

SALVATORE PINCHERLE

SALVATORE PINCHERLE

Remarque relative à la communication de M. Hadamard

in: Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses
(Zürich 9-11 August 1897), Teubner, Leipzig, 1898, p. 203–203

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_1898_2>

Con la comunicazione di M. Hadamard: Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles, Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses (Zürich 9-11 August 1897), Teubner, 1898, 201-202

Remarque relative à la communication de M. Hadamard.

Par

S. PINCHERLE à Bologne.

M. Pincherle, à propos de l'intéressante communication de M. Hadamard, fait remarquer que plusieurs géomètres italiens ont, sous divers points de vue, regardé les fonctions comme les points d'un ensemble et même d'un continuum. Il cite à ce sujet un mémoire déjà ancien de feu M. Ascoli, inséré aux *Annali di Matematica*, intitulé *Sulle curve limiti di una varietà di curve*, des notes de M. Volterra (*R. C. della R. Accad. dei Lincei*, 1887), d'autres de M. Arzelà (*R. C. et Mem. dell' Accad. di Bologna*, 1894—96) et ses propres travaux (p. ex. *Annali di Matematica*, 1884 etc.).

Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles.

Par

J. HADAMARD à Paris.

Quoique la théorie des ensembles fasse abstraction de la nature des éléments, on a surtout considéré, jusqu'à présent, les ensembles composés de nombres, ou, tout au plus, de points dans l'espace à n dimensions.

Il ne me semble pas inutile de signaler l'intérêt qu'il y aurait à étudier des ensembles composés de fonctions. De tels ensembles peuvent d'ailleurs présenter des propriétés tout autres que les précédents.

C'est ainsi que la question de la convergence des séries conduirait à rechercher un ensemble de fonctions d'une puissance supérieure à la première et bien ordonné, c'est-à-dire tel que l'on puisse non seulement indiquer l'ordre de deux éléments quelconques, mais assigner l'élément qui précède et celui qui suit immédiatement un élément donné.

Mais c'est principalement dans la théorie des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique que des études de cette espèce joueraient, sans nul doute, un rôle fondamental. Pour n'en citer qu'un exemple c'est grâce à ces recherches qu'on arriverait à donner un fondement solide aux raisonnements bien connus qui ramènent la définition des intégrales de ces équations à des questions de minimum.

Il est clair, en effet, que de telles questions sont intimement liées à la nature du domaine dans lequel le minimum est recherché. Par exemple, le minimum d'une quantité $f(x, y, z)$ qui dépend continuellement des coordonnées d'un point existe toujours sur une surface fermée (ou dont les bords sont considérés comme faisant partie de la surface); il n'existe pas nécessairement si une ligne ou un point donnés sont exclus.

Il faut toutefois remarquer que le problème présente des difficultés spéciales dans le cas du calcul des variations, la solution dépendant à

la fois de la nature du domaine et de celle de l'expression dont on étudie la variation. C'est ainsi qu'une intégrale étendue à un arc de courbe assujetti à avoir ses extrémités en deux points donnés, avec des tangentes données en ces points, admet en général un minimum si la fonction sous le signe $\int$ contient des dérivées secondes et n'en admet pas si cette fonction ne contient que des dérivées premières.

Il n'en est pas moins évident qu'il y aurait lieu d'étudier l'ensemble E formé par les fonctions continues d'une variable comprise dans l'intervalle $(0, 1)$ et prenant aux extrémités des valeurs données, ainsi que les ensembles analogues.

Un des premiers problèmes qui se poseraient dans cette étude me paraît être le suivant:

Divisons l'ensemble considéré en ensembles partiels E' tels que deux fonctions intérieures à l'un quelconque d'entre eux aient une distance (au sens de Weierstrass) moindre qu'un nombre déterminé δ . Considérant tous ces E' comme autant d'individus, on peut dire que l'ensemble qui a ces E' pour éléments numère l'ensemble E . C'est cet ensemble numérant dont il conviendrait d'étudier les propriétés et, en premier lieu, la puissance.
