto ancora $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ un sistema fondamentale di radici di A , le $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \dots \alpha_r$ siano comuni anche a B , essendo $0 \leq s < r$. Si ponga

$$B(\alpha_1) = \alpha'_1, \dots B(\alpha_s) = \alpha'_s,$$

e le $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_s$ saranno radici di A , senza relazione lineare poichè se fosse $c_1 \alpha'_1 + \dots + c_s \alpha'_s = 0$, dovrebbe essere $c_1 \alpha_1 + \dots + c_s \alpha_s$ nullo o radice di B ; mentre nullo non può essere poichè $\alpha_1 \dots \alpha_r$ formano un sistema fondamentale, e nemmeno radice di B poichè fra le α sono tali $\alpha_{s+1} \dots \alpha_r$, linearmente indipendenti dalle precedenti. Ora qualunque radice $\bar{\alpha}$ di A appartenente al sistema d'ordine s definito da $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_s$, sarà tale che la soluzione φ dell'equazione

$$(1) \quad B(\varphi) = \bar{\alpha}$$

sia pure una radice di A ; ma se nella (1) la $\bar{\alpha}$ rappresenta una radice non appartenente al detto sistema d'ordine s , la equazione non ammetterà una soluzione φ che sia radice di A . Si può ammettere che la (1) non abbia soluzione nel campo funzionale che si considera, come si può ammettere che ne abbia una, che diremo λ .

Variando il secondo membro $\bar{\alpha}$ della (1), varierà la λ , ma essa non potrà avere più di $r - s$ determinazioni che colle α e le β formino un sistema linearmente indipendente: siano infatti $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_{r-s}$, $r - s + 1$ determinazioni di λ ; si avrà

$$B(\lambda_0) = \alpha^{(0)}, B(\lambda_1) = \alpha^{(1)}, \dots B(\lambda_{r-s}) = \alpha^{(r-s)},$$

$$B(\alpha_1) = \alpha'_1, B(\alpha_2) = \alpha'_2, \dots B(\alpha_s) = \alpha'_s;$$

ora fra i secondi membri passa necessariamente una relazione

lineare, onde dovrà essere per coefficienti $c_0, \dots, c_{r-s}$ opportuni e per un'opportuna radice α di A :

$$B(c_0\lambda_0 + c_1\lambda_1 + \dots + c_{r-s}\lambda_{r-s} + \alpha) = 0,$$

onde

$$c_0\lambda_0 + c_1\lambda_1 + \dots + c_{r-s}\lambda_{r-s} + \alpha = \beta,$$

cioè le $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-s}$, le α e le β sono linearmente dipendenti.

Essendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ le soluzioni dell'equazione (1), indipendenti linearmente fra loro e dalle α e β e perciò in numero di $r-s$ al più nel campo funzionale che si considera, ed indicando con λ una combinazione lineare qualunque delle $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, la soluzione più generale della equazione

$$(2) \quad AB(\varphi) = 0$$

sarà $\varphi = \lambda + \alpha + \beta$; infatti la (2) non è soddisfatta, oltre a $\varphi = 0$, che per $\varphi = \beta$ o $B(\varphi) = \alpha$. La proposizione che termina il § precedente va dunque, nella nuova ipotesi, modificata come segue:

“ Siano A, B due operazioni commutabili aventi nel campo funzionale che si considera, un sistema di radici comuni di ordine finito. La radice generale della operazione AB nel campo che si considera sarà della forma $\lambda + \alpha + \beta$, α, β essendo le radici generali di A e B rispettivamente, e λ un sistema lineare di nuove funzioni; l'ordine del sistema $\lambda + \alpha + \beta$ non potendo superare la somma degli ordini di α e β ”.

6. Dalle proposizioni dei §§ precedenti si deducono facilmente varie conseguenze; ad esempio:

a) Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono operazioni commutabili senza radici comuni, ed α_i rappresenta la radice generale di A_i , dell'ordine r_i , l'operazione $A_1 A_2 \dots A_n$ avrà per radice generale nel campo che si considera la $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, dell'ordine $r_1 + r_2 + \dots + r_n$;

b) Se le $A_1, A_2, \dots, A_n$ hanno radici comuni, la radice generale di $A_1 A_2 \dots A_n$ sarà, nel campo funzionale che si considera, dell'ordine $r_1 + r_2 + \dots + r_n$ al più, ed in essa sarà contenuta

la $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ che, in questo caso, è d'ordine inferiore ad $r_1 + r_2 + \dots + r_n$;

c) Se l'operazione A ammette, in un campo funzionale Γ , la radice α dell'ordine r , l'operazione A^n ammetterà in quel campo una radice generale dell'ordine nr al più, in cui saranno contenute le radici di A , $A^2, \dots A^{n-1}$.

7. Nel campo funzionale che si considera la radice dell'operazione A sia solamente del prim'ordine: detta α_0 una radice particolare le altre saranno dunque della forma $c\alpha_0$, essendo c una costante arbitraria. L'operazione A^2 avrà dunque al più una radice del secondo ordine, ... l'operazione A^n al più una radice dell' n^{esimo} ordine; ed indicando rispettivamente con $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$ una soluzione delle equazioni

$$A(\varphi) = \alpha_0, A(\varphi) = \alpha_1, \dots A(\varphi) = \alpha_{n-1},$$

la radice generale di A^n sarà della forma

$$c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \dots + c_{n-1}\alpha_{n-1}.$$

Il sistema $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ è dunque definito da

$$(3) \quad A(\alpha_1) = \alpha_0, A(\alpha_2) = \alpha_1, A(\alpha_3) = \alpha_2, \dots$$

Sia ora B un'operazione commutabile con A ; per il teorema del § 4, la $B(\alpha_0)$ sarà da capo una radice di A , cioè della forma $k_0\alpha_0$, essendo k_0 una costante determinata, per la medesima ragione $B(\alpha_1)$ sarà una radice di A^2 , cioè sarà:

$$B(\alpha_1) = k_1\alpha_0 + c_1\alpha_1;$$

prendendo l'operazione A da ambo i membri, viene

$$k_0\alpha_0 = c_1\alpha_0, \text{ onde } c_1 = k_0,$$

talchè

$$B(\alpha_1) = k_1\alpha_0 + k_0\alpha_1.$$

Analogamente $B(\alpha_2)$ sarà una radice di A^3 , e si trova in modo analogo

$$B(\alpha_2) = k_2\alpha_0 + k_1\alpha_1 + k_0\alpha_2$$

ed in generale

$$(4) \quad B(\alpha_n) = k_n\alpha_0 + k_{n-1}\alpha_1 + \dots + k_1\alpha_{n-1} + k_0\alpha_n.$$

Data la successione (3) e la operazione B , esiste dunque un sistema perfettamente determinato di coefficienti $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$ mediante i quali si costituisce il sistema delle eguaglianze (4).

8. " Abbiassi ancora l'operazione A con una sola radice di " prim'ordine nel campo funzionale considerato Γ , e sia B una " operazione che ammetta pure quella radice. È possibile di " determinare un'operazione distributiva X ad un sol valore nel " campo funzionale considerato, e tale che

$$B = XA \text{ „}$$

Infatti, sia φ una funzione del campo Γ ; si avrà $A(\varphi) = \chi$, $B(\varphi) = \psi$, essendo χ, ψ funzioni dello stesso campo Γ . L'operazione X è quella che applicata a χ , dà ψ come risultato. Ora dall'essere A e B distributive, segue che l'operazione X , applicata a $\chi_1 + \chi_2$, dà $\psi_1 + \psi_2$ come risultato ed è perciò distributiva; inoltre essa è ad un valore poichè se a χ potessero corrispondere le due funzioni ψ e ψ' , esisterebbero due funzioni φ, φ' tali che

$$A(\varphi) = A(\varphi') = \chi \text{ mentre } B(\varphi) = \psi, B(\varphi') = \psi'.$$

Se ne deduce $\varphi' = \varphi + \alpha_0$, dove α_0 è radice di A ; ma la radice di A essendo tale, per ipotesi, anche per B , ne risulterà $B(\varphi') = B(\varphi)$ e perciò ψ' non potrà differire da ψ .

La proposizione precedente vale qualunque siano le operazioni distributive A e B , purchè ad un valore. Se ora A e B si suppongono commutabili, dico che sono commutabili anche A ed X . Si prenda infatti χ come funzione data; ne verrà

$$AX(\chi) = A(\psi) = AB(\varphi);$$

ma A è commutabile con B , onde

$$AX(\chi) = BA(\varphi) = B(\chi),$$

cioè

$$B = AX.$$

9. Data l'operazione B ad un valore e commutabile con A , che come nei §§ precedenti ha nel campo Γ solo una radice di prim'ordine, si formi la successione di funzioni $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ come al § 7, indi, come è indicato a quello stesso §, si determini il sistema di costanti $k_0, k_1, k_2, \dots$ tali che

$$(4) \quad B(\alpha_n) = k_n \alpha_0 + k_{n-1} \alpha_1 + \dots + k_0 \alpha_n.$$

La operazione $B - k_0$ ammetterà come radice α_0 , e perciò per il § precedente si potrà scrivere

$$B(\varphi) - k_0 \varphi = B_1 A(\varphi) = AB_1(\varphi),$$

essendo B_1 un'operazione ad un valore. Nell'uguaglianza precedente si ponga $\varphi = \alpha_1$; se ne deduce

$$B_1(\alpha_0) = k_1 \alpha_0,$$

talchè l'operazione $B_1 - k_1$ ammette come radice α_0 , ed applicando il § precedente, si può ancora scrivere

$$B_1(\varphi) - k_1 \varphi = B_2 A(\varphi) = AB_2(\varphi),$$

essendo B_2 una nuova operazione ad un valore; da cui

$$B = k_0 + k_1 A + B_2 A^2.$$

In modo analogo si sostituirà in quest'ultima uguaglianza, la α_2 al posto della funzione arbitraria e si troverà

$$B_2(\alpha_0) = k_2\alpha_0$$

onde $B_2 - k_2$ ammette la radice α_0 , e così via: giungendosi finalmente alla uguaglianza

$$(5) \quad B = k_0 + k_1 A + k_2 A^2 + \dots + k_{n-1} A^{n-1} + B_n A^n,$$

dove B_n è un'operazione ad un valore commutabile con A e quindi con A^n .

10. Nella formula (5) così ottenuta il valore di n è arbitrariamente grande. Ammettiamo che per le funzioni di un campo funzionale Γ_1 contenuto in Γ il termine $B_n A^n$ tenda a zero quando n cresce indefinitamente; la operazione B viene allora rappresentata in tale campo da una serie procedente per le potenze dell'operazione A :

$$(6) \quad k_0 + k_1 A + k_2 A^2 + \dots + k_n A^n + \dots,$$

in cui il sistema dei coefficienti $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$ è univocamente determinato, come si è visto.

Reciprocamente ogni serie della forma (6) rappresenta per le funzioni che la rendono convergente o, come diciamo, nel campo funzionale in cui essa si mantiene convergente, una operazione distributiva ad un valore e commutabile con A . Al campo di convergenza delle serie (6) appartengono certamente le funzioni $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, poichè per esse la serie si riduce ad un numero finito di termini.

Diremo che un'operazione è regolare in A quando è rappresentabile mediante una serie di potenze di A a coefficienti costanti. Nel suo campo funzionale di convergenza, il quale è costituito per lo meno dalle funzioni $\alpha_0, \alpha_1, \dots$, questa operazione è ad un valore e commutabile con A . La moltiplicazione delle operazioni regolari in A si fa colle regole stesse della moltiplicazione delle serie di potenze di una variabile. Reciproca-

mente ogni operazione commutabile con A e ad un valore è, per il § 9, regolare in A in un campo funzionale costituito per lo meno dalle funzioni $\alpha_0, \alpha_1, \dots$

Fra le operazioni regolari in A vanno specialmente considerate quelle per le quali la serie (6) si riduce ad un polinomio, e che si possono chiamare *forme lineari in A a coefficienti costanti*. Per tali operazioni il campo di convergenza è costituito dal campo funzionale in cui è valida l'operazione A stessa. Esse formano un gruppo, e la loro moltiplicazione è soggetta all'identica regola della moltiplicazione dei polinomi ordinati.

11. L'operazione

$$(7) \quad F = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n$$

dove le $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono coefficienti costanti, cioè indipendenti dalla variabile che figura nella funzione arbitraria φ , è dunque la forma lineare in A , dell'ordine n ; la più semplice, cioè la forma di prim'ordine, verrà indicata colla lettera E e porremo

$$E_a = A - a, \text{ ovvero } E_a(\varphi) = A(\varphi) - a\varphi.$$

Dimostriamo come ogni forma di ordine n sia decomponibile in un prodotto di forme di prim'ordine. A tale oggetto, basta l'osservazione che la moltiplicazione delle forme lineari in A è quella stessa dei polinomi ordinati: se dunque coi coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_n$ formiamo il polinomio

$$\pi(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

ed indicando con $z_1, z_2, \dots, z_s$ la sue radici dei rispettivi ordini di molteplicità $r_1, r_2, \dots, r_s$, lo scriviamo nella forma

$$(z - z_1)^{r_1} (z - z_2)^{r_2} \dots (z - z_s)^{r_s},$$

la forma F si potrà scrivere

$$(8) \quad F = E_{z_1}^{r_1} E_{z_2}^{r_2} \dots E_{z_s}^{r_s},$$

dove i fattori E_{z_i} sono fra loro commutabili.

Sempre per la validità della ordinaria regola di moltiplicazione, potremo esprimere A^n per le potenze di E_z e viceversa mediante la formula del binomio, e quindi esprimere F in forma ordinata per le potenze di E_z anzichè di A , mediante l'espressione

$$(9) \quad F = \pi(z) + \pi'(z) E_z + \frac{\pi''(z)}{1 \cdot 2} E_z^2 + \dots + E_z^n,$$

dove $\pi'(z)$, $\pi''(z)$,... sono le successive derivate del polinomio $\pi(z)$.

12. Consideriamo ora le radici dell'operazione E_z , ed ammettiamo che in un campo funzionale cui ci si limiterà, questa operazione abbia una sola radice, funzione analitica di z , e che indicheremo con $\alpha(x, z)$. Questa radice sia regolare nell'intorno di un punto del piano z che, per la trasformazione indicata dalla formula (9), si può senza restrizione supporre in $z = 0$: e sia pertanto

$$(10) \quad \alpha(x, z) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)z + \alpha_2(x)z^2 + \dots + \alpha_n(x)z^n + \dots$$

Questa funzione gode di proprietà notevoli e che si ricavano facilmente:

a) anzitutto si ha $A(\alpha_0(x)) = 0$, onde α_0 è la funzione indicata con questa stessa notazione al § 7; astrazione fatta da un moltiplicatore costante arbitrario;

b) si ha poi, da

$$A(\alpha(x, z)) = z\alpha(x, z)$$

che

$$(11) \quad A^n(\alpha(x, z)) = z^n \alpha(x, z)$$

e da questa

$$\sum k_n A^n(\alpha(x, z)) = \alpha(x, z) \sum k_n z^n.$$

Usando il simbolo $\psi(A)$ ad indicare la funzione analitica ψ applicata al simbolo d'operazione A , sul quale concetto si tor-

nerà in seguito, osservando che esso è fin d'ora stabilito ogni qualvolta ψ sia ad indicare una funzione razionale intera od una serie di potenze, l'uguaglianza precedente si potrà scrivere

$$(12) \quad \psi(A) \{ \alpha(x, z) \} = \alpha(x, z) \psi(z).$$

c) Si ha in particolare, essendo $E_a = A - a$:

$$(13) \quad E_a^m (\alpha(x, z)) = (z - a)^m \alpha(x, z).$$

Ma se a è un valore di z pel quale la funzione $\alpha(x, z)$ sia regolare, si ha

$$\alpha(x, z) = \alpha(x, a) + (z - a) \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{(z - a)^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial a^2} + \dots$$

onde prendendo l'operazione E_a^m dai due membri, tenendo conto della (13) ed uguagliando i coefficienti delle medesime potenze di $z - a$, si ottiene

$$(14_a) \quad E_a^m \alpha(x, a) = 0, \quad E_a^m \frac{\partial \alpha}{\partial a} = 0, \dots, \quad E_a^m \frac{\partial^{m-1} \alpha}{\partial a^{m-1}} = 0.$$

$$(14_b) \quad E_a^m \frac{\partial^m \alpha}{\partial a^m} = m! \alpha(x, a).$$

$$(14_c) \quad E_a^m \frac{\partial^{m+v} \alpha}{\partial a^{m+v}} = \frac{m+v!}{v!} \frac{\partial^v \alpha}{\partial a^v}.$$

d) In particolare, facendo $a = 0$, E_a si riduce ad A , e si ottiene dalle formule precedenti

$$A \alpha(x, 0) = 0, \quad A \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)_{z=0} = \alpha(x, 0), \dots$$

$$A \left(\frac{\partial^v \alpha}{\partial z^v} \right)_{z=0} = v \left(\frac{\partial^{v-1} \alpha}{\partial z^{v-1}} \right)_{z=0}, \dots;$$

talchè le $\alpha(x, 0)$, $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)_{z=0}$, $\frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \right)_{z=0}$, ... $\frac{1}{v!} \left(\frac{\partial^v \alpha}{\partial z^v} \right)_{z=0}$, ..., cioè i coefficienti dello sviluppo (10), non sono altro che le funzioni del

sistema indicato ai §§ 7 e seg. con $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ e come tali la v^{sim} di esse $\left(\frac{\partial^{v-1}\alpha}{\partial z^{v-1}}\right)_{z=0}$ annulla la A' e le potenze successive, ma non le precedenti di A .

e) Inversamente, se una successione di funzioni $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$ è tale da dare

$$A(\eta_0) = 0, A(\eta_1) = \eta_0, \dots A(\eta_n) = \eta_{n-1}, \dots$$

la serie $\Sigma \eta_n z^n$ soddisfa all'equazione $A(\varphi) = z\varphi$.

f) Dalle (14) si ricava senza difficoltà la formula

$$(14_a) \quad A\left(\frac{\partial^m \alpha}{\partial a^m}\right) = a \frac{\partial^m \alpha}{\partial a^m} + m \frac{\partial^{m-1} \alpha}{\partial a^{m-1}},$$

di cui faremo uso più volte in seguito.

g) Infine l'operazione B essendo commutabile con A , si avrà

$$AB\alpha(x, z) = BA\alpha(x, z) = zB\alpha(x, z),$$

cioè $B\alpha(x, z)$ è una tale funzione da soddisfare pure ad $A(\varphi) = z\varphi$: si può quindi dire che la soluzione dell'equazione $A(\varphi) = z\varphi$ rimane invariata per ogni operazione del gruppo commutabile con A .

13. Se nel campo funzionale che si considera l'operazione A ha una sola radice, anche l'operazione E_z non può avere che una sola radice che sia funzione analitica di z regolare nell'intorno di $z = 0$. Infatti, essendo $\eta(x, z) = \Sigma \eta_n z^n$ radice di E_z , sarà come si è visto

$$A(\eta_0) = 0, A(\eta_1) = \eta_0, A(\eta_2) = \eta_1, \dots,$$

onde intanto η_0 non potrà differire da α_0 se non per un fattore costante. Sarà dunque $A(\eta_1) = c\alpha_0$, onde $\eta_1 = c\alpha_1 + c'\alpha_0$. Ma $A(\eta_2) = c\alpha_1 + c'\alpha_0$, onde $\eta_2 = c\alpha_2 + c'\alpha_1 + c''\alpha_0$, ed in generale

$$\eta_n = c\alpha_n + c'\alpha_{n-1} + c''\alpha_{n-2} + \dots c^{(n)}\alpha_0.$$

Pertanto

$$\eta(x, z) = \sum (c\alpha_n + c'\alpha_{n-1} + \dots c^{(n)}\alpha_0)z^n = \alpha(x, z) \sum c^{(n)}z^n,$$

cioè non differisce da $\alpha(x, z)$ che per un fattore indipendente da x .

14. Come applicazione dei risultati precedenti, ci proponiamo la risoluzione del sistema di equazioni funzionali simultanee

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\varphi_1) = a_{11}\varphi_1 + a_{12}\varphi_2 + \dots + a_{1n}\varphi_n \\ A(\varphi_2) = a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2 + \dots + a_{2n}\varphi_n \\ \vdots \\ A(\varphi_n) = a_{n1}\varphi_1 + a_{n2}\varphi_2 + \dots + a_{nn}\varphi_n \end{array} \right.$$

essendo A un'operazione distributiva data, di cui sia nota la funzione $\alpha(x, z)$, $a_{11}, \dots, a_{nn}$ essendo n^2 costanti date, a determinante differente da zero, e $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ essendo n funzioni incognite, linearmente indipendenti.

A tale oggetto, osserviamo che se giungiamo a trovare n costanti $m_1, m_2, \dots, m_n$ tali che, posto

$$m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + \dots + m_n \varphi_n = \psi$$

sia

$$A(\psi) = k\psi,$$

ne risulterà $\psi = \alpha(x, k)$. Ma se esistono tali costanti, il sistema (15) ci darà

$$\sum_{i=1}^n m_i (a_{i1} \varphi_1 + a_{i2} \varphi_2 + \dots + a_{in} \varphi_n) = k(m_1 \varphi_1 + \dots + m_n \varphi_n)$$

e non essendovi relazione lineare fra le $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$, ne conseguirà il sistema

[illegible]

ancora soddisfatta da $k = \bar{k}$. Perciò si può soddisfare al sistema:

[illegible]

cioè si può determinare una funzione ψ_1 tale che sia

$$\psi_1 = l_1 \psi + l_2 \varphi_2 + \dots + l_n \varphi_n$$

con

$$A(\psi_1) = \bar{k}\psi_1 + h\psi.$$

Quando l'equazione caratteristica ha una radice doppia $\bar{k}$, si hanno dunque corrispondentemente due funzioni ψ, ψ_1 tali che

$$A(\psi) = \bar{k}\psi, \quad A(\psi_1) = \bar{k}\psi_1 + h\psi;$$

analogamente si dimostrerebbe che quando l'equazione caratteristica ammette $\bar{k}$ come radice tripla, si hanno corrispondentemente le tre funzioni ψ , ψ_1 , ψ_2 , tali che

$$(17) \quad A(\psi) = \bar{k}\psi, \quad A(\psi_1) = \bar{k}\psi_1 + h\psi, \quad A(\psi_2) = \bar{k}\psi_2 + h'\psi_1 + l\psi,$$

e così via.

Infine le relazioni (14_a) del § 12 permettono di verificare senza difficoltà che essendo $\alpha(x, \bar{k})$ la soluzione della prima delle (17), la ψ_1 , soluzione della seconda, è

$$\psi_1 = \left(\frac{\partial \alpha(x, z)}{\partial z} \right)_{z=\bar{k}} + c\alpha(x, \bar{k}),$$

e la ψ_2 , soluzione della terza, è

$$\psi_2 = \left(\frac{\partial^2 \alpha(x, z)}{\partial z^2} \right)_{z=\bar{k}} + c \left(\frac{\partial \alpha(x, z)}{\partial z} \right)_{z=\bar{k}} + c' \alpha(x, \bar{k}),$$

e così via. In tal modo si è ottenuta in ogni caso la risoluzione del problema proposto.

15. Come seconda applicazione, proponiamoci di trovare le radici dell'operazione F , lineare e dell'ordine n rispetto ad A ; in altri termini risolviamo l'equazione funzionale

$$(18) \quad F(\varphi) = A^n(\varphi) + a_1 A^{n-1}(\varphi) + \dots + a_{n-1} A(\varphi) + a_n \varphi = 0.$$

Se ne potrebbe ottenere la soluzione riportando la questione a quella risolta nel § precedente; sembra però preferibile di trattarla direttamente. All'uopo, poniamo come nel § 11

$$\pi(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n;$$

essendo

$$\pi(z) = (z - z_1)^{r_1} (z - z_2)^{r_2} \dots (z - z_s)^{r_s},$$

e posto $E_i = A - z_i$, la F si potrà scrivere sotto forma di prodotto:

$$(19) \quad F = E_1^{r_1} E_2^{r_2} \dots E_s^{r_s}.$$

Cominciamo dal considerare una delle operazioni che entrano a fattore in questo prodotto e che indicheremo genericamente con E_r . Come sappiamo (§ 6, c) essa ha al più r radici linearmente indipendenti nel campo funzionale in cui A ha la sola radice α_0 ; dico che fra le r funzioni

$$\alpha(x, z), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \quad \dots \quad \frac{\partial^{r-1} \alpha}{\partial z^{r-1}}$$

che annullano la E^r non può passare relazione lineare. Ammettendo infatti una tale relazione

$$c_0 \alpha + c_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \dots + c_{r-1} \frac{\partial^{r-1} \alpha}{\partial z^{r-1}} = 0$$

ed eseguendo $r - 1$ volte l'operazione A , ricordando la (14_d) e ponendo per brevità $\alpha', \dots, \alpha^{(r-1)}$ in luogo di $\frac{\partial \alpha}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \alpha}{\partial z^{r-1}}$, si ottiene il sistema di equazioni

$$c_0 \alpha + c_1 \alpha' + \dots + c_{r-1} \alpha^{(r-1)} = 0,$$

$$(c_0 z + c_1) \alpha + (c_1 z + 2c_2) \alpha' + (c_2 z + 3c_3) \alpha'' + \dots + c_{r-1} z \alpha^{(r-1)} = 0,$$

$$(c_0 z^2 + 2c_1 z + 2c_2) \alpha + (c_1 z^2 + 4c_2 z + 6c_3) \alpha' + \dots + c_{r-1} z^2 \alpha^{(r-1)} = 0,$$

.

il che è inammissibile, poichè note considerazioni di algebra dimostrano che il determinante del sistema è differente da zero. La E_r ha dunque una radice generale dell'ordine r ; due delle $E_i^{r_i}$, $E_j^{r_j}$; non potranno avere radici comuni, talchè (§ 6, a) la radice generale della F sarà la somma delle radici generali di $E_1^{r_1}$, $E_2^{r_2}$, ... $E_s^{r_s}$, e sarà data pertanto dalla formula

$$(20) \quad \varphi = \sum_{i=1}^s \left(c_{i,0} \alpha(x, z_i) + c_{i,1} \frac{\partial \alpha}{\partial z_i} + \dots + c_{i,r_i-1} \frac{\partial^{r_i-1} \alpha}{\partial z_i^{r_i-1}} \right).$$

16. Volendo determinare le radici non più di una forma d'ordine finita in A , ma di un'operazione qualunque B commutabile con A , e di cui sia noto che la radice generale nel campo che si considera è d'ordine r , la espressione delle radici si può determinare riconducendo la questione a quella risolta nel § 14. Si indichino infatti con $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ r radici di B costituenti un sistema fondamentale nel campo funzionale che si considera; ogni altra radice in quel campo sarà formata linearmente con queste, ma anche $A(\beta_i)$ sarà radice di B (§ 4) e pertanto

$$A(\beta_i) = c_{i1} \beta_1 + c_{i2} \beta_2 + \dots + c_{ir} \beta_r, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r)$$

che è precisamente un sistema della forma considerata al § 14.

17. L'operazione B essendo regolare in A , si può chiedere se sarà tale anche l'operazione B^{-1} inversa di B . Ciò equivale a cercare uno sviluppo

$$(21) \quad k_0 + k_1 A + k_2 A^2 + \dots$$

per le potenze di A , tale che applicatavi l'operazione B , si ottenga per risultato l'unità. Essendo

$$B = c_0 + c_1 A + c_2 A^2 + \dots,$$

e ricordando che per le nostre operazioni commutabili valgono le leggi formali della moltiplicazione, avremo

$$c_0 k_0 + (c_1 k_0 + c_0 k_1) A + (c_2 k_0 + c_1 k_1 + c_0 k_2) A^2 + \dots = 1,$$

alla quale si soddisfa certamente — non si può però dire esclusivamente — ponendo

$$c_0 k_0 = 1, \quad c_1 k_0 + c_0 k_1 = 0, \quad c_2 k_0 + c_1 k_1 + c_0 k_2 = 0, \dots;$$

dalle quali, se c_0 è differente da zero, si possono determinare univocamente i coefficienti dello sviluppo (21), che sono quelli stessi dello sviluppo in serie di potenze di z del quoziente

$$\frac{1}{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots}.$$

L'operazione inversa di un'operazione B regolare in A ammette dunque una determinazione che è pure regolare in A , e di cui si possono facilmente calcolare i coefficienti. Oltre a questa determinazione di B^{-1} se ne hanno altre, le quali però si ottengono tutte dalla prima aggiungendo una radice arbitraria β di B ; poichè se

$$B^{-1}(\varphi) = \psi, \text{ è anche } B^{-1}(\varphi) = \psi + \beta.$$

Altre determinazioni per B^{-1} non sono possibili.

Se l'operazione B è una forma lineare in A , l'espressione che rappresenta B^{-1} sarà una serie ricorrente e tale sarà pure ogni prodotto della forma FF_1^{-1} , essendo F, F_1 forme lineari in A . In particolare si avrà, essendo $E_a = A - a$:

$$E_a^{-1} = (A - a)^{-1} = -\frac{1}{a} - \frac{A}{a^2} - \frac{A^2}{a^3} - \dots$$

18. Si osservi che le radici β di B non possono appartenere al campo di convergenza delle serie di potenze di A che rappresenta B^{-1} . Se infatti a $B^{-1}(\beta)$ si applica l'operazione B , verrà

$$BB^{-1}(\beta) = B^{-1}B(\beta) = B^{-1}(0),$$

che è nulla poichè per B^{-1} si assume la determinazione rappresentata da una serie di potenze di A ; mentre d'altra parte $BB^{-1}(\beta) = \beta$, il che implica contraddizione.

Invece la radice α di A , e così le funzioni indicate ai §§ 7 e seg. con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ sono nel campo funzionale di convergenza della serie ottenuta per B^{-1} , poichè per esse tale serie si riduce ad un polinomio. Sostituendo nella serie rappresentante B^{-1} la funzione $\alpha(x, z)$, si ottiene

$$B^{-1}(\alpha(x, z)) = \alpha(x, z) (k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + \dots).$$

Se dunque la serie $\Sigma c_n z^n$ ammette un cerchio non nullo di convergenza, e c_0 è differente da zero, la serie

$$\Sigma k_n z^n = \frac{1}{\Sigma c_n z^n}$$

ammetterà un cerchio di convergenza il cui raggio è il modulo minimo ρ delle radici di $\Sigma c_n z^n$, e per $|z| < \rho$ la funzione $\alpha(x, z)$ appartiene al campo funzionale di convergenza della serie che rappresenta B^{-1} . Si vede pure senza difficoltà che per $|z| < \rho$ anche $\frac{\partial \alpha}{\partial z}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}, \dots$ appartengono allo stesso campo funzionale.

Riassumendo i risultati di questo e del precedente §, abbiamo che

“ Se B è un'operazione regolare in A , col termine indipendente da A differente da zero,

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n,$$

“ fra le determinazioni di B^{-1} (differenti una dall'altra per una radice di B) ve n'è una pure regolare in A . I coefficienti del suo sviluppo sono quelli del quoziente $\frac{1}{\Sigma c_n z^n}$ sviluppato per le

“ potenze crescenti di z . Lo sviluppo trovato è valido certamente per $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ e, se $\sum c_n z^n$ non è una serie costantemente divergente, anche per $\alpha(x, z)$ e per le sue derivate parziali rispetto a z per valori di z in modulo abbastanza piccoli; “ esso non può essere valido invece per le radici β di B „.

19. Quando un'operazione B commutabile con A non è regolare in A , si potrà dire, continuando l'analogia colla nomenclatura della teoria delle funzioni, che essa è *singolare* rispetto ad A . Ora nel campo funzionale in cui A ha una unica radice, non è possibile che l'operazione B , singolare rispetto ad A , sia ad un valore: infatti sia α la radice di A ; si avrà

$$AB(\alpha) = BA(\alpha) = B(0),$$

ma se $B(0)$ fosse nullo, ne verrebbe $B(\alpha) = k_0 \alpha$ essendo k_0 una costante e per conseguenza, applicando il procedimento dei §§ 8 e 9, B risulterebbe regolare in A , contro l'ipotesi. Onde $B(0)$ è differente da zero e B non può quindi essere ad un valore nel campo considerato.

Come esempio più semplice di operazioni non regolari in A abbiamo le A^{-1}, A^{-m} ; tale è pure B^{-1} se $B = AC$, essendo C regolare in A .

L'operazione F^{-1} , dove $F = E_{a_1} E_{a_2} \dots E_{a_r}$, è singolare rispetto ad $E_{a_1}, E_{a_2}, \dots E_{a_r}$; e le singolarità si possono separare dando ad F^{-1} la forma

$$F^{-1} = c_1 E_{a_1}^{-1} + c_2 E_{a_2}^{-1} + \dots + c_r E_{a_r}^{-1};$$

i coefficienti si ottengono colla regola stessa della scomposizione delle funzioni razionali in frazioni semplici.

20. Le considerazioni precedenti ci conducono senza difficoltà dal concetto di forma lineare d'ordine r in A , — che è quanto dire funzione razionale intera del simbolo A — al concetto di funzione razionale fratta del simbolo A : per le quali funzioni valgono le stesse regole di calcolo delle funzioni razionali di una variabile numerica, ma che a differenza di queste, sono a più determinazioni e si riducono a determinazioni univoche

solo mediante limitazioni opportune del campo funzionale. Si è così naturalmente condotti ad un passo ulteriore, a considerare cioè in generale le *funzioni analitiche* del simbolo operatorio A : funzioni che sono definite da una serie di potenze di A e che si può *continuare*, col metodo stesso della continuazione analitica della solita teoria delle funzioni, sostituendo alla serie di potenze di A le serie di potenze di $E_a = A - a$ (*). In particolare si hanno le funzioni X algebriche di A , definite da una equazione

$$f(X, A) = 0,$$

dove f è funzione razionale intera dei due simboli X, A , a coefficienti costanti, ed X si può sviluppare in serie di potenze di A , con considerazioni relative alla molteplicità ed al campo di validità degli sviluppi che offrono grande analogia, ma anche alcune differenze, colla ordinaria teoria delle funzioni algebriche. In questo ramo del calcolo funzionale vengono a trovare il loro posto i tentativi fatti dal LIOUVILLE, dal HOLMGREN e da altri per uno studio delle derivate ad indice qualunque.

21. Il calcolo simbolico operativo considerato in molti trattati di analisi si limita per lo più alle operazioni che sono funzioni analitiche della ordinaria derivazione, che rappresentiamo con D . Applicando a questo caso speciale le cose dette nel presente lavoro, si scorgono molte semplificazioni alle proposizioni generali date nelle pagine precedenti, poichè D ammette nel campo funzionale formato dalla totalità delle funzioni,

(*) Funzioni analitiche, ed in particolare razionali od esponenziali di uno o più simboli operativi sono state spesso e da lungo tempo considerate. Devo al prof. Peano l'indicazione del *Treatise on the Calculus of operations* di Carmichael, dove si trova riassunto quanto si dà negli ordinari trattati intorno al cosiddetto Calcolo simbolico. Ma tali considerazioni sono sempre state puramente formali e presentate come metodo abbreviato, destinato a facilitare i procedimenti del Calcolo ordinario; non mai come campo di studio a sè, per quanto, come si è visto in queste poche pagine, in esso si presentino nuove ed interessanti questioni circa ai modi di aggruppamento, alle condizioni di validità, a quelle di univocità delle operazioni distributive.

la sola radice di prim'ordine 1. Il sistema di funzioni $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ considerate al § 7 non differisce che per una modificazione senza importanza dal sistema di polinomi considerato dall'Appell (*). La funzione $\alpha(x, z)$ è ora $e^{\alpha z}$; i §§ 14 e seguenti riconducono alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari e dell'equazione differenziale lineare omogenea, a coefficienti costanti, mentre il § 17 dà la risoluzione dell'equazione non omogenea. Le operazioni regolari in D non sono altro che le operazioni definite dall'Appell per mezzo dei suoi polinomi (**).

Ma sul simbolo D non è soltanto applicabile tutta quella parte del calcolo ordinario che si fonda sulle regole formali della moltiplicazione, bensì tutto quanto risulta dall'applicazione della regola di derivazione delle serie di potenze. Se infatti noi adottiamo quella definizione di *derivazione funzionale* data nella Nota del 17 febbraio 1895 dei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, la derivata funzionale di D^n sarà $n D^{n-1}$ e varrà inoltre la regola di derivazione del prodotto. Da cui risulta, fra altre conseguenze, che un'equazione differenziale lineare simbolica, in cui al posto della variabile indipendente stia il simbolo D ed i cui coefficienti siano serie di potenze o polinomi razionali in D, si può integrare per serie mediante sviluppi che hanno gli stessi coefficienti delle serie di potenze integrali della vera equazione differenziale lineare dedotta dalla proposta col sostituire a D una variabile numerica.

(*) *Annales de l'École Normale*, S. II, T. IX, 1880.

(**) *Loc. cit.*, pag. 133. Ho già osservato in altra occasione come le operazioni di Appell formino un gruppo che coincide col gruppo delle operazioni commutabili colla derivazione.