Salvatore Pincherle

Sull'iterazione della funzione $x^2 - a$

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie 5, Vol. **27** (1918), p. 337–342

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_1918_1>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° dicembre 1918.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Sull'iterazione della funzione $x^2 - a$*. Nota del Socio S. Pincherle.

Il problema dell'iterazione, all'infuori del caso ovvio della convergenza, è stato così poco studiato e presenta d'altra parte tali nuovi aspetti, anche in casi particolari, che non sembra inutile trattare dettagliatamente un esempio speciale, elementare quanto si vuole, ma istruttivo per la discussione cui dà luogo ed anche perchè dà indicazioni per la trattazione di casi più complessi. Questo esempio consiste nell'iterare la funzione quadratica semplicissima $x^2 - a$, dove x è variabile complessa ed a un numero positivo, che verrà detto *base*.

1. Per brevità, indicherò con $\alpha(x)$ la funzione $x^2 - a$, e con $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$, ... le sue iterate, per modo che è

$$\alpha_1(x) = \alpha(x) , \dots \alpha_n(x) = \alpha_{n-1}^2(x) - a . \tag{1}$$

Applicando ad un punto x del piano x complesso l'operazione $\alpha(x)$ ripetutamente, si ottengono i punti

$$x_1 = \alpha(x) , \; x_2 = \alpha_2(x) = \alpha(x_1) , \dots x_n = \alpha_n(x) = \alpha(x_{n-1}) , \dots$$

che sono i *conseguenti* di x, mentre le radici delle equazioni in t

$$\alpha(t) = x , \; \alpha_2(t) = x , \dots \alpha_n(t) = x , \dots$$

ne sono gli *antecedenti*; uno degli antecedenti n^{simi} di x, cioè una qualunque delle radici di $\alpha_n(t) = x$, potrà indicarsi con x_{-n}. La totalità dei conseguenti, degli antecedenti, e degli antecedenti dei conseguenti darà l'insieme dei punti *congruenti* ad x. Questo insieme è invariante per l'operazione $\alpha(x)$.

Si noti in particolare l'insieme dei conseguenti di $x=0$:

(2) $$-a \, , \; a^2-a \, , \; (a^2-a)^2-a \, , \dots$$

e degli antecedenti di $x=0$, che si diranno *fuochi*:

(3) $$\pm\sqrt{a} \, , \; \pm\sqrt{a\pm\sqrt{a}} \, , \; \pm\sqrt{a\pm\sqrt{a\pm\sqrt{a}}} \, , \dots$$

2. I punti del piano x che rimangono invariati per applicazione di $\alpha(x)$ sono, oltre ad $x=\infty$, le radici

$$\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{1+4a})$$

dell'equazione $x^2-a=x$. Esse sono reali per a positivo, e si indicherà con z la radice positiva, con z' la negativa.

Poichè tutti i conseguenti di z coincidono con z, così l'insieme dei punti congruenti a z consta di z e dei suoi antecedenti, fra cui vi è $-z$. A z e ai suoi antecedenti daremo il nome di *vertici*. Il punto z' è punto di convergenza regolare se è $a<\frac{3}{4}$; il punto z non è mai tale.

3. Indicherò con Ω l'insieme dei punti x pei quali è

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(x)=\infty \, .$$

È facile dimostrare che questo insieme comprende tutti i punti pei quali è $|x|>z$. Si può pure dimostrare che Ω non ha punti isolati, che è connesso, che un punto limite di antecedenti di un qualunque punto x non può appartenere ad Ω. Perciò, gli antecedenti dei punti di Ω, i quali appartengono quindi tutti ad Ω, hanno i loro punti limiti al contorno Γ di Ω. Questo contorno è chiuso; è invariante rispetto ad $\alpha(x)$.

4. La successione

(4) $$\sqrt{a} \, , \; \sqrt{a+\sqrt{a}} \, , \; \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}} \, , \dots$$

è costituita da numeri crescenti; essa è limitata superiormente, poichè per $a>2$ è

$$\sqrt{a+\sqrt{a}}<\sqrt{2a}<a, \quad \text{onde} \quad \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}<a, \text{ ecc.},$$

ed è quindi *a fortiori* limitata per $a\leq 2$. Essa ha dunque un limite, che è evidentemente z.

Si ha $z < a$ per $a > 2$, $z > a$ per $a < 2$, $z = 2$ per $a = 2$. Ne viene che per $a \geq 2$, tutti i fuochi (3) sono reali, qualunque sia la disposizione dei segni $+$ o $-$.

5. I vertici, o antecedenti di z (n. 2), sono dati da espressioni della forma

$$\pm\sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \cdots \pm \sqrt{a + z}}} \tag{5}$$

dove, tenuto conto che $z = \sqrt{a + z}$, sono compresi anche i valori z e $-z$. Per $a > 2$, è $z < a$ e quindi tutti i vertici sono reali.

Nella (5), i radicali si contino da sinistra a destra. Se il loro numero è n, il vertice si dirà d'ordine n; ma se l'ultimo segno è $+$, in virtù della relazione

$$z = \sqrt{a + z}, \tag{6}$$

il numero dei radicali si riduce; si diranno perciò vertici *proprî* di ordine n quelli che, contenendo n radicali, hanno l'ultimo radicale affetto dal segno $-$. Così, sono vertici di secondo ordine

$$\pm\sqrt{a \pm \sqrt{a + z}} \tag{7}$$

e fra questi, sono vertici proprî $\pm\sqrt{a - \sqrt{a + z}} = \pm\sqrt{a - z}$.

Per la rappresentazione dei vertici, può giovare una speciale notazione simbolica. Si scriva uno zero seguìto da virgola, e al seguito di questa n cifre 0 od 1, ponendo la cifra 0 al posto occupato da un radicale affetto da segno $+$, la cifra 1 al posto occupato da un radicale di segno $-$. Così, le (7) saranno rappresentate da

0,00   0,01   0,10   0,11 ;

$\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a + z}}}$ verrà rappresentato da 0,011. Per la proprietà (6), nella indicata rappresentazione si possono sopprimere, come nella numerazione ordinaria, gli zeri a destra: ad ogni vertice corrisponde quindi univocamente una frazione basica della numerazione binaria [1] compresa fra 0 (incluso) ed 1. Ai vertici proprî di ordine n corrispondono quelle frazioni ad n cifre dopo la virgola in cui l'ultima cifra è 1.

6. Trattenendoci sul caso $a > 2$, si vede senza difficoltà che tutti i punti pei quali è $|x| < \sqrt{a - z}$ appartengono ad Ω. Lo zero, e quindi tutti i suoi conseguenti (2) e tutti i fuochi (3), appartengono quindi ad Ω.

Si è osservato che nessun fuoco è in valore assoluto superiore a z; così, nessun fuoco positivo è inferiore a

$$\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a + \text{in inf.}}}}$$

(1) Avente cioè per denominatore una potenza di 2.

cioè a $\sqrt{a-z}$; ne viene che nell'intervallo $(-\sqrt{a-z}\,,\ \sqrt{a-z})$ (¹) non cade alcun fuoco all'infuori dello zero. L'intervallo $(-\sqrt{a-z}\,,\ \sqrt{a-z})$ si indichi con q_0; esso ha 2^n antecedenti n^{simi}, 2^{n-1} positivi e 2^{n-1} negativi, che cadono rispettivamente in $(\sqrt{a-z}\,, z)$ ed in $(-z\,, -\sqrt{a-z})$ complementari di q_0 su $(-z\,, z)$; questi antecedenti hanno per estremi vertici di ordine $n+2$, proprî, e reciprocamente, ogni vertice proprio di ordine $n+2$ è estremo di un intervallo q_n, antecedente n^{simo} di q_0. Ognuno degli intervalli q_n contiene un fuoco ed uno solo. Due intervalli q, qualunque sia il loro indice, non hanno in comune nè punti interni, nè estremi. Tutti gl'intervalli q appartengono ad $\boldsymbol{\Omega}$, ad eccezione dei loro estremi (vertici) che sono al contorno di $\boldsymbol{\Omega}$.

Se ora si osserva che ogni vertice è limite di una successione di fuochi [come si vede sostituendo, nell'espressione (5) del vertice, gli elementi di (4) al posto di z] e che ogni fuoco è interno ad un intervallo q, ne viene che ogni vertice sarà anche punto limite di vertici.

Indichiamo ora con Z l'aggregato dei vertici e dei loro punti limiti. Esso è tutto posto sul segmento $(-z\,, z)$, i cui estremi gli appartengono; dei segmenti q esso contiene solo gli estremi, perciò questi segmenti sono per Z intervalli *contigui.*

L'aggregato Z è per definizione *chiuso*, ed è anche *denso in sè*, per essere i vertici punti limiti di vertici; è dunque *perfetto*. È inoltre non denso, poichè in caso contrario conterrebbe tutto un intervallo, in cui cadrebbero necessariamente vertici, e quindi fuochi, contro il fatto che ogni fuoco è interno ad un intervallo contiguo.

7. È ora facile di stabilire, nel caso $a>2$, quale sia il campo $\boldsymbol{\Omega}$. Ad esso intanto appartengono l'esterno del cerchio $|x|=z$, l'interno del cerchio $|x|=\sqrt{a-z}$, cerchi che diremo rispettivamente C_0 e C_0'. Antecedente n^{sima} di C_0 è la curva C_n rappresentata dall'equazione

$$|\alpha_n(x)|=z\,;$$

è una cassinoide a 2^n fuochi, che sono gli n^{simi} antecedenti di $x=0$; essa consta di 2^n ovali, ciascuna delle quali taglîa l'asse reale in due punti (vertici) l'uno dei quali è vertice proprio, l'altro vertice improprio di ordine $n+1$; il segmento così determinato, o diametro dell'ovale, comprende infiniti intervalli contigui. Il campo esterno a tutte le ovali appartiene ad $\boldsymbol{\Omega}$. La prima e la seconda ovale di C_n sono tangenti internamente alla prima ovale di C_{n-1} nei suoi vertici; la seconda e terza sono parimenti tangenti alla seconda ovale di C_{n-1}, e così via. Antecedente n^{sima} di C_0' è la curva data da

$$|\alpha_n(x)|=\sqrt{a-z}\,;$$

(¹) Con $(a\,, b)$ si indica l'intervallo (sull'asse reale) $a<x<b$.

è una cassinoide C_n coi medesimi 2^n fuochi di C_n e pure composta di 2^n ovali; l'interno di ciascuna di queste appartiene ad Ω. Ogni ovale di C'_n taglia l'asse reale in due vertici proprî di ordine $n+2$, comprendenti un diametro che non è altro se non uno degli intervalli contigui q_n. Due ovali consecutive di C_n sono tangenti (esternamente) ad una ovale di C'_{n-1} nei vertici di questa.

Si passi ora al limite per $n=\infty$. Una considerazione elementare di geometria analitica dimostra che la massima ordinata, tanto delle C_n che delle C'_n, tende a zero per $n=\infty$. L'interno delle C'_n tende all'insieme degli intervalli contigui, i vertici esclusi; l'esterno delle C_n tende a tutto il piano meno ciò che rimane del segmento $(-z, z)$ togliendo gl'intervalli contigui; onde segue che « nel caso $a>2$, il campo Ω, i cui punti sono « mandati all'infinito dall'iterazione indefinitamente ripetuta di x^2-a, è « costituito da tutto il piano, meno l'aggregato perfetto non denso Z posto « sul segmento $(-z, z)$ dell'asse reale ».

8. A questo studio si connette quello delle catene di radicali

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \cdots}}} \tag{8}$$

in numero infinito; nel caso $a>2$, è già dimostrato [1] come ogni simile catena, per una determinata successione di segni, sia convergente e tenda ad un elemento determinato dell'aggregato Z, e reciprocamente, come ogni elemento di Z sia univocamente rappresentato da una determinata catena (8).

9. Nel caso $a=2$, si ha $z=2$, $z'=1$. La successione (4) tendendo a 2, ne viene

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\text{in inf.}}}}=0;$$

i vertici coincidono dunque coi fuochi ed un vertice proprio di ordine n è un fuoco di ordine $n-2$ (con $n-2$ segni radicali).

Detto C_0 il cerchio $|x|=2$, l'esterno di C_0 appartiene ad Ω; antecedente di C_0 è la curva $|\alpha(x)|=2$, che si vede essere una lemniscata C_1 di fuochi $\pm\sqrt{2}$, ed avente $x=0$ come punto doppio; l'esterno della lemniscata appartiene ad Ω. Antecedente di C_1 è la lemniscata C_2 a quattro fuochi $|\alpha_2(x)|=2$; i fuochi sono $\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$, i punti doppî sono i fuochi $\pm\sqrt{2}$ di C_1. Così di seguito: l'antecedente n^{sima} di C_0 è una curva C_n, lemniscata a 2^n fuochi, di ordine 2^{n+1}, ed i cui punti doppî sono i fuochi delle C_{n-1}. Chiamando *diametro* di C_n il tratto di asse reale compreso fra due punti doppî consecutivi, si vede che ogni diametro di C_n è somma di

[1] Rendiconti della R. Acc. di Bologna, 17 febbraio 1918.

due diametri consecutivi di C_{n-1}. Come al n. 7, una considerazione semplice di geometria analitica mostra che la massima ordinata di C_n tende a zero per $n = \infty$. Le C_n ammettono dunque come limite il segmento $(-2, 2)$: il campo Ω è pertanto costituito da tutto il piano, meno codesto segmento. Ogni fuoco è punto limite di fuochi; l'insieme perfetto dei fuochi e dei loro punti limiti è denso su $(-2, 2)$ e costituisce cioè tutto l'intervallo. Ogni catena indefinita

$$\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \cdots}}}, \tag{9}$$

dove sia determinata la successione dei segni, è convergente e tende ad un numero x compreso fra -2 e 2, e reciprocamente, ogni tale numero ammette rappresentazione nella forma (9).

La relazione che lega i punti consecutivi

$$x_n = x_{n-1}^2 - 2$$

s'incontra in trigonometria elementare nella duplicazione degli archi; basta porre $x = 2\cos\theta$, $x_1 = 2\cos 2\theta$.

10. Venendo finalmente al caso di $a < 2$, si vede che è $z > a$, e che i fuochi non sono più tutti reali; anzi, per $a < 1$, nessuna delle (3) in cui figuri qualche segno — può essere reale e sono tali i soli fuochi della successione (4) insieme ai loro contrarî. Per $a = 1$, oltre a questi, si ha il fuoco reale 0: per $1 < a < 2$, il decidere per quali disposizioni dei segni $+$ e $-$ una espressione (3) sia reale viene a presentare qualche difficoltà [1].

Anche nel caso $a < 2$, i punti del piano esterni al cerchio C_0 dato da $|x| = z$ appartengono ad Ω; vi appartengono dunque gli antecedenti di questi, cioè i punti esterni alla curva C_1 data da $|x^2 - a| = z$; questa è una cassinoide di fuochi $\pm\sqrt{a}$, formata da una sola ovale interna a C_0 e tangente a C_0 nei punti $\pm z$. Antecedente di C_1 è la curva C_2, data da $|\alpha_2(x)| = z$, cassinoide a quattro fuochi pure di un solo pezzo, interna a C_1 cui è tangente nei quattro vertici $\pm z$ e $\pm\sqrt{a - z}$, i primi reali, i secondi immaginarî. Così continuando, si dà origine ad una successione indefinita di curve C_n, cassinoidi a 2^n fuochi, ognuna delle quali è interna alla precedente e tangente alla precedente nei vertici di ordine n proprî ed improprî.

I punti esterni ad ognuna delle C_n appartengono ad Ω; il contorno Γ di Ω è dunque interno a tutte le C_n ed è il luogo limite di queste. I punti limiti dell'aggregato degli antecedenti di un punto qualunque di Ω appartengono a Γ.

11. Considerando la successione particolare di vertici

$$\sqrt{a + \sqrt{a - z}}, \quad \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a - z}}}, \quad \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a - z}}}}, \ldots \tag{10}$$

[1] Ved. Rend. della R. Acc. dei Lincei, Comunicazione del 6 settembre 1918.

si dimostra facilmente che i loro argomenti tendono a zero, fondandosi sulla relazione ricorrente che li lega, mentre i loro moduli tendono a z. Da ciò risulta subito che ogni vertice è punto limite di vertici. L'aggregato Z dei vertici e dei loro punti limiti è perfetto, appartiene a Γ; i suoi punti sono o sulle C_n — su tutte da un indice in poi — o sono interni a tutte le C_n.

I vertici di ordine n sono sulla C_{n-1} e su tutte le C_n, C_{n+1}, ... e sono i punti di contatto di C_{n-1} colle C_n, C_{n+1}, ... Ferma la convenzione del n. 5 per la rappresentazione simbolica dei vertici mediante le frazioni basiche della numerazione binaria, si vede che i vertici si susseguono sulla C_{n-1} nel senso delle rotazioni positive, come le corrispondenti frazioni si seguono nel loro ordine di grandezza. Un raggio che, uscendo da 0, ruoti nel senso positivo, incontra dunque i vertici ed i loro punti limiti ordinatamente, cioè nel medesime ordine con cui si seguono i numeri reali compresi fra 0 ed 1 scritti con numero finito od infinito di cifre nella numerazione binaria. Il detto raggio uscente da 0 attraversa sempre in qualche punto la Γ, poichè va da 0, non appartenente ad Ω, a punti che ad Ω appartengono; non è escluso però che questo punto possa essere lo zero medesimo.

Infine, è da osservare, in base all'emboitement delle curve C_n, che il luogo limite delle medesime offre una singolare analogia con la celebre curva di Von Koch.